ECRICOME 2018 - Voie scientifique

Exercice 1

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.
Pour toutes matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X,Y\rangle = {}^{\mathrm{t}}XY$.
Pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}XX}$.

On considère u et v deux endomorphismes de E, et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. a) Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
   b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1,a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
   c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3. a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0;1]$.
   b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie 2

On revient dans cette partie au cas général, où n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$.
On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose : $C = BAB$.

4. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\|BX\|^2 = \langle BX,X\rangle.$$
   En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\|BX\| \leqslant \|X\|.$$
5. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit λ une valeur propre de C et un X un vecteur propre associé.
   a) Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.
   b) En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.
7. Soit μ une (éventuelle) valeur propre de AB non nulle, et X un vecteur propre associé.
   a) Montrer que BX est un vecteur propre de C.
   b) Montrer : $ABX = \mu AX$. En déduire que : $AX = X$.
   c) Montrer que : $\langle X,BX\rangle = \mu\|X\|^2$.
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de AB est inclus dans $[0;1]$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.
2. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi,\varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.

c) Étudier la nature des points critiques de f.

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

4. a) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)n \geqslant 0$.

```
function u=suite(n)
  v=0
  w=1
  for k=2:n
    ..........
    ..........
    ..........
  end
  u=..........
endfunction
```

b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite

5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

d) Montrer que : $\varphi = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

Problème

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.

Partie 1 – Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathrm{P}(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathrm{P}(N=k-1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.

a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(N=k) = \frac{b^k}{k!}\mathrm{P}(N=0).$$

b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.

a) Montrer que :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \mathrm{P}(N=k) = 0.$$

b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.

a) Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathrm{P}(z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathrm{P}(Z=k-1).$$

b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.

a) Calculer $\mathrm{P}(N=1)$. En déduire que $a+b \geqslant 0$.

b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{m} k\mathrm{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathrm{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathrm{P}(N=k).$$

c) En déduire que $\left((1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\mathrm{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
Préciser alors la valeur de $\mathrm{E}(N)$ en fonction de a et b.

d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$\mathrm{E}\left(N^2\right) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathrm{V}(N)$ en fonction de a et b.

f) Montrer que $\mathrm{E}(N) = \mathrm{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie 2 – Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathrm{P}(N=k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in [0;1], \quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(N=k)x^k$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$.
On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0;1], \quad f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0;1]$.

a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

b) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que :

$$G(x) = p_0(1 - ax)^{\alpha}.$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = \mathrm{E}(N)$.

Partie 3 – formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie 1.
On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

9. Calculer $\mathrm{P}(S = 0)$ lorsque $a \in]0;1[$ à l'aide de la partie 2.
10. a) Calculer $\mathrm{P}(S = 0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

b) On considère la fonction Scilab suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
function y=simuX(n)
  y=0;
  for i=1:n
    if rand()<1/2
      y=y+1;
    end
  end
endfunction
```

Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

c) On rappelle qu'en Scilab l'instruction `grand(1,1,"poi",lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
function s=simulS(lambda,n)
  N=grand(1,1,"poi",lambda)
  ..........
  ..........
  ..........
  ..........
  ..........
endfunction
```

11. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :

$$\forall k \geqslant 0, \quad p_k = \mathrm{P}(N = k)$$

et on notera également :

$$\forall k \geqslant 0, \quad q_k = \mathrm{P}(X_1 = k).$$

Enfin, on considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n+1]\!], \quad \mathrm{E}(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$

Indication : on pourra considérer la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{E}(X_i | S_{n+1} = k)$.

b) Justifier que :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \mathrm{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)\mathrm{P}(S_{n+1}=k) = q_j \mathrm{P}(S_n = k-j).$$

c) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathrm{P}(S_n = k-j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathrm{P}(S_{n+1} = k).$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que :

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad \mathrm{P}(S = k-j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \mathrm{P}(S_n = k-j).$$

b) Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathrm{P}(S = k-j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathrm{P}(S_{n+1} = k).$$

c) Justifier que :

$$\mathrm{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} \mathrm{P}(S_{n+1} = k).$$

d) En déduire finalement que :

$$\mathrm{P}(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j \mathrm{P}(S = k-j).$$