Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2015

MATHEMATIQUES I

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: – 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

2 17

Question 1: Soit X une variable aléatoire réelle dont la loi de probabilité est définie par :

$\forall k \in IN \ , \ P(X=k)=a(\frac{k^2+1}{k!})$; où a est un nombre réel strictement positif.

La valeur de a est égale à :

A) $\frac{1}{3e}$; B) $\frac{1}{e}$; C) $2\ln 2$; D) $\frac{1}{2}$; E) Autre réponse

Question 2: La durée de vie d'un certain type de composants électroniques, exprimée en centaine d'heures, est une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F est définie sur IR par :

$$F(x)=\begin{cases}(1-e^{-x})^2 & si \quad x\geq 0\\ 0 & sinon\end{cases}$$

La durée de vie moyenne en heures de ce type de composant est égale à :

A) 100 ; B) 200 ; C) 150 ; D) 120 ; E) Autre réponse

Question 3: On considère le système linéaire suivant :

$$(S)\begin{cases}ax+y+z=0\\ x+ay+z=0\\ x+y+az=0\end{cases}$$

où $a \in$ IR.

Pour quelle (s) valeur (s) de a le système (S) admet une infinité de solutions ?

A) $a \in \{-2 , 1\}$; B) $a=\frac{3}{2}$; C) $a \in \{-1 , \frac{1}{2}\}$; D) $a \in \{-\frac{1}{2} , 0 , 2\}$; E) Autre réponse

Question 4: On considère la suite $(u_n)_{n\in IN^*}$ définie par :

$$u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+p}}$$

La suite $(u_n)_{n\in IN}$ converge vers :

A) $\frac{1}{2}$; B) $\sqrt{2}$; C) $\frac{3}{2}$; D) 1 ; E) Autre réponse

Question 5: $\int_0^1 \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt =$

A) $\frac{(\ln 2)^2}{4}$; B) e^2-1 ; C) $\frac{1}{2}(\ln 2-1)$; D) $\frac{1}{2}$; E) Autre réponse

Question 6: Soient a un nombre réel supérieur ou égal à -2, et $U_a = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = a$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

On désigne par E l'ensemble $\{a \in [-2;+\infty[; U_a \text{ strictement décroissante}\}$.

E =

A) $\varnothing$ B) $[-2;+\infty[$ C) $[-1;+\infty[$ D) $]2;+\infty[$ E) Autre réponse

Indication: On pourra remarquer que:

$$f : [-2;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{x+2}$$

est strictement croissante et commencer par résoudre l'inéquation $\sqrt{x+2} \prec x$

Question 7: Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert contenant un nombre réel x. On suppose que f est dérivable en x, de dérivée $f'(x)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} =$$

A) $f'(x)$ B) $2f'(x)$ C) $\frac{1}{2}f'(x)$ D) 0 E) Autre réponse

Question 8: Soit P la fonction polynomiale réelle à une seule variable réelle, de degré 3, dont la courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ passe par les points A, B, C, et D de coordonnées respectives (-1;-60), (2;6), (3;-4), et (4;10).

L'ordonnée du point E de ($\mathscr{C}$) d'abscisse 1 est:

A) -10 B) 15 C) 16 D) -30 E) Autre réponse

Question 9: La somme de 100DH est obtenue à l'aide de pièces de 1DH, 2DH, 5DH, et de 10DH. Il y a en tout 32 pièces. Il y a autant de pièces de 1DH que de pièces de 10DH et de 2DH réunies. Et il y a une pièce de 1DH de plus que de pièces de 5DH et de 10DH réunies.

On désigne par n_1 (respectivement n_2, n_3, n_4) le nombre de pièces de 1DH (respectivement 2DH, 5DH, 10DH).

$$5n_1 + 8n_2 + 5n_3 + 2n_4 =$$

A) 177 B) 178 C) 179 D) 180 E) Autre réponse

219

Question 10: Soient x et y deux nombres réels quelconques et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 3 suites réelles définies par $(u_0, v_0, w_0) = (x, y, -x)$ et

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} 4u_{n+1} = v_n - 3w_n \\ 4v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 3w_n \\ 4w_{n+1} = -4u_n - v_n - w_n \end{cases} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n - 2w_n) =$$

A) $\frac{1}{4}(x+y)$ B) $x+y$ C) $2(x+y)$ D) $4(x+y)$ E) Autre réponse

<u>Indication</u>: On pourra considérer les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, puis calculer $P^3 - P^2 - 4P$ et $P^{-1}AP$

