MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Notations et objectifs :

Lorsque r est un nombre réel strictement positif, on note :

$$A(r)=\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall k\in\mathbb{N}, \text{ la série } \sum n^k|a_n|r^n \text{ converge}\right\}$$

et $B(r)=\left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que la suite } (a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\right\}$.

Et à toute suite $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $f_a : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$.

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$.

Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a.

Dans la troisième partie, on obtient, dans le cas où $r>1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $\left(f_a^{(n)}(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie I – Premières propriétés et premiers exemples.

1- Soit r un nombre réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$, montrer que, pour tout nombre réel x de $[-r,r]$ et pour tout entier naturel k, la série $\sum n^k|a_n||x|^n$ converge. En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \le r'$, on a : $A(r') \subset A(r)$.

2- Vérifier également que : $0 < r \le r' \Rightarrow B(r') \subset B(r)$ et $A(r) \subset B(r)$

3- Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif r, $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

4- Exemples :

a- On souhaite montrer que, pour tout r réel strictement positif, la suite $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose pour tout entier naturel k : $u_n(k) = \frac{n^{k+2}r^n}{n!}$. En considérant le quotient $\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}$, montrer que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Conclure alors : $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r)$.

b- Pour λ réel strictement positif, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer les réels strictement positifs r pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$. Déterminer ensuite les réels r strictement positifs pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.

5- Soit ρ un réel strictement positif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrer que, pour tout réel r de $]0,\rho[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $A(r)$.

(On pourra penser à écrire : $n^k|a_n|r^n = |a_n|\rho^n n^k\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$.)

Partie II – Régularité de la fonction f_a

Dans cette partie R désigne un réel strictement positif et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

6- Vérifier que $f_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R,R[$ (on pourra utiliser la question 5).

7- Continuité de f_a :

a- Soit r un réel de $]0,R[$, x dans $[-r,r]$ et h un réel tel que : $x+h\in[-r,r]$, montrer que, pour tout entier naturel n : $\left|(x+h)^n - x^n\right| \le nr^{n-1}|h|$.

b- Justifier alors soigneusement que $\left|f_a(x+h)-f_a(x)\right| \le \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n\right)|h|$.

c- Montrer alors que f_a est continue sur $[-r,r]$ puis sur $]-R,R[$.

8- Caractère C^1 de f_a :

On considère ici un réel r de $]0,R[$ et x dans $[-r,r]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et, sous réserve d'existence : $g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$.

a- Soit ρ dans $[r,R[$. Justifier que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$, en déduire que g_a est définie et continue sur $]-R,R[$.

b- Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $S_n(x)=a_0+\int_0^x S_n'(t)\,dt$.

c- Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\left|\int_0^x \left(g_a(t)-S_n'(t)\right)dt\right| \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k$.

d- En déduire que : $f_a(x)=a_0+\int_0^x g_a(t)\,dt$.

e- Montrer alors que f_a est de classe C^1 sur $]-R,R[$ et que : $f_a'=g_a$.

9- Caractère C^∞ de f_a :

a- Soit r de $]0,R[$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout k de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\ge k}\binom{n}{k}|a_n|r^{n-k}$ converge.

b- Montrer que f_a est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et que, pour tout x de $]-R,R[$ et tout k de $\mathbb{N}$: $f_a^{(k)}(x)=k!\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_n x^{n-k}\right)$.

c- Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

10- Exemples :

a- On pose $\alpha=\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_\alpha : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Donner une expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $f_\alpha^{(k)}(1)$.

b- Soit λ un réel strictement positif, β la suite $\left(\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_\beta : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$. Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$. En déduire que, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout x de $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, la série $\sum_{n\geq k}\binom{n}{k}(\lambda x)^{n-k}$ converge et : $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$

Partie III – Une formule de réciprocité.

Dans cette partie, ***R* désigne un réel strictement supérieur à 1** et $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\geq 0$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$ et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel ρ strictement supérieur à 1 tel que la suite $\left(b_n\rho^n\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

11- Expression de a_0 :

a- Montrer que : $\forall N\in\mathbb{N},\ f_a(0)=\sum_{p=0}^{N}(-1)^p b_p + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\,dt$.

b- Démontrer que : $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)\,dt = 0$.

c- En déduire que la série $\sum_{p\geq 0}(-1)^p b_p$ converge et que : $a_0=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p b_p$.

