Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2016

MATHEMATIQUES I

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.

4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.

5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.

6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

223

Question 1: Une étude portant sur un parc automobile conduit aux résultats suivants :

- Lorsqu'on choisit au hasard un véhicule du parc, la probabilité qu'il présente un défaut de freinage est de 0,67.
- Lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule présentant un défaut de freinage, la probabilité qu'il présente aussi un défaut d'éclairage est de 0,48.
- Lorsqu'on choisit au hasard dans ce parc un véhicule ne présentant pas de défaut de freinage, la probabilité qu'il ne présente pas non plus de défaut d'éclairage est de 0,75.

La probabilité qu'un véhicule choisi au hasard présentant un défaut d'éclairage présente aussi un défaut de freinage est alors approximativement égale à :

A) 70% B) 80% C) 40% D) 32% E) Autre réponse

Question 2: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{u_n - 6}{u_n - 4}$

On définit à partir de cette suite, deux nouvelles suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\ w_n = (1+2^n)u_n \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n = \sum_{p=0}^{n} w_p \end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{S_n}{2^n}\right) =$

A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre Réponse

Indication : On pourra commencer par considérer la fonction $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R}\setminus\{4\} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{x-6}{x-4} \end{vmatrix}$

pour étudier ses variations sur l'intervalle [2 ; 3] de $\mathbb{R}$. Puis on pourra poser

$(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 3}$ et étudier le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Question 3: Une urne contient des boules blanches , noires et rouges . Les proportions respectives de ces boules sont p pour les blanches , q pour les noires et r pour les rouges (p + q + r = 1).
On fait dans cette urne des tirages successifs indépendants numérotés 1 , 2 , ... etc . Ces tirages sont faits avec remise de la boule tirée . Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience .
Soit , pour n entier strictement positif , Z_n la variable aléatoire qui prend la valeur +1 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule blanche est tirée , -1 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule noire est tirée , 0 si au $n^{\text{ième}}$ tirage une boule rouge est tirée .
On note : $S_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$.
La variance de S_n est alors égale à :

A) $n\,(r-(p+q)^2)$ B) $\frac{r-(p-q)^2}{n}$ C) $n\,(1-pqr)$ D) $n\,(1+pqr)$

E) *Autre réponse*

224

Question 4: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{3^n}$

On définit une nouvelle suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit : $(\forall n \in \mathbb{N})\ T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{T_n}{n+1}) =$

A) 0 B) 1 C) 2 D) $+\infty$ E) Autre Réponse

Question 5 Latifa et Amal jouent à un jeu de société dans lequel il y a forcément un gagnant. Les deux joueuses ont la même probabilité de gagner la première partie. En revanche, si Latifa gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,7 ; par contre si elle perd, la probabilité qu'elle perde la suivante est de 0,9.
Latifa et Amal jouent plusieurs parties. On note G_n l'évènement « Latifa gagne la nième partie » et p_n la probabilité correspondante.

$\lim_{n\to+\infty} p_n =$

A) 0,5 B) 0,6 C) 0,25 D)0,3 E) Autre réponse

Indication : On pourra déterminer la nature de la suite $v_n = p_n - 0,25$

Question 6 Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \prec 3 \\ \dfrac{a-1}{x\ln^2(x)} & si\ x \geq 3 \end{cases}$

où $a \in IR$.

Pour que f soit une densité de probabilité, la valeur de a est égale à :

A/ $3 + \ln 3$; B/ $\frac{1}{\ln 3}$; C/ $\ln 3 + 1$; D/ $\ln 3 - 1$;
E/ Autre réponse

Question 7: Pour x nombre réel strictement supérieur à ln2, on définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2e^{-nx}$. De plus, on désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $(\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. En posant $S = \lim_{n\to+\infty}(S_n)$,

$S - 2x =$

A) $\frac{4}{1-e^{-x}}$ B) $\frac{2}{1-e^{-x}}$ C) $\frac{1}{1-e^{-x}}$ D) $\frac{2}{e^x - 1}$ E) Autre réponse

Indication : On pourra commencer par trouver une suite $(v_n = ae^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ (où a est un coefficient à calculer) qui vérifie $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 2e^{-nx}$

225

Question 8: Un organisme de voyages fait une étude sur le choix des vacances. Ce choix porte sur le Maroc et l'étranger.

Si la n-ième année, le client a choisi le Maroc, la probabilité de choisir l'étranger l'année suivante est $\frac{7}{10}$.

Si la n-ième année, le client a choisi l'étranger, la probabilité de choisir le Maroc l'année suivante est $\frac{2}{5}$.

On note M_n l'événement « le client a choisi le Maroc la n-ième année » et p_n la probabilité de l'événement M_n.

