Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2017

MATHEMATIQUES I

DUREE : 2 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.

4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.

5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.

6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 14 questions totalement indépendantes.

229

Question 1 Soit $I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$. I est alors égale à :

A) $1 - \frac{3}{e}$ B) $2 - \frac{5}{e}$ C) $2 - \frac{1}{e}$ D) $1 - \frac{4}{e}$ E) Autre réponse

Question 2 Une roue de loterie munie d'un index fixe est divisée en secteurs de mêmes dimensions et de différentes couleurs. Le jeu consiste à miser 5 dirhams, à faire tourner la roue et à noter la couleur du secteur désigné par l'index à l'arrêt de la roue. On admet que chaque secteur a la même probabilité d'apparaître. La roue comporte :

- n secteurs rouges qui font perdre la mise (gain du joueur : −5 Dirhams) ;
- 6 bleus où l'on reçoit 5 Dirhams (gain du joueur nul) ;
- 3 verts où l'on reçoit 20 Dirhams;
- 1 jaune où l'on reçoit 100 Dirhams.

Le propriétaire de la roue désire gagner en moyenne au moins 15% des sommes misées.
Le nombre minimum n de secteurs rouges que doit comporter la roue pour satisfaire le propriétaire est :

A) 13 B) 32 C) 34 D) 31 E) Autre réponse

Question 3 On considère une succession de sacs qu'on désigne par $S_1, S_2, \dots, S_n \dots$
Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On tire au hasard un jeton du sac S_1 que l'on place dans le sac S_2. Puis, on tire au hasard un jeton du sac S_2, que l'on place dans le sac S_3, et ainsi de suite.
On note B_k l'événement : « le jeton tiré du sac S_k est blanc », et $p_k = P(B_k)$ sa probabilité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $q_n = p_n - \frac{1}{2}$.

Après avoir établi une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, on montre que :

A) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{4}$

B) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{3}$

C) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$

D) La suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique et la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{3}$

E) Autre réponse

Question 4 Soient $m \in \mathbb{R}$ et (E_m) l'équation de la variable réelle x : $e^x + e^{-x} - m = 0$. (E_m) n'admet pas de solution si et seulement si

A) $m \prec 2$ B) $m \leq 2$ C) $m \prec 1$ D) $m \leq 1$ E) Autre Réponse

Question 5 Une urne contient 10 boules blanches et 2 boules noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule blanche.

On désigne alors par X la variable aléatoire égale au nombre total de boules prélevées. La variance de X est égale à :

A) 0 B) $\frac{65}{363}$ C) $\frac{3}{22}$ D) $\frac{65}{77}$ E) Autre réponse

Question 6 On lance trois fois de suite une pièce équilibrée . Soient X la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier jet donne « pile » et 0 sinon , et Y la variable aléatoire égale au nombre de « face » obtenu .
Le coefficient de corrélation de X et de Y est alors égal à :

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *B)* $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ *C)* $\frac{1}{\sqrt{5}}$ *D)* $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ *E) Autre réponse*

Question 7 Soit A, J et I les trois matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix} \quad ; \quad J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \quad ; \quad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

En déterminant les deux réels a et b tels que $A=aJ+\mathrm{b}I$, montrer que la matrice A^n est égale à :

A) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4^n & 3(4)^n\\3(4)^n & 4^n\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1 & 3^n\\3^n & 1\end{pmatrix}$

C) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4^n+(-2)^n & 4^n-(-2)^n\\4^n-(-2)^n & 4^n+(-2)^n\end{pmatrix}$ D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2^n & 3(2)^n\\3(2)^n & 2^n\end{pmatrix}$ E/ Autre réponse

Question 8 Soient
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto xe^{-x}$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des points d'inflexion de $(\mathscr{C})$ est :

A) $\varnothing$ B) $\left\{(1;\frac{1}{e})\right\}$ C) $\left\{(1;\frac{1}{e}),(2;\frac{2}{e^2})\right\}$ D) $\left\{(2;\frac{2}{e^2})\right\}$ E) Autre Réponse

Question 9 On dispose de n urnes ($n\geq 2$) , numérotées de 1 à n , et telles que , pour tout k élément de { 1 , 2 , … , n } , l'urne numérotée k contient k boules blanches et ($n-k$) boules noires . On choisit une urne au hasard , on en extrait une boule et on constate qu'elle est blanche .
La probabilité que cette boule provienne de l'urne numérotée 1 est égale à :

A) $\frac{n}{n+1}$ *B)* $\frac{2}{n\,(n+1)}$ *C)* $\frac{n^2}{n+1}$ *D)* $\frac{(n+1)(n+2)}{3}$ *E) Autre réponse*

Question 10 Soient
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto xe^{-x}$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé de l'espace affine $\mathbb{R}^2$. On désigne par a un nombre réel quelconque strictement positif. On note I(a) l'aire de la partie de $\mathbb{R}^2$ comprise entre $(\mathscr{C})$ et l'axe des abscisses pour une abscisse comprise entre -1 et a.

$\lim_{a\to+\infty} \mathrm{I}(a)=$

A) $+\infty$ B) e C) 1 D) 2 E) Autre Réponse

231

Question 11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(\ln 2)(1+ax)} & \text{si } 0 \prec x \leq 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

a étant un nombre réel.

En admettant que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $]0,1]$, on montre que la variance de X est égale à :

A) $\dfrac{1}{2\ln 2}(\ln 2-2)$ B) $\dfrac{1}{2(\ln 2)^2}(3\ln 2-2)$ C) $\dfrac{1}{2(\ln 2)^2}(\ln 2-2)$

D) $\dfrac{1}{2(\ln 2)^3}(\ln 2-2)$ E) Autre réponse

Question 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on pose :

$$I_n = \int_1^e t(\ln t)^n\,dt$$

Pour tout entier naturel n, il existe une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} sous la forme :

A) $I_n=\dfrac{e^4-nI_{n-1}}{4}$ B) $I_n=\dfrac{e-I_{n-1}}{4}$ C) $I_n=\dfrac{e-nI_{n-1}}{4}$ D) $I_n=\dfrac{e^2-nI_{n-1}}{2}$ E) Autre réponse

Question 13 On considère le système suivant :

$$\begin{cases}2x+3y+z=4\\ -x+my+2z=5\\ 7x+3y+(m-5)z=7\end{cases}$$ *où* m est un paramètre réel.

Pour quelle valeur de m le système est incompatible (n'admet pas de solutions) ?

A) $\dfrac{1}{6}$ B) 6 C) 2 D) 1 E) Autre réponse

Question 14 On note pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\dfrac{n^n}{n!}$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

La limite de la suite (v_n) est alors :

A) $\dfrac{1}{2}$ *B)* $\dfrac{e-1}{e}$ *C)* e *D)* 0 *E) Autre réponse*

232