ECRICOME
VISER PLUS HAUT

EXERCICE 1

On note :

- $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes (à n lignes) à coefficients réels ;
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- ${}^tU$ la transposée d'une matrice U ;
- $\ker(M) = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tel que } MX = 0\}$ et $\operatorname{Im}(M) = \{MX, \quad X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ où M est une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$ et on note $\|\|$ sa norme associée.
On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel k non nul tels que $A^k = {}^tA$. On pose alors $B = {}^tAA \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tB$ et établir que : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle BX, X\rangle = \|AX\|^2$.
2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que : $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que : $B^2 = B$.
5. Montrer que : $\ker(B) = \ker(A)$ puis que : $\operatorname{Im}(B) = \operatorname{Im}(A)$.
6. Etablir que : $\forall X \in \operatorname{Im}(A), \quad \|AX\| = \|X\|$.

EXERCICE 2

On considère :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{5}\left[x^2\left(1 - x^2\right) + y^2\left(1 - y^2\right) + 2xy\right] ;$$

- la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}) \quad \text{avec} \quad (u_0, u_1) \in [0,1]^2.$$

1. Etude de f.

   (a) Si (a,b) un point critique de f, justifier que $a = b$ puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ses points critiques.

   On admettra dans toute la suite que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \leqslant \frac{2}{5}\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{10}\left(x^2+y^2\right)^2.$$

   (b) Préciser le ou les extrémums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{2t}{5} - \frac{t^2}{10}$.

   (c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.

2. Programmation de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Ecrire un programme en PASCAL demandant à l'utilisateur un entier N ainsi que les valeurs initiales u_0, u_1 et calculant la valeur de u_N correspondante.

3. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) \quad \text{avec} \quad a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

   (a) Démontrer que : $\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$

   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \leqslant \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}).$

   (b) Justifier que : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \leqslant a_n.$

   (c) Etablir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda r^n + \mu s^n$$

   puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Tournez la page s.v.p.

PROBLEME

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie réelle de x c'est-à-dire l'unique entier N tel que : $N \leqslant x < N+1$.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor .$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, on l'appelle « la discrétisée de X »
Le problème consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant quelques lois usuelles (**PARTIE I**)
- puis à étudier plus spécifiquement le cas où les variables possèdent une densité définie par un polynôme (**PARTIE II**)
- et enfin à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (**PARTIE III**).

Les parties **I, II** et **III** sont largement indépendantes.

PARTIE I : Calculs de discrétisées.

1. En PASCAL,

   - la commande **floor(x)** calcule la partie entière du réel x ;
   - la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0, 1]$) ;

   On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ alors, pour $a \in \mathbb{R}_+$, aZ suit la loi uniforme sur $[0, a]$.

   Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+$) et X_d sa discrétisée.

   Ecrire une fonction PASCAL qui à un réel a (positif) fournit par l'utilisateur renvoie une réalisation de X_d.

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x)\, dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$.
   Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Etablir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :

$$\begin{cases} Y(\Omega) = \{1, 2, ..., 9\} \text{ et } \forall k \in Y(\Omega), \\ \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{1}{\ln(10)} \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \end{cases}$$

   Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X possède f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.

   (a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.

   (b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue dont on donnera le nom et le paramètre.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$, prouver que :

$$\mathrm{P}(Y_n \leqslant x) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).$$

   (d) Donner un encadrement simple de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ puis montrer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

PARTIE II : Discrétisées et lois « polynômiales ».

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et on pose :

$$\forall k \in \{0, .., n\}, \quad e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k.$$

Si Q appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t)\, dt.$$

1. Pour tout entier $k \in \{0, .., n\}$, calculer $u(e_k)$ puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, ..., e_n$.

Tournez la page s.v.p.

2. Etablir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

3. Etablir que la famille $(u(e_k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Justifier que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t)\,dt.$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \dfrac{x}{6}$.

6. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.

   (a) On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f(x) = Q(x) \text{ si } x \in [0, N+1[\ ; \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   Etablir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\begin{cases} X_d(\Omega) = \{0, .., N\}, \\ \forall k \in X_d(\Omega), \quad \mathrm{P}(X_d = k) = R(k) \end{cases}.$$

   (b) On considère la variable aléatoire discrète Y définie par :

   $$\begin{cases} Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}, \\ \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathrm{P}(Y = k) = \dfrac{k}{6} \end{cases}.$$

   Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

   $$\forall x \in [0, 4[, \quad f(x) = Q(x)$$

   et tel que Y soit la discrétisée de X. **Indication** : *procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.*

ECRICOME
VISER PLUS HAUT

PARTIE III. Variables dénombrables et discrétisées.

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k \geqslant 0} g(k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1.$$

On suppose en outre que g est <u>décroissante</u> et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g'(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } |g''(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geqslant 0\,; \\ f(x) = 0 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?

2. (a) Etablir que : $\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \frac{C\,|x-a|}{(k+1)^2}.$$

   (b) Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D\,|x-a|.$$

   Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit t un réel positif, pour tout entier N, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \quad \text{et} \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

Tournez la page s.v.p.

(a) Démontrer que : $\forall k \geqslant 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$

puis que :

$$\forall N \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}.$$

(b) Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)\,dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)\,dt.$$

(c) Justifier que : $\lim\limits_{k \to +\infty} g(k) = 0$ et que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = g(0).$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

(b) Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t)\,dt$. Etablir que :

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)\,dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et préciser sa valeur.

(c) Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.