

## Voie S

## EXERCICE 1

Soit  $n$  un entier naturel et soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Pour tout polynôme  $P$  de  $E$ , on pose :  $\varphi(P) = P'' - 2XP'$ .

1. (a) Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Déterminer la matrice associée à  $\varphi$  dans la base canonique de  $E$ .
- (c) Montrer que  $\varphi$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout  $(P, Q)$  de  $E^2$ , on note :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

- (a) Montrer que pour tout  $(P, Q) \in E^2$ ,  $\langle P, Q \rangle$  est bien défini.
- (b) Montrer que  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
3. Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .
4. On définit une famille  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  de polynômes de  $E$  par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

- (a) Montrer que  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (b) Montrer que la base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est constituée de vecteurs propres de  $\varphi$ .

## EXERCICE 2

1. On note pour tout  $x \in I = ]0, \frac{\pi}{2}[$  :

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

- (a) Factoriser le polynôme  $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- (b) On pose  $u(x) = f(x) - x$  pour tout  $x \in I$ .

Justifier que  $u$  est dérivable sur  $I$  et que pour tout  $x \in I$ ,  $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$ .

- (c) En déduire les variations de  $u$  sur  $I$ .
- (d) On pose  $v(x) = x - g(x)$  pour tout  $x \in I$ .

Justifier qu'il existe un polynôme  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$ , de degré deux, tel que pour tout  $x \in I$ ,  $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos x)^2}$ .

- (e) En déduire les variations de  $v$  sur  $I$ .
- (f) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).$$

2. (a) En utilisant le fait que  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ , calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .
- (b) Déduire de la question 1(f) un encadrement de  $\pi$ .

3. On pose pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

(a) Justifier que pour tout réel  $\theta$ ,

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta),$$

et en déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (*) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (**)$$

(b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

(c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers  $\pi$  quand  $n$  tend vers l'infini.

(d) Compléter la fonction Scilab suivante afin qu'elle retourne, à l'aide des relations (\*) et (\*\*) et de la question 3(b), une approximation  $x$  de  $\pi$  à  $\epsilon$  près, ainsi que le nombre  $k$  d'itérations qui ont été nécessaires.

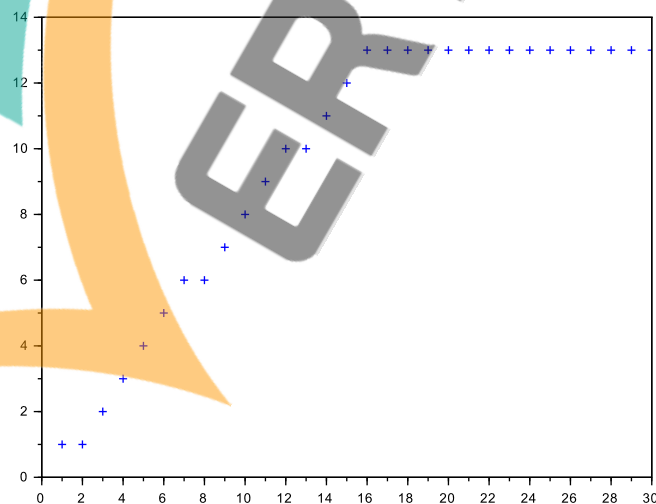
```

function [x,k]=h(e)
k = 0
a = sqrt(3) / 2
b = 1 / 2
while -----
    a = -----
    b = -----
    k = -----
end
x = -----
endfunction

```

(e) On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Écrire une fonction Scilab qui prend comme paramètre d'entrée un entier  $p$  et qui retourne un vecteur de taille  $p$  qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions  $10^{-k}$ , pour  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

(f) On utilise la fonction précédente avec  $p = 30$  et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :



Commenter ce graphe.

## PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires introduites dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Dans tout le problème, on considère  $X$  une variable aléatoire à valeurs positives, et  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que  $X$ .

On note pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $Y_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On dit que la loi de  $X$  est **implosive** si  $X$  n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier  $m \geq 2$  tel que  $Y_m$  admet une espérance.

Si la loi de  $X$  est implosive, on appelle **indice d'implosion de  $X$**  le plus petit entier  $m \geq 2$  tel que  $Y_m$  admet une espérance.

On notera  $F$  la fonction de répartition de  $X$  et  $F_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

Dans le cas où  $X$  (respectivement  $Y_n$ ) admet une densité, on la notera  $f$  (resp.  $f_n$ ).