Question 11 : Une sauterelle se déplace toutes les minutes d'un sommet à l'autre de sa cage qui a la forme d'un tétraèdre dont les quatre sommets sont notés A,B, C et D. Elle reste exactement une minute au même endroit.
Quand elle est au sommet A, elle a autant de chance d'aller sur les trois autres sommets.
Quand elle est au sommet B, elle ne se rend que sur les sommets A et D, de façon équiprobable.
Quand elle est au sommet C, elle ne se rend que sur les sommets A et B, et elle choisit A avec une probabilité égale à 1/3.
Quand elle est au sommet D, elle choisit A, B ou C avec les probabilités respectives 1/2, 1/4 et 1/4. A l'instant 0 où on met la sauterelle dans sa cage, celle-ci se trouve en A.
On note A_n (respectivement B_n, C_n, et D_n) l'événement "la sauterelle est au sommet A (respectivement B,C et D) au bout de n minutes".
On note a_n (respectivement b_n, c_n et d_n) la probabilité de l'évènement A_n (respectivement B_n, C_n et D_n).
On considère le vecteur- ligne de $\mathbb{R}^4$: $X_n = (a_n \quad b_n \quad c_n \quad d_n)$
On a alors : $X_{n+1} = X_n * M$ où M est la matrice carrée d'ordre 4 suivante :

A) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

220

Question 12 : Soit $p \in]\,0\,,1\,[$. On note $q = 1 - p$.
Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. A chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres. Soit W la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.
L'écart-type de W est alors égal à:

$A)\ \sqrt{npq}$ $\quad B)\ q\sqrt{n\,(1-q^2)}$ $\quad C)\ \sqrt{npq(1-pq)}$ $\quad D)\ \sqrt{n\,(1-p^2)(1-q)}$

E) Autre réponse

Question 13 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

La courbe représentative (C) de f admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives:

A) 2 et -2 B) 1 et -1 C) ln2 et – ln2 D) 1-ln2 et 1+ln2 E) Autre réponse

Question 14 : On considère pour tout entier naturel n la suite de terme général

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

Alors :

A) (u_n) est une suite géométrique de raison e

B) (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$

C) (u_n) est une suite arithmétique de raison e

D) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{e}$

E) Autre réponse

Question 15 : Soit X la variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition F est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \leq 0, F(x) = 0 \\ \forall x > 0, F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$$

L'espérance de X est égal à:

A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ C) $\sqrt{\pi}$ D) $\sqrt{2\pi}$ E) Autre réponse

Question 16 :
On considère un type de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{C}{t^2} & si\ \ t \geq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur du réel C est:

A) 10 B) 6 C) 12 D) 20 E) Autre réponse

221

Question 17 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

On a alors: $\lim_{n\to+\infty} u_n =$

A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $+\infty$ D) 1 E) Autre réponse

Question 18 : On note ln le logarithme népérien.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & si \; -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
L'espérance mathématique de X est égale à :

A) $\frac{\ln 2}{2}$ *B)* $\frac{1}{4}$ *C)* $2\ln 2$ *D)* $\frac{3\ln 2}{2}$ *E) Autre réponse*

Question 19 : Soucieux de mieux connaître sa clientèle, le gérant d'un magasin situé dans un centre commercial à Casablanca a réalisé une étude portant sur le mode de paiement en fonction du montant des achats.
Elle a permis d'établir les probabilités suivantes :

$p((X=0)\cap(Y=0)) = 0,4$
$p((X=0)\cap(Y=1)) = 0,3$
$p((X=1)\cap(Y=0)) = 0,2$
$p((X=1)\cap(Y=1)) = 0,1$

où X représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 500 dirhams, prenant la valeur 1 sinon, et Y la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.
La covariance du couple (X, Y) est égale à :

A) 0,1 B) - 0,5 C) - 0,02 D) - 0,1 E) Autre réponse

Question 20: Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur S_1 ou le serveur S_2.
On constate que le serveur S_1 est choisi dans 70 % des cas et donc que le serveur S_2 est choisi dans 30 % des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.
La probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur S_1 est de 0,1 ; alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur S_2 est de 0,05.
Si le courrier a subi une erreur de transmission, la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur S_1 est égale à :

A) $\frac{1}{13}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{9}{11}$ D) $\frac{23}{29}$ E) Autre réponse