MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

SUJET

- *L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*
- *La probabilité d'un évènement C est notée $P(C)$.*

EXERCICE 1

Soit f_0 la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f_0(x) = e^{-3x}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $[0,1]$ par $f_n(x) = (1-x)^n e^{-3x}$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Calculer u_0.

2.a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 0$.

b. Etablir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3.a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.a. A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$, la relation suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3}u_n$$

b. En déduire $\lim_{n\to+\infty} nu_n$.

5. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 3^k}{k!} - e^{-3}$.

a. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

b. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{(-1)^n n!}{3^{n+1}} v_n$$

EXERCICE 2

La matrice unité à 2 lignes et 2 colonnes est notée $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et on rappelle que si A est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes, on pose par convention :* $A^0 = I$.

Soit a un réel quelconque et A la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.

1.a. On suppose que $a = 1$ Calculer A^2 et A^3. Déterminer par récurrence, pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice A^n.

b. On revient au cas général où a est un réel quelconque.
Montrer que la matrice A est inversible si et seulement si $a \neq 0$.

2. Dans cette question, A est la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + 2u_n$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_n & 1+u_n \end{pmatrix}$.

b. Déterminer pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
On note Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$P([Y = k]) = P([k \leq X < k+1])$$

a. Soit F la fonction de répartition de X. Déterminer pour tout x réel, $F(x)$.

b. Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} P([Y = k]) = 1$ et déterminer la loi de Y.

c. On pose $Z = Y + 1$. Vérifier que Z suit la loi géométrique de paramètre $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.
En déduire l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

d. On considère la matrice aléatoire M à 2 lignes et 2 colonnes, définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.

Calculer la probabilité que M soit inversible.

EXERCICE 3

- *On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, et $Cov(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.*
- *On donnera les résultats sous forme fractionnaire.*

On dispose de urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient 1 boule rouge et 4 boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;
- si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Soit X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \quad \text{et } X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose : $Z = X_1 + X_2$.

1.a. Montrer que $P([X_1 = 1]) = \dfrac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?

b. Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

2.a. Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \dfrac{12}{25}$.

b. Donner sous forme de tableau, la loi de du couple (X_2, Z).

3.a. Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

b. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c. Déterminer la loi de Z.

d. Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.

4. On considère l'évènement : « la première boule tirée est verte ». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

5. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.

a. Calculer $E(X_2 Z)$.

b. Montrer que $Cov(X_2, Z) = \dfrac{204}{625}$.

c. En déduire la valeur de $Cov(X_1, X_2)$.

d. Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.

EXERCICE 4

Soit a un réel strictement supérieur à 1 et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si } x\geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Dans cette question uniquement, on prend $a=2$.

a. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On calculera notamment, les nombres dérivés de f à gauche et à droite de 1.

b. Montrer que la fonction f est convexe sur $[1,+\infty[$.

c. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2. Soit B un réel strictement supérieur à 1. On pose : $I(B)=\int_1^B \frac{a}{x^{a+1}}dx$.

a. Calculer $I(B)$ et déterminer $\lim\limits_{B\to+\infty} I(B)$.

b. En déduire que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f pour densité ; on dit que X suit la loi $\mathcal{L}$ de paramètre a.

3.a. Calculer pour tout réel $B>1$, l'intégrale : $J(B)=\int_1^B \frac{a}{x^{a}}dx$.

b. En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ dont on donnera la valeur.

c. On suppose dans cette question uniquement que $a>2$.

Montrer que X admet une variance $V(X)$ et que $V(X)=\dfrac{a}{(a-2)(a-1)^2}$.

4. On note F la fonction de répartition de X.

a. Calculer pour tout x réel, $F(x)$.

b. Résoudre l'équation : $F(x)=\dfrac{1}{2}$.

5. Pour n entier supérieur ou égal à 1, soit $X_1,\dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{L}$ de paramètre a. On pose pour tout $n\geq 1$: $T_n=\min(X_1,\dots,X_n)$.

On a donc pour tout réel x :

$$[T_n>x]=[X_1>x]\cap[X_2>x]\cap\ldots\cap[X_n>x]$$

On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire T_n.

a. Calculer pour tout x réel, $P([T_n>x])$. En déduire pour tout x réel, $G_n(x)$.

b. Vérifier que T_n suit une loi $\mathcal{L}$ dont on précisera le paramètre.
En déduire l'espérance $E(T_n)$ de T_n sans calculs.

6. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $Z_n = \ln(T_n)$.
Déterminer la loi de Z_n et en déduire l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n sans calculs.