Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2013

MATHEMATIQUES I

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

203

Question1 On considère une succession de sacs que l'on désigne par $S_1, S_2, \ldots, S_k$

Au départ le sac S_1 contient 2 jetons noirs et un jeton blanc ; tous les autres sacs contiennent chacun un jeton noir et un jeton blanc.

On tire au hasard un jeton du sac S_1 que l'on place dans le sac S_2. Puis on tire au hasard un jeton du sac S_2 que l'on place dans le sac S_3, et ainsi de suite.

On note B_k l'évènement : « le jeton tiré du sac S_k est blanc », et $p_k = p(B_k)$ sa probabilité.

Alors pour tout $n \geq 1$:

A: $P_{n+1} = 1/3\ p_n + 2/3$; B: $P_{n+1} = 1/3\ p_n + 1/3$; C: $P_{n+1} = 1/3\ p_n - 2/3$; D: $P_{n+1} = 1/3\ p_n - 1/3$

E: Autre réponse

Question 2 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, et on suppose que $n \geq 3$. On tire au hasard et successivement 3 boules de l'urne; Les tirages sont effectués sans remise.

La probabilité de l'évènement: "On a obtenu dans l'ordre trois numéros consécutifs" est:

A: $\dfrac{1}{n^2}$; B: $\dfrac{1}{n(n-1)(n+1)}$; C : $\dfrac{1}{n(n-1)}$; D : $\dfrac{1}{n(n+1)}$; E: Autre Réponse

Question 3 : Soit X une variable aléatoire à densité, de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1]$.

On pose $Y = -\beta \ln(X)$; β étant un nombre réel strictement positif.

Déterminer l'espérance mathématique de Y.

A/ $\dfrac{\beta}{2} + 1$; B/ 2β ; C/ β ; D/ $\ln \beta$; E/ Autre réponse

Question 4 :

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant (n+1), soit il y reste, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note A_n l'événement : " le mobile se trouve en A à l'instant n ",

B_n l'événement : " le mobile se trouve en B à l'instant n ",

C_n l'événement : " le mobile se trouve en C à l'instant n ".

On pose : $a_n = p(A_n)$, $b_n = p(B_n)$ et $c_n = p(C_n)$.

Soit le vecteur-colonne de $\mathbf{R}^3$: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On a alors : $X_{n+1} = M \cdot X_n$, où M est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

A) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

Question 5 Soit X une variable aléatoire réelle ayant pour densité de probabilité la fonction réelle f définie par:

$$f(x) = a\exp(-3x^2)$$ pour tout x réel où a est une constante à déterminer éventuellement.

L'écart-type de X est:

A: $\frac{1}{3}$; B: $\frac{1}{\sqrt{3}}$; C: $\sqrt{6}$; D: $\frac{1}{\sqrt{6}}$; E: Autre Réponse

Question 6 : Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)} & si \quad x \succ a \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad ; \quad a \in IR$$

Déterminer le nombre réel m tel que : $F(m) = \frac{1}{2}$, où F est la fonction de répartition de X.

A/ $\ln 2$; B/ $a + \ln 2$; C/ $a - \frac{1}{3}\ln 2$; D/ $\frac{1}{2}a$; E/ Autre réponse.

Question 7 : Soit a un nombre réel non nul, on considère la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in IN$, $p_n = \frac{1}{8}(\frac{2+a^n}{n!})$

Pour quelle valeur de a, la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définit – elle une loi de probabilité ?

A/ $\ln 2$; B/ $\ln(8-2e)$; C/ $1-\ln(8-e)$; D/ $\frac{1}{2}$; E/ Autre réponse.

Question 8 Une urne contient 3 dés équilibrés. Deux d'entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1à 6. Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portent le numéro 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de celui-ci. On note pour tout n entier non nul, S_n l'évènement « on obtient 6 à chacun des n premiers lancers » et P_n sa probabilité

Alors

A: $P_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}$; B: $P_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$; C: $P_n = \frac{1}{2\left(\frac{1}{6}\right)^n+1}$; D: $P_n = \frac{1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$; E: Autre réponse

Question 9 :

On donne la série statistique suivante : 14 , 16 , 12 , 9 , 11 , 18 , 7 , 8 , 9 , 16 , 7 , 9 , 18 .