L'expression de p_{n+1} en fonction de p_n est donnée par :

A) $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{10}p_n$ B) $p_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}p_n$ C) $p_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}p_n$ D) $1 - \frac{1}{2}p_n$

E) Autre réponse

Question 9: Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité de probabilité φ est définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1-|x| & si\ x \in [-1,1] \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

Soit G_X la fonction de répartition de X . On a alors : $G_X(\frac{1}{5}) =$

A) $\frac{6}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{17}{25}$ D) $\frac{3}{8}$ E) Autre réponse

Question 10: Dans une entreprise comptant 600 personnes, la répartition de la catégorie socio professionnelle (CSP) entre Agents (A), techniciens (T) et cadres (C), selon le sexe, homme (H) ou femme (F) est donnée par le tableau suivant ci- dessous :

CSP / Sexe	Ouvriers	Techniciens	Cadres	Total
Homme	204	108	36	348
Femme	96	72	84	252
Total	300	180	120	600

Indépendamment de la CSP ou du sexe de l'employé, l'entreprise évalue à 0,25 la probabilité que son personnel se rende chaque jour au travail à bicyclette. Si on interroge au hasard une personne de l'entreprise, la probabilité de choisir un cadre homme venant à bicyclette est de :

A) 0.015 B) 0,05 C) 0,15 D) 0,025 E) Autre réponse

Question 11 : On jette deux dés non pipés, l'un bleu, l'autre rouge.
Les faces de chacun des deux dés sont numérotées de 1à 6.
On note a la face apparente du dé bleu, et b celle du dé rouge.
On considère l'équation du second degré :
(E) : $x^2-2ax+b^2=0$
Si (E) a deux racines distinctes, la probabilité que l'une soit égale à 1 est :

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{1}{5}$ E) Autre réponse

Question 12 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$ et on définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 3\dfrac{n!(n+1)!}{(2n+3)!\,I_n} \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty} (S_n) =$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) $+\infty$ E) Autre Réponse

Indication : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra commencer, à l'aide d'une intégration par parties, par trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.

Question 13 : On considère l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et la partie F de E définie par $F = \{2,4,6,7\}$.
Le nombre de parties X de E telles que $F \cup X = F$ est égal à :

A) 12 B) 16 C) 4 D) 8 E) Autre réponse

Question 14 : Soient les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad J = A - 2I$$

Pour tout entier naturel n, A^n est égale à :

A) $2^n I + n2^{n-1} J$ B) $2I + n2^{n-1} J$ C) $2^n I + J$ D) $2^n I + (2n-1)2^{n-1} J$
E) Autre réponse

Question 15 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

On considère toutes les matrices $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telles que det (A + B) = det A + det B .

Les coefficients x , y , z et t de B vérifient alors la condition :

A) $x + y + z + t = 0$ B) $x - y + 3z + t = 0$ C) $2x + y + 3z - t = 0$
D) $2x + y + 3z + 2t = 0$ E) Autre réponse

Question 16 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$ de courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et d'asymptote la droite Δ d'équation $y = x$.

Soit $\alpha > 0$. On désigne par A (α) l'aire délimitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équation : $x = 1$ et $x = \alpha$.
A l'aide d'une intégration par partie, on montre que A (α) est égale à :

A) $1 - \ln(\alpha)$ B) $\frac{2}{3}(1 - \ln(\alpha))$ C) $1 - \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}$

D) $1 - \dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha}$ E) Autre réponse

Question 17: Deux escargots A et B font la course sur une feuille de salade infinie .On sait que si A est en tête au centimètre n-1 , il le sera à nouveau au centimètre n avec la probabilité a ; de même si B est en tête au centimètre n-1 , il le sera au centimètre n avec la probabilité b .
On suppose qu'il n'y a jamais égalité au bout d'un nombre entier de centimètres . On note p_n la probabilité que A soit en tête au centimètre n .
Une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} est :

A) $p_n = (a+b)\,p_{n-1} + b$ B) $p_n = (a+b-1)\,p_{n-1} + (1-b)$ C) $p_n = (a+b-2)\,p_{n-1} + b$
D) $p_n = (a+b)\,p_{n-1} + (1-b)$ E) Autre réponse

Question 18 : Pour $n \in IN^* - \{1\}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$ est égale à :

A) $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ B) $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \ln 2\right)$ C) $(-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$

D) $(-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right)$ E) Autre réponse

Indication : On pourra utiliser pour $x \in [0,1]$ *et* $n \in IN^* - \{1\}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

Question 19 : Soit n un entier supérieur ou égale à 2. Une urne contient n boules rouges et n boules blanches. On effectue dans cette urne le tirage simultané de 3 boules. On désigne par p_n la probabilité d'obtenir les deux couleurs.
$\lim\limits_{n \to +\infty} (p_n) =$

A) $+\infty$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) Autre Réponse

Question 20 : On définit une fonction f de la variable réelle t par :
$f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ *pour* $t \neq 0$
f peut être prolongée par continuité en 0 en posant :

A) $f(0) = \dfrac{1}{e}$ *B)* $f(0) = \dfrac{1}{e-1}$ *C)* $f(0) = \dfrac{1}{1-e}$ *D)* $f(0) = 1$ *E) Autre réponse*