ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2018

prépa

3

Mathématiques

Option Technologique

Lundi 16 avril 2018 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 4 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci dessous :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ -8 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de la matrice M, et préciser les valeurs propres associées.

2. En déduire une matrice P telle que $MP = PD$.

3.(a) Vérifier que $X^3 + X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de P.

(b) En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}.

4. Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $Y = P^{-1}XP$.

(a) Vérifier que : $Y^2 = P^{-1}X^2P$.

(b) Montrer que X vérifie l'équation

$$(*) \quad : \quad X^2 - 4X + I = M$$

si et seulement si Y vérifie

$$(**) \quad : \quad Y^2 - 4Y + I = D.$$

5.(a) Déterminer la matrice Y diagonale vérifiant l'équation $(**)$ et dont les coefficients diagonaux sont tous inférieurs à 2.

(b) En déduire une matrice X solution de l'équation $(*)$.
On explicitera les neuf coefficients de la matrice X.

EXERCICE 2

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0,+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

3. Déterminer la limite de f en 0.
   Interpréter graphiquement le résultat.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
6. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et de (D).
   On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.
7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

8.(a) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

(b) Étudier la convexité de f. La courbe $(\mathcal{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne :

$$\frac{1}{e} \simeq 0{,}4 \qquad \sqrt{e} \simeq 1{,}6 \qquad f(\sqrt{e}) \simeq 1{,}3 \qquad f'(\sqrt{e}) \simeq 0{,}1.$$

   Représenter la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Partie II.

1. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$u(x) = (\ln(x))^2.$$

2. En déduire que $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \frac{e^2+11}{8}$.
3. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{e^2+11} f(x) & \text{si } x \in [1,e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une densité de probabilité.
4. Soit X une variable aléatoire admettant h comme densité.
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^e \ln(x)dx = 1.$$

   (b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.

EXERCICE 3

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **l'autre** urne;
- si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans **la même** urne.

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ».
Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U, l'événement U_1 est certain : $P(U_1) = 1$.

1. Calculer $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$.
   En déduire $P(U_3)$.
3. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, que valent $P_{U_n}(U_{n+1})$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$?
   (b) En déduire que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:
   $$P(U_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n).$$
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue α :
   $$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha.$$
   (d) Déterminer alors la valeur de $P(U_n)$ en fonction de n.
   (e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n)$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. (a) Donner les valeurs de :
   $$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0), \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1), \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2).$$
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Vérifier que $E(X_2) = \dfrac{19}{18}$.

3. On rappelle qu'en Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script Scilab ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
function X2=simulation()
    tirage1 = grand(1,1,'uin',1,3)
    if tirage1<3 then
        res1=1
        tirage2=grand(1,1,'uin',1,4)
        if tirage2==1 then res2=1
        else res2=0
        end
    else
        res1=0
        tirage2= ..........
        if tirage2<3 then res2= ..........
        else res2= ..........
        end
    end
    X2=res1+res2
endfunction
```

4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, déterminer $X_n(\Omega)$.
Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(X_n = 0)$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans U.

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$-ième boule s'effectuera dans V.

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4} \times P(X_n = 1) + \frac{2}{3} \times P(X_n = 0) \qquad (R_1).$$

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times P(X_n = 1)$.

Déduire du résultat (R_1), que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8.(a) Montrer par récurrence que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

(b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X_n = 1)$ en fonction de n.

(c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1)$.