La médiane est égale à :

A) 9 B) 11 C) 14 D) 16 E) Autre réponse

Question 10: Calculer la limite de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{n^2+k}$$

A/ $+\infty$; B/ $\frac{3}{2}$; C/ $3e^2$; D/ 2 ; E/ Autre réponse.

Question11 : Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$\int_0^1 x^n \ e^{1-x} \ dx$$

Alors: $I_{n+1}=$

A: $-1-(n+1)\, I_n$; B: $-1-I_n$; C: $-1+n\, I_n$; D: $-1+(n+1)\, I_n$; E; Autre réponse

Question 12 : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2} dx$$

A) $\frac{3}{2}e - \ln 2$; B) $\frac{1}{2} - \ln(\frac{e+1}{2}) + \frac{1}{e+1}$; C) $\ln(\frac{e+1}{2}) + \frac{1}{e+1}$; D) $\ln(\frac{e+1}{2}) - \frac{1}{e+1}$;
E/Autre réponse.

Question13 Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \, dx$$

A: -13/4 ln3 +17/6 ln2 ; B: -13/8 ln3 +17/3 ln2 ; C: -13/8 ln3 +17/2 ln2 ; D: -13/8 ln3 +17/6 ln2 ;

E: Autre réponse

Question 14 : Soit le système à 3 inconnues réelles *x, y, et z*

$$\begin{cases} x-3y+7z=-25 \\ 3x+\quad y+z=5 \\ 3x+11y-19z=85 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de ce système est:

A: $\{(-z-1;2z-8;z); z\in\mathbb{R}\}$; B: $\{(-z-1;2z+8;z); z\in\mathbb{R}\}$; C: $\{(z+1;2z+8;z); z\in\mathbb{R}\}$;
D: $\{(-1;8;0)\}$; E: Autre Réponse

206

Question 15 *Soit le système à 4 inconnues réelles x, y z, et t*

$$\begin{cases} x-y+z-2t=-8 \\ 2x-y+3z+t=23 \\ 4x+3y+5z-3t=7 \\ 5x-2y+8z+5t=77 \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de ce système est:

A: $\{(2z-3t+31;-z-5t+39;z;t);(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$; B: $\{(-2z+3t+31;z-5t+39;z;t);(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$;
C: $\{(-2z-3t+31;-z-5t+39;z;t);(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$; D: $\{(28;34;0;1)\}$; E: Autre Réponse

Question 16 : Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul et soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-(1+x)^{-n}}{x} & si\ x\succ 0 \\ a & si\ x=0 \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 0 est:

A: $a=-1$; B: $a=0$; C: $a=n$; D: $a=n+1$; E: Autre réponse

Question 17 :
On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Q=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose : $B=\frac{1}{4}QAP$. B est alors égale à :

$A)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $B)\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$D)\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ *E) Autre réponse*

207

Question 18 :
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0)=0 \quad et \quad \forall x \in R^*, \; f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f .
La tangente à (C_f) à l'origine a pour équation :

A) y = x B) y = -x C) y = x+1 D) y=0 E) Autre réponse

Question 19 Soit P la matrice $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; P est inversible et son inverse P^{-1} est égale à:

A) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$; B) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ C) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$; D) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

E) Autre réponse

Question 20 : On effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires. Soit X la variable aléatoire égale au rang de sortie de la première boule blanche, et Y la variable aléatoire égale au rang de sortie de la seconde boule blanche.

Après avoir déterminé la loi du couple (X, Y), calculer la covariance de X et Y, Cov (X , Y).

A/ $\frac{1}{2}$; B/ -3 ; C/ $-\frac{1}{2}$; D/ 0 ; E/ Autre réponse