12- Généralisation : On considère ici un entier naturel s fixé.

a- Montrer que : $\forall N\in\mathbb{N},\ f_a^{(s)}(0)=\sum_{p=0}^{N}(-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt$.

b- Vérifier que : $\forall N\in\mathbb{N},\ \left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt\right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\rho^{N+s+1}\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!}\frac{1}{\rho^{N+s+1}}$.

c- Déterminer $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)\,dt$.

d- Montrer alors que la série $\sum_{p\geq 0}(-1)^p\binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et : $a_s=\sum_{n=s}^{+\infty}(-1)^{n-s}\binom{n}{s} b_n$.

13- Cas particulier : on suppose dans cette question que $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\geq d+1 \;\Rightarrow\; a_n=0$.

a- Que peut-on dire de la fonction f_a ?

b- Montrer que la condition (H) est réalisée.

c- En déduire que, pour tout s de $[\![0,d]\!]$, $a_s=\sum_{n=s}^{d}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n$.

Partie IV – Applications aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X, on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=P(X=n)$, $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $G_X : x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, autrement dit : $G_X=f_a$.

14- Premiers résultats :

a- Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.

b- En déduire qu'il existe un réel R au moins égal à 1 tel que G_X soit définie et de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

15- Premier exemple :

a- On suppose tout d'abord que X suit une loi de Poisson de paramètre 1, déterminer la fonction G_X, vérifier qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout s de $\mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

b- On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que : $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et vérifiant : $G_X=f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout s de $\mathbb{N}$: $f_a^{(s)}(1)=1$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout n de $\mathbb{N}$. Quelle est la loi de X ?

16- Deuxième exemple : On considère ici un réel p dans $]0,1[$ et on note $q=1-p$.

a- On suppose que $X+1$ suit une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la suite $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la fonction G_X ; vérifier que G_X est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[$. Enfin, pour tout s de $\mathbb{N}$, calculer $G_X^{(s)}(1)$.

b- On suppose maintenant que : $p > \frac{1}{2}$. Vérifier que : $\frac{q}{p} < 1$.

On considère X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose de plus que : $G_X = f_a$ est définie et de classe C^∞ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, et pour tout s de $\mathbb{N}$: $\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s$. Justifier que l'hypothèse (H) du III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $X+1$?

17- Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :
On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $[\![0, d]\!]$ où d est un entier de $\mathbb{N}^*$.

On note Pol_d le sous-espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d. Pour s de $[\![0, d]\!]$, on note e_s la fonction $x \mapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s \in [\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.

On définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \mapsto 1 \text{ et pour tout } s \text{ de } [\![1, d]\!],\ H_s : x \mapsto \frac{x(x-1)\dots(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!}\prod_{k=0}^{s-1}(x-k).$$

a- Montrer que la famille $(H_s)_{s \in [\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.

On note Δ défini sur Pol_d par : $\forall P \in Pol_d, \Delta(P) : x \mapsto P(x+1) - P(x)$.

b- Vérifier que Δ est un endomorphisme de Pol_d.

c- Montrer que : $\Delta(H_0) = 0$ et encore : $\forall s \in [\![1, d]\!],\ \Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$.

d- Montrer que : $\forall P \in Pol_d,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{s=0}^{d} \left[\left(\Delta^s(P)\right)(0) \right] H_s(x)$.

e- En déduire que, pour tout k de $[\![0, d]\!]$ et pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$n^k = \sum_{s=0}^{d} \left[\left(\Delta^s(e_k)\right)(0) \right] H_s(n).$$

f- Montrer alors que, pour tout k de $[\![0, d]\!]$, l'espérance de X^k est :

$$E\left(X^k\right) = \sum_{s=0}^{d} \left[\left(\Delta^s(e_k)\right)(0) \right] b_s \quad \text{où} \quad b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

g- Exemple : on suppose ici que : $d = 2$, $E(X) = 1$ et $E(X^2) = \frac{3}{2}$. Déterminer b_0, b_1 et b_2, puis a_0, a_1 et a_2. Reconnaître la loi de X.