ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم العالي والبحث العلمي

Royaume Du Maroc
Ministère de l'Education Nationale, de la Formation Professionnelle, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Secrétariat d'Etat chargée de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
PRESIDENCE CNAEM 2018

جامعة محمد الأول بوجدة
UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER OUJDA
المدرسة الوطنية للتجارة و التسيير وجدة
ECOLE NATIONALE DE COMMERCE ET DE GESTION OUJDA

Concours National d'Accès aux Ecoles de Management

Edition 2018

Filière : ECS

Epreuve : Mathématiques et Informatique

Durée : 04 heures

Notes à lire par le candidat :

- L'usage de la calculatrice est interdit

Nombre de pages : 04

Page de garde

المدرسة الوطنية للتجارة والتسيير- ص ب 658 وجدة 60000 - الهاتف: 0536506989 الفاكس: 0536506984
Ecole Nationale de Commerce et de Gestion d'Oujda - BP 658 Oujda 60000 -Tél: 0536506989 | Fax:0536506984
E-mail: adminencgo@gmail.com Site : http://encgo.ump.ma/

Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales:

L'épreuve se compose de trois problèmes indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

PROBLEME 1

On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base B. Soient X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on pose $\text{Vect}(X)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par X et on pose $\text{Vect}(X, Y)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par X et Y.

Partie 1

Calcul de la puissance de la matrice A

On pose $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = 12(x, y, z)\}$, $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = 2(x, y, z)\}$ et $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = 3(x, y, z)\}$.

1. a) Montrer que $F_1 = \text{Vect}(u)$, $F_2 = \text{Vect}(v)$ et $F_3 = \text{Vect}(w)$, avec $u = (1, \alpha_1, \alpha_2)$, $v = (1, \beta_1, \beta_2)$ et $w = (\gamma_1, 1, \gamma_2)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ sont à déterminer.
   b) Montrer que la famille $B' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. a) Montrer que f est diagonalisable.
   b) Déterminer la matrice P de passage de la base B à la base B'.
   c) Vérifier que $P^3 - P^2 + 3I = O$.
   d) En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.
3. a) Déterminer une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   c) Déterminer pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n sous la forme d'un tableau.

Partie 2

Application en probabilité

Un mobile se déplace entre les sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :

Si à l'instant n, il est dans la position A, alors à l'instant (n+1), soit il y reste avec la probabilité 1/2, soit il se déplace vers la position B ou la position C d'une façon équiprobable (c'est-à-dire avec la même probabilité).

Si à l'instant n, il est dans la position B, alors à l'instant (n+1), soit il y reste avec la probabilité 5/12, soit il se déplace vers la position A avec la probabilité 1/3 ou vers la position C avec la probabilité 1/4.

Si à l'instant n, il est dans la position C, alors à l'instant (n+1), soit il y reste avec la probabilité 1/2, soit il se déplace vers la position A avec la probabilité 1/6 ou vers la position B avec la probabilité 1/3.

On note les événements suivants

A_n:" à l'instant n le mobile se trouve à la position A".

B_n:" à l'instant n le mobile se trouve à la position B".

C_n:" à l'instant n le mobile se trouve à la position C".

On pose $P(A_n) = a_n$ la probabilité de l'événement A_n, $P(B_n) = b_n$ la probabilité de l'événement B_n et $P(C_n) = c_n$ la probabilité de l'événement C_n. Initialement, à l'instant $n = 0$, le mobile se trouve dans un des trois sommets avec $a_0 = \frac{1}{6}$, $b_0 = \frac{1}{3}$ et $c_0 = \frac{1}{2}$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n$.
   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, b_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   c) Déterminer, pour tout entier naturel n, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \alpha A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où le réel α à déterminer.
   b) Recopier et compléter le programme Scilab suivant afin qu'il calcule et affiche les valeurs a_{20}, b_{20} et c_{20}.

```
A =.........................................
U=.........................................
for i = ..................................
    U=.........................................
end
disp(......................................)
```

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \alpha^n A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.
   d) Déterminer pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n en fonction de n.

3. Déterminer les limites de a_n, b_n et c_n, quand n tend vers $+\infty$.

Partie 3

Exemples de calcul d'une distance d'un vecteur à un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Dans la suite, $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique. On pose $F = \text{Vect}(u)$ et $G = \text{Vect}(v, w)$, (u, v et w sont les trois vecteurs qui sont trouvés dans la question Partie 1, 1. a)).

1. Montrer que G est un supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. a) Déterminer P_F la projection orthogonale sur F.
   b) Déterminer P_G la projection orthogonale sur G.
3. On pose $N = (1, 2, 3)$.
   a) Déterminer $d(N, F)$, la distance de N à l'espace vectoriel F.
   b) Déterminer $d(N, G)$, la distance de N à l'espace vectoriel G.

PROBLEME 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ par $g(x, t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^1 g(x, t)dt$. On désigne par $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs et par $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs.

Partie 1

Détermination de la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall t \in [0, 1]$, $0 < e^{-x(1+t^2)} \leq e^{-x}$.
   b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}$.
   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\frac{\pi}{4}e^{-x} \leq f(x)$.
   d) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}e^{|u|}$, (on pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange).
   b) Montrer que $\forall (t, h) \in [0, 1] \times [-1, 1]$, $\left| e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1 + t^2) \right| \leq \frac{h^2}{2}e^2 \left(1 + t^2\right)^2$.
   c) En déduire que $\forall (x, t, h) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \times [-1, 1]$, $\left| g(x + h, t) - g(x, t) + he^{-x(1+t^2)} \right| \leq \frac{h^2}{2}e^2 e^{-x(1+t^2)} \left(1 + t^2\right)$.

