SUJET

EXERCICE 1

On définit les trois matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}.$$

1. Inverse de P. Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calcul de A^n. On pose $B = P^{-1}AP$.
   (a) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *(les calculs intermédiaires devront être indiqués sur votre copie).*
   (b) Donner les quatre coefficients de la matrice B^n.
   (c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = PB^nP^{-1}$ puis donner les quatre coefficients de la matrice A^n.
3. Convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$.
   (b) Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (c) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. On note L la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (d) Montrer que $L = \dfrac{3L+1}{L+3}$, résoudre cette équation puis déterminer L.
4. Calcul de u_n et de sa limite. Pour tout entier n, on considère les deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

   On admettra que : $\forall n \geqslant 0, \quad a_n > 0$ et $b_n > 0$.

(a) Prouver par récurrence que : $\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

(b) Posons : $\forall n \geqslant 0, \quad U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Donner l'expression de U_{n+1} en fonction de A et U_n puis donner (sans démonstration) l'expression de U_n en fonction de A, n et U_0.

(c) Donner l'expression de u_n en fonction de n puis retrouver ainsi la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

EXERCICE 2

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \ ;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Etude du signe de g.

   (a) Calculer $g'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Vérifier que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution p que l'on précisera et construire le tableau de variations de g.

   (c) Calculer $g(p)$ puis donner le signe de $g(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$.

2. Etude asymptotique de f.

   (a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$.

   (b) On note $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Calculer a et b.

   (c) Donner l'équation de l'asymptote $(\mathcal{A})$ de $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$ et préciser la position de cette asymptote par rapport à $(\mathcal{C}_f)$.

3. Représentation graphique de f.

   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.

   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ en indiquant dans celui-ci les limites de f en 0^+ et $+\infty$.

(c) Tracer sur un même dessin le graphe de $\mathcal{C}_f$ ainsi que celui de son asymptote $(\mathcal{A})$.

4. Etude d'une équation. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(\mathcal{E}_n) : f(x) = 2n.$$

(a) Prouver que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution (*que l'on ne cherchera pas à calculer*). On note x_n cette solution.

(b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$. En déduire l'encadrement :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$

(c) Justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$.

(d) Prouver que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leqslant \dfrac{\ln(n)}{n}$.

(e) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_n}{n}$.

EXERCICE 3

Une entreprise fabrique des appareils électriques en grande quantité.

I. Probabilités conditionnelles.

On admet que 5% des appareils présentent un défaut.
On contrôle les appareils d'un lot. Ce contrôle refuse 90% des appareils avec défaut et accepte 80 % des appareils sans défaut. On prélève un appareil au hasard dans le lot.

On considère les événements suivants :

- D : « l'appareil a un défaut » ;
- A : « l'appareil est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Donner la valeur des probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(D), \quad P(\overline{D}), \quad P_D(\overline{A}), \quad P_D(A), \quad P_{\overline{D}}(A).$$

2. Calculer à 0,001 près les probabilités suivantes :

$$P(A \cap D), \quad P(A \cap \overline{D}).$$

3. Déduire de ce qui précède la probabilité $P(A)$ à 0,001 près.

4. Calculer à 0,001 près la probabilité qu'un appareil soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle.

II. Loi binomiale.

On prélève au hasard 10 appareils électriques d'une livraison pour vérification. La livraison étant suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise des appareils. On rappelle que 5% des appareils présentent un défaut.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 appareils, associe le nombre d'appareils **sans défaut** de ce prélèvement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres. Préciser $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega)$, donner la valeur de $P(X = k)$.

2. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les appareils soient sans défaut.

3. Donner la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins un appareil ait un défaut.

III. Etude d'une densité de probabilité.

On considère la fonction f de la variable réelle définie par :

$$\begin{cases} \text{Si } t \leqslant 0 & f(t) = 0\ ; \\ \text{Si } t > 0 & f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t}. \end{cases}$$

1. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) \geqslant 0.$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et préciser sa valeur.

5. Justifier que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire T.

IV. Une variable à densité.

La durée de vie des appareils électriques, exprimée en centaines d'heures, est une variable aléatoire à densité notée T, dont une densité est la fonction f (définie à la partie **III**).
La probabilité qu'un appareil électrique fonctionne au moins jusqu'à la date x est donc donnée par la probabilité de l'événement $[T > x]$.

On note F la fonction de répartition de T c'est-à-dire la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(T \leqslant x).$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = (1 - e^{-x})^2$.
2. Déterminer la durée médiane de fonctionnement des appareils c'est-à-dire le temps x tel que $F(x) = \dfrac{1}{2}$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+$.
4. En déduire la durée moyenne de fonctionnement des appareils, c'est-à-dire $E(T)$.