

Mathématiques

Ecrircome Option Scientifique, 2014

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x \ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose :

$$u_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{cases} \quad \text{et} \quad v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{cases}$$

Pour toute fonction f appartenant à E , on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ (c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$).

On admettra que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E .

2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice de φ dans la base \mathcal{B} .
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif? Quelles sont ses valeurs propres?
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ . On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que g est constante sur \mathbb{R}_+^* . En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ puis celle de f .

7. Pour chaque valeur propre λ de φ , déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

EXERCICE 2

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On admettra que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

On pose pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$L(x) = \ln(\Gamma(x)) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$$

puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :

$$\forall (x, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

4. Démontrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad (\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a \in]0, 1[$.

(a) Prouver que pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a - 2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a))$$

et :

$$0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

- (b) Etablir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ en fonction de Ψ et de a .

PROBLEME

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2 . Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2 . Le perdant est éliminé du tournoi, et la gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k , qu'il peut remporter avec une probabilité p , son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n , on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

PARTIE I : Etude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande `random` crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ (qui suit en outre la loi uniforme sur $[0; 1]$).
 - (a) Ecrire une fonction `DUEL` en Turbo-Pascal qui crée un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et 0 sinon.
 - (b) Ecrire une fonction `TEST_VICTOIRE` en Turbo-Pascal qui, à trois nombres a, b, c fournis par l'utilisateur, renvoie `TRUE` si les trois sont égaux, `FALSE` sinon.
 - (c) Ecrire un programme `TOURNOI` en Turbo-Pascal simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose

d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives). **Indication** : Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions *DUEL* et *TEST_VICTOIRE* en les répétant convenablement jusqu'à ce que *TEST_VICTOIRE* sur trois *DUEL* consécutifs renvoie *TRUE*.

2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

	numéro du joueur gagnant le duel ↓	
duel 1	0	...
duel 2	0	...
duel 3	0	...

Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1)$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n , démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ , μ , r_1 , r_2 tels que

$$\forall n \geq 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

Partie II : Etude du cas général

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0; 1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} X^k \right) - 1$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n -ième duel, le vainqueur du n -ième duel a obtenu exactement k victoires ».

Justifier l'égalité :

$$\forall n \geq N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Etablir que pour tout $n \geq N$, on a

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), \dots, P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geq N$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0$$

6. A l'aide de la relation (\mathcal{R}_2) (*question II.2*), établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Etablir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation (\mathcal{R}_3)

(*question II.4*) sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

(a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $(X = n)$ sont égaux.

(b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

Partie III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie II sont conservées. Les résultats de la question II.5 pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :

$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1} X^N$$

et on admet que :

$$(qX - 1)Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N - 1)X - N.$$

Soit z un complexe tel que

$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine complexe de Q est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N-1$ complexes non nuls et distincts z_1, \dots, z_{N-1} tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \cdots (X - z_{N-1})$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \rightarrow \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), \dots, S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right) \right) \end{cases}$$

où z_1, \dots, z_{N-1} sont les $N-1$ racines distinctes de Q .

- Prouver que f est un isomorphisme.
- Exprimer sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et \mathbb{C}^{N-1} .
Expliciter ${}^t A$ (la transposée de A).
- En déduire que le système :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 + \cdots + x_{N-1} = P(E_1) \\ \frac{x_1}{z_1} + \cdots + \frac{x_{N-1}}{z_{N-1}} = P(E_2) \\ \frac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \frac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} = P(E_{N-1}) \end{cases}$$

admet une unique solution $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

3. Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ l'unique solution du système (\mathcal{S}) (cf. question III.2c), on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}$$

Montrer que pour tout $n \geq N$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$