Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2019

MATHEMATIQUES I

DUREE : 2 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 14 questions totalement indépendantes.

Question 1 : Pour tout $n \in IN^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$

La suite (S_n) converge vers :

A) $\frac{1}{4}$ B) $\ln 3$ C) $\ln 2$ D) $2 - \ln 2$ E) Autre réponse

Question 2 : Soit 2 dés à six faces non pipés (les faces sont équiprobables et tous les lancers sont indépendants).
Le dé A a pour faces 1 ; 5 ;1 ;5 ;1 ;5.
Le dé B a pour faces 2 ; 6 ;2 ;6 ;2 ;2.
Lorsque deux joueurs s'affrontent, ils lancent chacun un dé (les deux dés étant différents). Le gagnant est celui dont la face du dessus du dé comporte le chiffre le plus grand.

Si Anouar joue avec le dé A, et Karim joue avec le dé B, alors Karim a une probabilité de gagner égale à :

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) Autre réponse

Question 3 : Calculer $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{e^{-x}}{x} dx$

A) $\ln 2$ B) $\frac{1}{4}$ C) $2\ln 3$ D) e E) Autre réponse

Question 4 : Deux cyclistes A et B font une course sur un parcours donné. Si A est en tête au kilomètre (n-1), il sera encore en tête au kilomètre n avec la probabilité a. De même si B est en tête au kilomètre (n-1), il sera encore en tête au kilomètre n avec la probabilité b.

On désigne par p_n la probabilité que le cycliste A soit en tête au kilomètre n. On a alors :

A) $p_n = (a+b)p_{(n-1)} + (1-b)$ B) $p_n = (a+b-1)p_{(n-1)} + (1-b)$

C) $p_n = (a-b+1)p_{(n-1)} + (1-b)$ D) $p_n = (a+b-1)p_{(n-1)} + (1-b+a)$

E) Autre réponse

Question 5 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}(1+e^x)} dx$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A) $\ln 2$ B) 0 C) e^2 D) $2\,e$ E) Autre réponse

Question 6 : On pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$

Il existe une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1} sous la forme :

A) $J_{n+1} = \frac{3n+1}{3n+3} J_n$ B) $J_{n+1} = \frac{3n+1}{3n-3} J_n$. C) $J_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} J_n$ D) $J_{n+1} = \frac{3n+1}{n+3} J_n$

E) Autre réponse

Question 7 : Pour tout réel a positif et tout entier naturel k , on pose :

$I_k(a) = \int_0^a t^k\, e^{-t}\, dt$

On a alors $I_{k+1}(a) =$

$A)\ k\, I_k(a) - a^k\, e^{-a}$ $B)\ (k+1)\, I_k(a) - a^{k+1}\, e^{-a}$ $C)\ (k+1)\, I_k(a) - a^k\, e^{-a}$

$D)\ k\, I_k(a) - a^{k+1} e^{-a}$ *E) Autre réponse*

Question 8 : L'épreuve de Mathématiques I du concours d'entrée à la Grande Ecole du Groupe ISCAE de la session de mai 2018 se présente sous la forme d'un questionnaire à choix multiples (QCM) comportant 14 questions . Pour chaque question , on propose 5 réponses possibles . Il y a une seule bonne réponse par question . Un candidat a la possibilité de répondre ou de ne pas répondre à une question donnée.

Le nombre de façons de répondre à ce questionnaire est égal à :

$A)\ 5^{14}$ $B)\ 14^5$ $C)\ 6^{14}$ $D)\ C_{14}^5 = \frac{14!}{9!\,5!}$ *E) Autre réponse*

Question 9 : On considère les matrices M et P suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit T la matrice définie par : $T = P^{-1} M P$, *où* P^{-1} est la matrice inverse de P .