??

d) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall h \in [-1, 1]$ tel que $h \neq 0$,
$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leq \frac{|h|}{2}e^2 \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,(1+t^2)\,dt.$

e) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$.

3. On considère les trois fonctions φ, ψ et ϕ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ et $\phi = \varphi + \psi$.

   a) Verifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et déterminer pour tout réel x, $\varphi'(x)$, avec φ' est la dérivée de φ sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

   c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{\pi}{4}$.

   d) En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$.

Partie 2

Par la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et θ la densité associée à X (on rappelle que θ est définie sur $\mathbb{R}$, par $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}}$).
On considère la fonction k définie sur $[0, +\infty[$, par $k(x) = P(-x \leq X \leq x)$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

1. a) Vérifier que θ est bien une densité.

   b) Vérifier que l'espérance de X est $E(X) = 0$ et la variance de X est $V(X) = 1$.

   c) Écrire un programme en Scilab qui détermine et affiche le plus petit entier naturel n tel que $(\sqrt{2\pi})\theta(n) \leq 10^{-6}$.

2. a) Montrer que pour tout réel positif x, $k(x) = 2\int_0^x \theta(t)dt$.

   b) Donner le tableau de variations de la fonction k sur $[0, +\infty[$.

   c) Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif a_α tel que $P(-a_\alpha \leq X \leq a_\alpha) = 1 - \alpha$.

   d) En déduire qu'il existe un unique réel strictement positif a_α tel que $P(0 \leq X \leq a_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

3. Soit $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\sigma > 0$, soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyen μ et de variance σ^2 (on note $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), c'est à dire que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par. pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_Y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}$. On pose $Y^* = \frac{Y-\mu}{\sigma}$.

   a) Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

   b) Vérifier que l'espérance de Y est $E(Y) = \mu$ et la variance de Y est $V(Y) = \sigma^2$.

   c) Montrer que pour tout réel positif β, $P(\mu - \beta\sigma \leq Y \leq \mu + \beta\sigma)$ ne dépend que de β.

   d) Écrire un programme Scilab, en utilisant la fonction grand, qui renvoie une matrice à une ligne et 100 colonnes qui simule la variable aléatoire Y, avec $\mu = 0.5$ et $\sigma = 1, 5$.

Partie 3

Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée. d'écart-type σ (c'est-à-dire $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$), le paramètre réel σ est strictement positif. Soit n un entier naturel non nul, on considère n variables aléatoires $T_1, \ldots, T_n$ qui sont indépendantes et de même loi que T. On pose $T^* = \frac{T^2}{2\sigma^2}$ et pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$. Pour tout réel strictement positif x, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. On rappelle qu'une loi gamma de paramètre ν, ν un réel strictement positif, notée $\gamma(\nu)$, a pour densité la fonction r définie par

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

-6/3

1. Montrer que la variable aléatoire T^* suit la loi $\gamma(\frac{1}{2})$.

[2+]. $\frac{-3t^2}{6} = \frac{-2t^2}{2}$

2. Déterminer une densité de la variable aléatoire S_n.

3. Soit n un entier naturel non nul, on considère la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$.

   a) Montrer que Z_n est un estimateur sans biais de σ^2.

   b) i) Justifier, pour tout entier naturel non nul n, l'existence de la variable aléatoire $\sqrt{Z_n}$.

   ii) Justifier, pour tout entier naturel non nul n, l'existence de $E(\sqrt{S_n})$, l'espérance de la variable aléatoire $\sqrt{S_n}$ et montrer que $E(\sqrt{S_n}) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

   iii) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, $E(\sqrt{Z_n})$, l'espérance de la variable aléatoire $\sqrt{Z_n}$, en fonction de n et de σ.

   iv) En déduire un estimateur $\widehat{\sigma_n}$ sans biais de σ.

PROBLEME 3

Par la suite du problème, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie 1

Soit Y une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 et soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que Y. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et $X_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Y.

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel strictement positif ε, $P(|X_n - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{n\varepsilon^2}$.

3. Soit n un entier naturel non nul et soit x un réel tel que $x \in [0,1]$. On suppose dans cette question que la variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètres n et x.

   a) i) Déterminer l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n en fonction de x.

   ii) Déterminer la variance $V(X_n)$ de X_n en fonction de x et de n.

   b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n - x| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

   c) En déduire que la variable aléatoire X_n converge en probabilité vers la variable aléatoire constante x.

   d) En utilisant la question Partie 1, 3. b), écrire un programme en Scilab qui détermine et affiche un entier naturel N tel que $P(|X_N - x| \geq 0.5) \leq 10^{-5}$.

Partie 2

Une urne contient 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne. On voudrait dans cette partie, déterminer à partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45?

Soit n un entier naturel non nul, on pose pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, Z_j la variable aléatoire égale à 1 si la $j^{ème}$ boule tirée est rouge, et 0 si la $j^{ème}$ boule tirée est noire. On pose pour tout entier naturel non nul n, $T_n = \sum_{j=1}^{n} Z_j$.

1. Justifier que pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, Z_j est la variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p à déterminer.

2. Déterminer pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, l'espérance $E(Z_j)$ et la variance $V(Z_j)$ de la variable aléatoire Z_j.

3. a) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n, $0,35 \leq \frac{T_n}{n} \leq 0,45 \Leftrightarrow \left|\frac{T_n}{n} - E(Z_1)\right| \leq 0,05$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $P\left(0,35 \leq \frac{T_n}{n} \leq 0,45\right) \geq 1 - \frac{96}{n}$.

4. Déterminer à partir de quel tirage, on a plus de 95% de chances d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre 0,35 et 0,45.

FIN DE L'ÉPREUVE

★ ★ ★ ★ ★