ECRICOME 2017 - Voie scientifique

Exercice 1

On définit sur l'intervalle $]0;1]$ les deux fonctions $f : x \longmapsto x\ln(x)$ et $g : x \longmapsto x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

1. a) Les fonctions f et g admettent-elles des limites en 0 ?
   b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $]0;1]$.
   c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ est convergente. On notera I sa valeur.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n \mathrm{d}t$$
et :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe.
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   c) Calculer u_0 et u_1.
   d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$
   e) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
   f) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function S = somme(n)` qui prend en paramètre d'entrée un entier naturel n et qui produit en paramètre de sortie la valeur de S_n.
3. a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle, montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right]$ et tout entier naturel n :
$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$
   b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |I - S_n| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$
   c) Montrer que :
$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$
   d) Écrire une fonction d'en-tête `function I = estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif ε et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de I à ε près.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si x est ainsi associé à X et y à Y, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :
$$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^{\mathrm{t}}XY = {}^{\mathrm{t}}YX,$$
où ${}^{\mathrm{t}}X$ représente la transposée de X.

1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   a) Justifier qu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$J = PD{}^{\mathrm{t}}P.$$

b) Déterminer le rang de J. En déduire une valeur propre de J ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

c) En examinant la trace de J, expliciter la matrice D.

2. On note f la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$

a) Montrer que pour tout $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right].$$

b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = {}^{\mathrm{t}}XMX.$$

c) Exprimer M comme combinaison linéaire de J et de I, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale Δ à déterminer telle que :

$$M = P\Delta {}^{\mathrm{t}}P.$$

e) Montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum sur l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \left\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $\mathcal{S}$.

3. Dans cette question, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Justifier que A est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
On note v l'endomorphisme dont B est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

b) À l'aide de v et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (\langle x,y\rangle)^2 \leqslant \langle u(x),x\rangle \times \langle u^{-1}(y),y\rangle.$$

Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.

c) En déduire que :

$$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|=1}} \left(\langle u(x),x\rangle \times \langle u^{-1}(x),x\rangle\right) = 1.$$

4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

b) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

c) En déduire le minimum de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x_1,x_2) = \left(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2\right)\left(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right)$$

sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Problème

Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.

Partie A

Dans toute cette partie, a est un réel strictement positif et g_a est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Justifier que g_a est une densité de probabilité.

2. Soit Z_a une variable aléatoire admettant g_a pour densité.
   a) Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance a^2.
   Rappeler une densité de N et donner les valeurs de $\mathrm{E}(N)$ et $\mathrm{E}\left(N^2\right)$.
   b) Montrer que Z_a admet une espérance et calculer $\mathrm{E}(Z_a)$.
   c) Montrer que Z_a admet une variance et calculer $\mathrm{V}(Z_a)$.

Partie B

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
function X = tirage(n)
    urnes = zeros(1,n)
    X = 1
    choix = floor((rand()*n))+1
    while ..........
        urnes(choix) = urnes(choix)+1
        choix = floor((rand()*n)+1
        X = ..........
    end
endfunction
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
   Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.
4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.
   a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
   b) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![2,n+1]\!], \quad \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$
   c) Montrer que, pour tout entier strictement positif n, X_n admet une espérance.
   d) On souhaite écrire une fonction Scilab qui calcule $\mathrm{E}(X_n)$ en fonction de n.
   Compléter la fonction suivante à cet effet :

```
function E = esperance(n)
    facto = prod([1:n])
    fac = facto
    somme = 0
    for k =2 : (n+1)
        puissance = ..........
        fac = ..........
        somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
    end
    E = facto * somme
endfunction
```

Partie C

On reprend dans cette partie les variables aléatoires X_n étudiées dans la partie B.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :
$$\alpha(n,m) = \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$,
$$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$

2. En déduire que, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \dfrac{n}{2}$, on a :

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n,m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. On suppose dans cette question que $x \leqslant 0$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n}\mathrm{P}\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right))$.
4. On suppose dans cette question que x est un réel $x > 0$.
   a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) Justifier qu'il existe un entier N tel que :

   $$\forall n \geqslant N, \quad \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leqslant \frac{n}{2}.$$

   c) Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in [\![2,n+1]\!], \quad \mathrm{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

   d) En déduire que, pour tout $n \geqslant N$, on a :

   $$\mathrm{P}\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right) = \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 1}{n}\exp\left(\alpha\left(n, \lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 2\right)\right).$$

   e) Montrer alors que $\sqrt{n}\mathrm{P}\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini et déterminer cette limite.

Partie D

On **admettra** dans cette partie le résultat suivant :

Si W est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :

- *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, W_n admet une densité h_n ;*
- *la variable W admet une densité h ;*
- *pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$;*

alors la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers W.

On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B.
On introduit une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires X_n (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

On définit enfin, pour tout entier strictement positif, la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n}\mathrm{P}\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right).$$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\lfloor\sqrt{n}x\rfloor = k$.
   b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.
2. a) Sit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\mathrm{P}\left(U \leqslant \sqrt{n}x - k\right)$.
   On pourra séparer les cas où $k > \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$, $k < \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ et $k = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$.
   b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t.$$

   c) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire Y_n converge en loi vers une variable aléatoire Y à densité dont on précisera la densité.
3. a) Rappeler l'énoncé du théorème de Slutsky.
   b) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.