### Partie A - Résultats préliminaires

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ , la fonction de répartition de  $Y_n$  est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. On suppose dans cette question que  $X$  admet une densité  $f$ . Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $Y_n$  admet une densité  $f_n$  et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}.$$

3. On souhaite prouver dans cette question que pour une variable aléatoire positive  $V$  admettant une densité  $\varphi$  continue sur  $\mathbb{R}^+$  et dont on note la fonction de répartition  $\Phi$ , on a l'équivalence suivante :

$$V \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt \text{ converge,}$$

et qu'on a dans ce cas :

$$E(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt.$$

- (a) Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \int_0^x t\varphi(t) dt = \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt - x(1 - \Phi(x)).$$

- (b) On suppose que  $V$  admet une espérance.

Montrer que  $x(1 - \Phi(x))$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

En déduire que  $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$  converge.

- (c) On suppose que  $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$  converge. Montrer que  $V$  admet une espérance.

- (d) Conclure.

On admet que le résultat de la question 3 reste vrai si la fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  sauf en un nombre fini de points.

### Partie B - Quelques exemples

4. On suppose dans cette question que  $X$  admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{\alpha}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Déterminer le réel  $\alpha$ .

- (b) Donner la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .  
 (c) Déterminer la fonction de répartition  $F_2$  de  $Y_2$  et justifier que  $Y_2$  admet une densité  $f_2$ , que l'on calculera.  
 (d) Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif,

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

- (e) En déduire un équivalent de  $f_2$  en  $+\infty$ .  
 (f) En déduire que la loi de  $X$  est implosive et donner son indice d'implosion.  
 5. On suppose dans cette question que  $X$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

- (a) Vérifier que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ .  
 (b) La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ?  
 (c) Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , donner la valeur de  $F(k) = P(X \leq k)$ .  
 (d) Déterminer la loi de  $Y_2$ . Admet-elle une espérance ?  
 (e) Déterminer la loi de  $Y_3$ . Admet-elle une espérance ?  
 (f) La loi de  $X$  est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

## Partie C - Loi implosive d'indice fixé

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « Existe-t-il, pour tout entier naturel  $m \geq 2$ , une loi qui est implosive et d'indice d'implosion égal à  $m$  ? »

6. Soit  $\alpha > 1$ .  
 (a) Déterminer un réel  $a$  tel que la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \frac{a}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

- (b) Dans la suite de cette partie,  $X$  est une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .  
 (c) Discuter, en fonction de  $\alpha$ , l'existence de l'espérance de  $X$ .  
 (d) Discuter, en fonction de  $n$  et de  $\alpha$ , l'existence de l'espérance de  $Y_n$ .  
 (e) Répondre à la question posée.

## Partie D - Loïs non implosives

On souhaite dans cette partie répondre à la question suivante : « Existe-t-il des variables aléatoires positives qui n'admettent pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive ? »

7. (a) Déterminer un réel  $a$  tel que la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ \frac{a}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

- (b) Dans la suite de cette partie,  $X$  est une variable aléatoire admettant  $f$  comme densité. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ .  
 (c) La variable aléatoire  $X$  admet-elle une espérance ?  
 (d) Discuter l'existence de l'espérance de  $Y_n$ .  
 (e) Répondre à la question posée.

## Partie E - Variables implosant sur une autre

Soit  $Y$  une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que **la variable aléatoire  $X$  implose sur  $Y$**  si  $X$  est implosive et si, en notant  $m$  son indice d'implosion,  $Y_m$  est de même loi que  $Y$ .

8. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles et soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 tel que  $Y_n$  a la même loi que  $Y$ . À l'aide de la formule de la question **A.1**, exprimer la fonction de répartition de  $X$  en fonction de celle de  $Y$ .
9. Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire  $X$  implosive qui implose sur  $Y$ .
10. Soit  $m$  un entier tel que  $m \geq 2$ . Montrer qu'il existe une variable aléatoire  $Y$  admettant une espérance et une variable aléatoire  $X$  implosive d'indice d'implosion  $m$  qui implose sur  $Y$ .  
(on pourra s'inspirer des résultats de la partie C).
11. Soit  $Y$  une variable aléatoire positive admettant une densité  $g$ . On note  $G$  sa fonction de répartition. Soit  $m$  un entier tel que  $m \geq 2$ . Montrer que s'il existe une variable aléatoire  $X$  implosive, d'indice d'implosion  $m$ , qui implose sur  $Y$ , alors pour tout entier  $k$  tel que  $k \geq m$ , il existe une variable aléatoire implosive, d'indice d'implosion  $k$ , qui implose sur  $Y$ .

## Partie F - Variables explosives

On pose pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $Z_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On dit que **la loi de  $X$  est explosive** s'il existe un entier  $m \geq 2$  tel que  $Z_m$  n'admet pas d'espérance. Si la loi de  $X$  est explosive, on appelle **indice d'explosion** de  $X$  le plus petit entier  $m \geq 2$  tel que  $Z_m$  n'admet pas d'espérance.

12. Pour un entier  $m$  donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est  $m$ ?
13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives?