ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'éducation nationale de l'enseignement supérieur, de la formation des cadres et de la recherche scientifique	Présidence du Concours National Commun aux Ecoles de Management (CNCM) (ENCG / ESI) 2012

CONCOURS NATIONAL COMMUN

d'Admission aux

Grandes Écoles de Management (CNCM) (ENCG / ESI)

Session 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 **heures**

FILIÈRES : ECT

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde.
L'usage de la calculatrice est *interdit*

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales :
L'épreuve se compose de quatres exercices indépendants.

EXERCICE 1

✧✧✧

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&-2&3\\-2&-3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad et\quad P=\begin{pmatrix}1&1&-2\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer la matrice inverse P^{-1}.

2. Calculer B^2 puis B^3. En déduire B^k si k est un entier supérieur ou égal à 3.

3. Calculer $I+B$. Déterminer, en utilisant la formule du binôme de Newton, l'expression de T^n en fonction de n, B et B^2.
En déduire l'expression de T^n en fonction de n uniquement.

4. Montrer que $P^{-1}.T.P = A$

5. Donner l'expression de A^n en fonction de n, P, P^{-1} et T^n.

6. Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la matrice A^n en fonction de n uniquement.

7 On considère trois suites (a_n) (b_n) et (c_n) définies par des conditions initiales a_0, b_0, c_0 et par les relations

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\begin{cases}a_{n+1}=a_n-b_n+c_n\\ b_{n+1}=-2a_n-2b_n+3c_n\\ c_{n+1}=-2a_n-3b_n+4c_n\end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}$

8. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A^n, X_0 et de l'entier naturel n.

9. En déduire l'expression des suites a_n, b_n et c_n en fonction de n uniquement dans le cas où $a_0 = 2$, $b_0 = -3$, et $c_0 = 4$.

EXERCICE 2

✧✧✧

On pose pour tout entier naturel n :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \dots$$

On se propose d'étudier la limite L de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout entier naturel n on pose :

$$f_p(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}+p}}{1+t}) = \frac{t^p\sqrt{t}}{1+t} \text{ si } 0 < t \leq 1,\ f_p(0) = 0$$

$$et\ \mathrm{I}_p = \int_0^1 f_p(t)dt.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel p, la fonction f_p est continue sur $[0,1]$ et que l'intégrale I_p existe.

2. Montrer que pour tout t de $[0,1]$ et pour tout entier n :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

3. Déduire de ce qui précède que l'on a pour tout entier n :

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t}dt = u_n + \mathrm{R}_n \text{ où } \mathrm{R}_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}+1}}{1+t}dt$$

4. Démontrer que pour tout entier n :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+\frac{1}{2}+1}}{1+t}dt \leq \frac{1}{n+2}$$

5. Conclure que l'on a :

$$\mathrm{L} = \int_0^1 \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t}dt$$

EXERCICE 3

✧✧✧

Une agence Telecom propose à ses clients les deux formules d'abonnemnt suivantes :

♣ La formule abonnement Classique notée **C**. Le forfait comprend $5h$ de communication et une connexion 3G avec un engagement de douze mois.

♣ La formule abonnement Fidélité notée **F**. Le forfait comprend un téléphone dernier modèle à moitié prix, $5h$ de communication et une connexion 3G avec un engagement de vingt quatres mois.

30% des clients de l'agence choisissent la formule **C** et **70**% la formule **F**.

Parmi les clients ayant choisi la formule **C**, **80**% choisissent de payer leurs factures par virement automatique et **20**% préfèrent payer leurs factures en espèces à l'agence.

Parmi ceux ayant choisi la formule **F**, **40**% payent leurs factures par virement automatique et **60**% à l'agence.

1. Un client se présente à l'agence.

- **1.*a*.** Calculer la probabilité qu'il choisisse un payement à l'agence en formule **F**.
- **1.*b*.** Calculer la probabilité qu'il choisisse un payement à l'agence.
- **1.*c*.** Il demande un payement à l'agence. Calculer la probabilité qu'il choisisse la formule **F**.

2. Deux clients se présentent à l'agence.

On note X le nombre de ces deux clients qui choisissent la formule **F** et Y le nombre des deux clients qui choisissent un **payement à l'agence.**

- **2.*a*.** Pour tout i et tout $j \in \{0,1,2\}$ présenter la décomposition des évènements $(X = i \cap Y = j)$, dans un tableau à double entrée.
  (on pourra coder CF_1 plutôt que $C_1 \cap F_1$)
- **2.*b*.** Donner la loi du couple (X, Y), c'est à dire,donner les probabilité $p(X = i \cap Y = j)$ pour tout i et tout $j \in \{0,1,2\}$. On pourra recopier et remplir le tableau à double entrée suivant :

$i \backslash j$	0	1	2
0			
1			
2			

- **2.*c*.** Calculer la probabilité que l'un au moins de ces deux clients choisisse un payement à l'agence en formule **F**.

EXERCICE 4

✧✧✧

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2. On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n.

2.*a*. Reconnaître la loi de X_1.

2.*b*. Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

3. On considère deux variables aléatoires Y_n et Z_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Y_n \leqslant x \cap Z_n \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x) P(Z_n \leqslant x)$$

On pose $M_n = \sup(Y_n, Z_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

3.*a*. Pour tout réel x, écrire, en justifiant la réponse, l'événement $(M_n \leqslant x)$ à l'aide des événements $(Y_n \leqslant x)$ et $(Z_n \leqslant x)$.

3.*b*. En déduire une densité de M_n. Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.

3.*c*. On pose $T_n = \inf(Y_n, Z_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de Y_n et Z_n, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

✧✧✧

FIN DE L'ÉPREUVE