Voie S

EXERCICE 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.

   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.

   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$

   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

   puis que :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

EXERCICE 2

Le but de cet exercice est d'étudier pour un entier n tel que $n \geqslant 2$ les points critiques de la fonction f définie sur le domaine :

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$$

par :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i)$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note :

$$\varphi(P) = 4XP'(X) - P''(X).$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi : P \mapsto \varphi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de φ pour une valeur propre à préciser.

   (d) Montrer que φ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

2. On s'intéresse dans cette question (et uniquement dans cette question) au cas $n = 2$. On a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\}$$

   et :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - \ln(y - x) \end{array}$$

   (a) Justifier que f admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$ et les calculer.

   (b) Montrer que f admet un unique point critique : le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

   (c) Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$?

On revient à présent au cas général avec $n \geqslant 2$.

3. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_n$. On note S le polynôme à coefficients réels défini par : $S(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $Q_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - x_i)$. On a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ S(X) = (X - x_k) Q_k(X).$$

   (a) Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

   (b) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ 2x_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x_k - x_i} = 0$$

   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

   (d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq k\}$, on a :

$$Q_k'(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

(e) En déduire que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in [\![1,n]\!],\ S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0$$

(f) Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X)$$

En observant le terme dominant de S, montrer plus précisément que :

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0$$

4. (a) À l'aide des résultats des questions question 1(d) et 3(f), montrer que la fonction f admet au plus un seul point critique sur $\mathcal{D}_n$.
   (b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1(c), que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$ que l'on déterminera.

PROBLÈME

Partie A

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{a,b}$ le réel défini par :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx$$

et on note $f_{a,b}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{(a+b+1)!}{a! \times b!} x^a (1-x)^b & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

1. (a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}$$
   (c) En déduire que :
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a! \times b!}{(a+b+1)!}$$
   (d) Justifier que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X **suit la loi *beta* de paramètres** a **et** b.
   (a) Montrer que X admet une espérance et que :
   $$E(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$$
   (b) Montrer que X admet une variance et que :
   $$V(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$$
   (c) Soit F la fonction définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+b+1)! \displaystyle\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k (1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
   Montrer que F est la fonction de répartition de X.

Partie B

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne,
- on replace la boule tirée dans l'urne,
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été **ajoutées** dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n-ième tirage ».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à Scilab.
   (a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
function res = tirage(x,y)
        r = rand()
        if .......... then
                res = 0
        else
                res = 1
        end
endfunction
```

   (b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur de X_n :

```
function Xn = experience(a,b,n)
        x = a
        y = b
        for k=1:n
                r = tirage(x,y)
                if r == 0 then
                        x = ..........
                else
                        ..........
                end
        end
        Xn = .........
endfunction
```

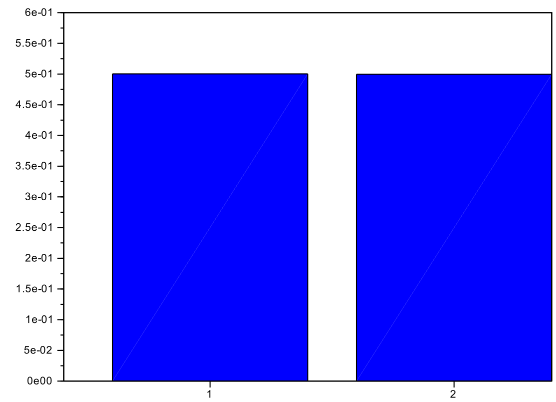
   (c) Écrire une fonction Scilab d'en tête :