La matrice T^3 est alors égale à :

$A) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B) \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C) \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

Question 10 : On considère la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in R \quad , \quad h(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La probabilité conditionnelle $p_{(X \leq 2)}(X \geq 1)$ est égale à :

A) $\dfrac{2e^{-1} - e^{-2}}{1 - e^{-2}}$ B) $\dfrac{e^{-1} - 3e^{-2}}{1 - 2e^{-2}}$ C) $\dfrac{2e^{-1} - 3e^{-2}}{1 - 3e^{-2}}$ D) $\dfrac{e^{-1} - e^{-2}}{1 - 3e^{-2}}$

E) *Autre réponse*

Question 11 : Soit $(a,b) \in]0\,;1[^2$. On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il a la probabilité a d'être en panne à l'instant $n+1$;
- si l'appareil est en panne à l'instant ($n \in \mathbb{N}$), il a la probabilité b d'être en panne à l'instant $n+1$.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n =$

A) $\dfrac{1-a}{1-b+a}$ B) $\dfrac{1-b}{1-b+a}$ C) $\dfrac{1+b}{1+b+a}$ D) $\dfrac{1+a}{1+b+a}$ E) Autre Réponse

Indication : On commencera par chercher une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

Question 12 : On lance n ($n \in \mathbb{N}^*$) fois de suite un dé équilibré à 6 faces numérotées 1, 1, 2, 2, 3, 3. On note p_n la probabilité que les trois chiffres 1,2 et 3 apparaissent chacun au moins une fois au cours des n lancers.

$p_n =$

A) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ B) $2\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$ C) $3\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$ D) $1 - 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

E) Autre Réponse

Indication : On pourra considérer les évènements A_i = "Le numéro i n'apparaît pas durant les n lancers" (i=1, 2, 3), et exprimer l'évènement souhaité en fonction des A_i.

Question 13 : Soit $m\in\mathbb{R}^*$. On pose $A=\begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$; Pour tout entier naturel n,

$A^n =$

A) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & 3m(2^n-1) & 3m^2(2^n-1) \\ \frac{3(2^n-1)}{m} & 2^n+2(-1)^n & 3m(2^n-1) \\ \frac{3(2^n-1)}{m^2} & \frac{3(2^n-1)}{m} & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$ B) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n+1 & m(2^{n+1}-2) & m^2(2^{n+1}-2) \\ \frac{(2^{n+1}-2)}{m} & (-1)^n+1 & m(2^{n+1}-2) \\ \frac{(2^{n+1}-2)}{m^2} & \frac{(2^{n+1}-2)}{m} & (-1)^n+1 \end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3^n+3(-1)^n & m(2^{n+2}-4) & m^2(2^{n+2}-4) \\ \frac{(2^{n+2}-4)}{m} & 3^n+3(-1)^n & m(2^{n+2}-4) \\ \frac{(2^{n+2}-4)}{m^2} & \frac{(2^{n+2}-4)}{m} & 3^n+3(-1)^n \end{pmatrix}$

D) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n+2(-1)^n & m(2^n+(-1)^{n+1}) & m^2(2^n+(-1)^{n+1}) \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{m} & 2^n+2(-1)^n & m(2^n+(-1)^{n+1}) \\ \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{m^2} & \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{m} & 2^n+2(-1)^n \end{pmatrix}$ E) Autre Réponse

Indication : On pourra considérer les matrices $B=\frac{1}{3}(A+I)$ et $C=\frac{-1}{3}(A-2I)$ pour commencer à calculer BC, B^n, et C^n pour tout $n\in\mathbb{N}$; puis on exprimera A en fonction de B et C, pour en déduire l'expression de A^n.

Question 14 : Un concierge possède un trousseau de 10 clefs semblables dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Chaque jour, il doit ouvrir cette porte. Le choix d'une clé du trousseau se fait complètement de manière aléatoire et équiprobable. Chaque jour, il doit faire un certain nombre d'essais jusqu'à ouvrir la porte.

Quand le concierge n'est pas ivre, les essais ont lieu sans remise, et le concierge essaye les clefs une à une jusqu'à ouvrir la porte. Par contre quand celui-ci est ivre, les essais ont lieu avec remise,

On suppose que le concierge est ivre un jour sur 3.

Sachant qu'un certain jour, 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour-là est

A) $\frac{9^7}{3\times10^7+9^7}$ B) $\frac{9^7}{2\times10^7+9^7}$ C) $\frac{8^7}{2\times9^7+8^7}$ D) $\frac{9^7}{2\times8^7+9^7}$ E) Autre Réponse

Indication : On pourra considérer l'évènement H="Le concierge est ivre" et la variable aléatoire X="Nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte". On cherchera les lois conditionnelles de X par rapport à H et au contraire de H.