ECRICOME 2012

Exercice 1

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+e^t)^2} \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.
   Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.
2. Etablir : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$, puis : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que $x < y$. Établir que : $0 < f(x) - f(y) \leqslant \dfrac{y-x}{2}$.
4. Montrer que f réalise une bijection continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]\,0\,;\,1\,]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in\ ]\,0\,;\,1\,]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) On suppose qu'une fonction ECRICOME est déjà écrite en Turbo-Pascal qui à un réel x donné renvoie le réel $f(x)$.
   A l'aide de la fonction ECRICOME, écrire une fonction (ou une procédure) SUITE en Turbo-Pascal qui, à un réel $\varepsilon > 0$ fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$ et renvoie la valeur de u_N correspondante.
7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que : $|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leqslant \dfrac{h^2}{3}$.
   Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -g(x)$.
8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ T(x) = xf(x)$.
   Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ T'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, puis que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ T(x) = \ln(1+x)$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on note :
– $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
– I_n la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Une matrice W de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.
On admettra que si U et V sont deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors :
– U^k et V^q commutent pour tous entiers k et q ;
– U^{-1} commute avec V lorsque U est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.
   (a) Soit $U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $U^q = 0_n$.
   Prouver que $I_n - U$ est inversible et que $(I_n - U)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} U^k$.
   (b) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.
   Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f)$ et $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id})$, puis établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id})$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. <u>Étude d'une suite de matrices.</u>
Soient $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\quad (B(B-I_n))^N = 0_n$.
On introduit la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$B_0 = B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2 (2B_k - I_n)^{-1}.$$

On considère pour tout entier $k \geqslant 0$ la proposition :

$(\mathcal{H}_k)$: « $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$B_k - B = [B(B-I_n)]\, C_k, \text{ et } B_k(B_k - I_n) = [B(B-I_n)]^{2^k} D_k$$

avec $B_kB = BB_k, C_kB = BC_k$ et $D_kB = BD_k$ ».

(a) Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible.
En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.

(b) On suppose que la propriété $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour un entier $k \geqslant 0$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 2B_{k+1} - I_n &= [I_n + 2B_k(B_k - I_n)] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1} - B &= \left[(B_k - B)^2 - (B^2 - B)\right] \times [2B_k - I_n]^{-1} \\ B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) &= \left[B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}\right]^2. \end{aligned}$$

En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

(c) Prouver l'existence d'un entier p tel que : $B_p(B_p - I_n) = 0_n$.
Établir que la matrice B_p est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que :
$\forall k \geqslant p, B_{k+1} = B_k$.

Problème

L'objectif du problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$ sous réserve de convergence.
La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} P(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes.

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à cœfficients réels de degré au plus n. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $e_k = X^k$.
Rappelons que $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad f(P) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\mathrm{d}t \text{ et } f(P)(1) = P(1)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = [(X-1)P]'(x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\mathrm{Ker}\,(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Écrire la matrice A de f dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Montrer que f et g sont diagonalisables.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_n$ et on suppose que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \dots, i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n. Si la boule porte le numéro r alors on repose la boule dans l'urne U_n puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r.
- Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, si la boule numéro s a été piochée au k-ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne puis on effectue le $(k+1)$-ième tirage dans l'urne U_s.

Pour tout entier naturel k, on note :

- Z_k est la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k-ième tirage. **On convient que** $Z_0 = n$.
- F_k est le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)x^r$.
- $E(Z_k)$ désigne l'espérance de la variable aléatoire Z_k.

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^{n} \frac{P(Z_k = i)}{i+1}.$$
2. Établir les deux formules suivantes valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$:
$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : & (n+1)P(Z_{k+1} = n) = P(Z_k = n) \\ (\mathcal{R}_2) : & (r+1)P(Z_{k+1} = r) - (r+1)P(Z_{k+1} = r+1) = P(Z_k = r) \end{cases}$$
3. On admet dans cette question que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$ et on pose
$S_r = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_k = r)$.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n.
En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leqslant r \leqslant n-1}$ est constante.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation :
$$(\mathcal{S}) : \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$
5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = E(Z_k)$ et $F''_k(1) = E(Z_k(Z_k - 1))$.
   (b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.
   (c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n. Expliciter alors la variance $V(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n.

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires.

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée ce qui revient à écrire :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $u_k = (X-1)^k$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{r=0}^{n} P(Z_k = r)e_r = F_k = f^k(e_n)$.
2. Prouver que $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \dots, n\}$. Retrouver ainsi que f est diagonalisable.
4. Justifier que : $e_n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u_r$ et que : $\forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad u_r = \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j$.

5. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(e_n) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r.$

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Á l'aide des questions précédentes, établir que :

$$P(Z_k = j) = \sum_{r=j}^{n} (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r}\binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

   (a) Soit $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer un réel $M_{j,n}$ tel que :

   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = j)| \leqslant \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}$$

   puis justifier que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

   (b) Déterminer un réel C_n tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad |P(Z_k = 0) - 1| \leqslant \dfrac{C_n}{2^k}$.
   La série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} P(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?