```
        function loi = simulation(a,b,n,m)
```

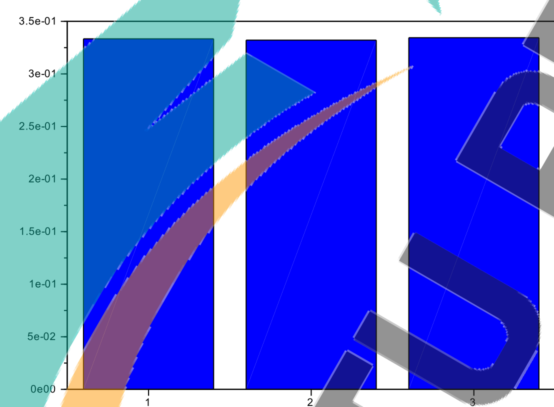
   qui fait appel m fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = n)$.

5. On s'intéresse ici au cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en « bâtons ».

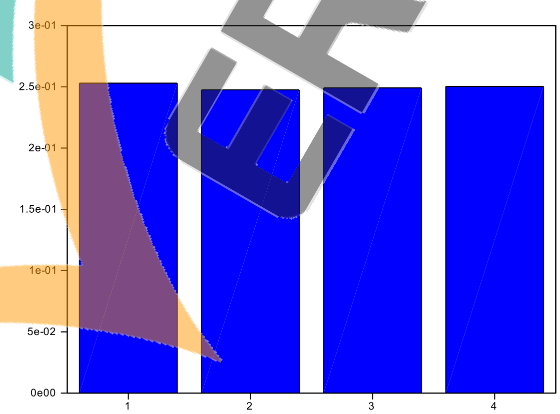
```
--> bar( simulation(1,1,1,100000))
```



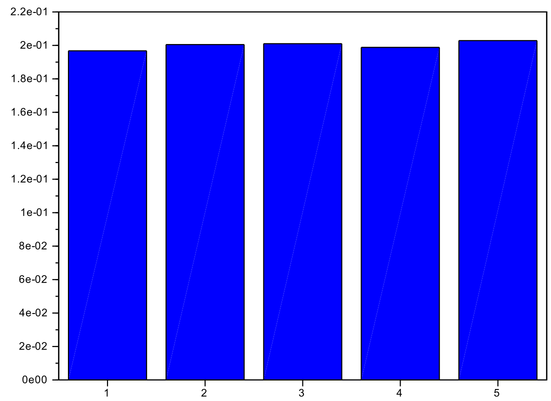

```
--> bar( simulation(1,1,2,100000))
```



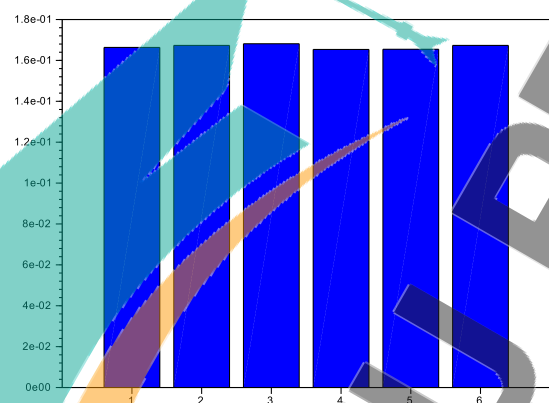

```
--> bar( simulation(1,1,3,100000))
```



```
--> bar( simulation(1,1,4,100000))
```




```
--> bar( simulation(1,1,5,100000))
```



(a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

(c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k+1), \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=\ell) \quad \text{avec } \ell \notin \{k,k+1\}$$

(d) En raisonnant par récurrence sur n, prouver la conjecture émise au 5(a).

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

(a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer la probabilité suivante :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \overline{R_{k+2}} \cap \cdots \cap \overline{R_n})$$

(b) Justifier alors que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n=k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$

(c) En déduire que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X_n=k) = \frac{\dbinom{a+k-1}{a-1}\dbinom{b+n-k-1}{b-1}}{\dbinom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

(d) Calculer $E(a+X_n)$, puis en déduire que : $E(X_n) = \dfrac{na}{a+b}$

Partie C

On admettra dans cette partie que si a, b et n sont trois entiers strictement positifs, alors pour tout entier naturel $p \in [\![a, a+b+n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{p}{i}\binom{a+b+n-1-p}{a+b-1-i}$$

On reprend pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. On note F_n la fonction de répartition de Y_n.

7. (a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?

   (b) Soit $x \geqslant 1$. Que vaut $F_n(x)$?

8. On fixe $x \in]0,1[$. Pour tout réel y, on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leqslant y$. On rappelle qu'alors on a $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$.

   (a) Justifier que $F_n(x) = P(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor)$.

   (b) A l'aide de la formule sommatoire admise en début de la partie C, prouver que :

$$F_n(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\dbinom{a+b+n-1}{a+b-1}}$$

   (c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\dbinom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

   (d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (On obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer).

9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

10. Déduire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta dont on explicitera les paramètres.

11. A l'aide du résultat de la question 6(d) de la partie B, déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $E(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.