Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2018

MATHEMATIQUES I

DUREE : 2 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 14 questions totalement indépendantes.

233

Question 1 Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, suivant toutes la même loi que X et on note Zn la variable aléatoire définie par : Zn = sup $(X_1, X_2, \ldots X_n)$.

L'espérance de la variable Z_n est égale à :

A/ $\frac{4n}{2n+1}$ B/ $\frac{2n}{n+1}$ C/ $+\infty$ D/ $\frac{n}{2}$ E/ Autre réponse

Question 2 Soient m $\in \mathbb{R}$ et (E_m) l'équation de la variable réelle x : $e^x - e^{-x} - 4m = 0$. L'ensemble des solutions de (E_m) est :

A) $\left\{Log(m+\sqrt{4m^2+1})\right\}$ B) $\left\{Log(m+\sqrt{4m^2+1}), Log(m+2\sqrt{4m^2+1})\right\}$ C) $\left\{Log(2m+\sqrt{4m^2+1})\right\}$

D) $\left\{Log(2m+2\sqrt{4m^2+1})\right\}$ E) Autre Réponse

Log désigne le logarithme népérien.

Question 3 Pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$f_n(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^n} dt$$

La limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à :

A/ 0 B/ $\frac{2}{(n-1)^2}$ C/ $\frac{1}{(n-1)^2}$ D/ $\frac{1}{2}$ E/ Autre réponse

Question 4

Sur un trajet , on fait 60 Km/h à l'aller et 30 Km/h au retour . La vitesse moyenne est alors :

A) 45 Km/h B) 35 Km/h C) 50 Km/h D) 40 Km/h E) Autre réponse

Question 5 Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes . On considère les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 définies par :

X_1 est le temps , exprimé en heures , écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne ;

X_2 (respectivement X_3) est le temps , en heures , écoulé entre la remise en route de la machine après la première (respectivement deuxième) panne et la panne suivante .

Après la troisième panne , l'utilisation de la machine est suspendue .

On suppose que les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Soit l'événement :

E = " chacune des 3 périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures " .

La probabilité de E est alors égale :

A) e^{-3} B) $e^{-\frac{1}{2}}$ C) $e^{-\frac{3}{2}}$ D) $e^{-\frac{3}{4}}$ E) Autre réponse

Question 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{\left(1+x^n\right)\sqrt[n]{1+x^n}}\,dx$$

$I_n =$

A) $\sqrt{2}$ B) $\ln\sqrt{2}$ C) $\sqrt[n]{2}$ D) $1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ E) Autre réponse

Question 7 Soient $m \in \mathbb{R}$ et (E_m) l'équation de la variable réelle x : $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} - m = 0$. (E_m) n'admet pas de solution si et seulement si

A) $m \in]-\infty;-1]$ B) $m \in [1;+\infty[$ C) $m \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$ D) $m \in]-1\,;+1[$ E) Autre Réponse

Question 8 On considère les matrices P et Q à coefficients réels définies par :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{4}(I+P)$$

Où I désigne la matrice unité d'ordre 3

Pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n tels que $Q^n = a_n I + b_n P$ avec :

A) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \\ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}b_n \end{cases}$ B) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + b_n \end{cases}$ C) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + b_n \end{cases}$ D) $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + b_n \end{cases}$ E) Autre réponse

Question 9 On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ et pour tout $n \geq 1$,

$u_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 0 D) $4\sqrt{2}$ E) Autre réponse

Question 10 On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Après avoir déterminé a et b tels que $A^2 = aA + bI$ où I désigne la matrice unité d'ordre 3, on montre que $A^{-1} = cA + dI$ avec :

A) $\begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$ B) $\begin{cases} c = -\frac{1}{4} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$ C) $\begin{cases} c = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$ D) $\begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{4} \end{cases}$ E) Autre réponse

Question 11 Soit $(u_n)_{n \in IN}$ la suite définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k^2}{3^k}$.

$\lim_{n \to +\infty} S_n =$

A) $-\frac{3}{32}$ B) $-\frac{3}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 0 E) Autre réponse

Question 12 L'ensemble des solutions de l'inéquation : $\ln x - 2 + \frac{1}{\ln x} \succ 0$, où ln désigne le logarithme népérien , est :

A) $]1,+\infty[$ *B)* $]0,1[$ *C)* $]e,+\infty[$ *D)* $]1,e[\cup]e,+\infty[$ *E) Autre réponse*

236

Question 13 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\dfrac{1}{1+e^{u_n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$

A) 0 B) $l \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ C) $\frac{1}{2}$ D) $l \succ \frac{1}{2}$ E) Autre Réponse

Si le nombre l existe, on ne sera pas obligé de le calculer.

Indication : On pourra considérer la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ dont on calculera la dérivée f', et on remarquera que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-\varphi(e^{-x})$ où φ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$ dont on trouvera un maximum absolu sur $\mathbb{R}_+$. On appliquera, par la suite, l'inégalité des accroissements finis à la variation de f entre u_n et un nombre réel particulier que l'on identifiera.

Question 14 Soient n un entier naturel non nul et X_n la variable aléatoire réelle dont la densité de probabilité est la fonction f_n de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \prec 0 \\ a_n & \text{si } 0\le x\le 1 \\ \dfrac{a_n}{x^{n+1}} & \text{si } x \succ 1 \end{cases}$$

, où a_n est un réel que l'on pourra éventuellement calculer.

La médiane de X_n est

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}$ C) $\frac{n+1}{n+2}$ D) $\left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ E) Autre Réponse

937