HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

DURÉE : 4 HEURES.

Tout verbiage doit être évité et il est expressément recommandé de ne pas dépasser huit pages. Il sera tenu compte des qualités de plan et d'exposition, ainsi que de la correction de la langue. Il est rappelé que la carte réponse est à remplir (en collant l'étiquette code barre supplémentaire). Les documents d'accompagnement ci-joints sont essentiellement là pour aider le candidat dans sa réflexion sur le sujet posé et sa représentation cartographique. Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

SUJET

L'Union européenne face aux effets déstabilisateurs de la mondialisation

CARTE : En utilisant vos connaissances et si nécessaire les documents ci-joints, construisez une carte appuyant et illustrant vos propos. La légende ne devra pas faire plus d'une page. Il est rappelé que **la carte est obligatoire**. Elle doit également comporter un titre.

Document 1 : 31 mars 2010, annonce de la fermeture de l'usine de pneumatique du groupe Continental à Clairoix (Oise), 1120 salariés licenciés.

Document 2 : Extrait d'une interview du Président de la Fédération des industries mécaniques (FIM) en mars 2012. (Sources : *Les Échos*, 6 mars 2012, p. 15)

Document 3 : La géographie du chômage en France métropolitaine en 2016. (Source : *Images économiques du monde 2017*)

Document 4 : La pauvreté en Europe (situation en 2012). (Sources : *Revue Carto*, n° 21, 2014, p. 31)

Document 5 : Le confinement des migrants en Europe et dans les pays méditérranéens en 2011. (Source : *Revue Carto* n° 14, 2012, p.19)

Document 6 : L'évolution des rapports de forces internationaux. (Source : *L'histoire de l'Occident*, Le monde – La Vie, 2014, p. 161)

Document 7 : 20 janvier 2016, annonce du rachat de 67 % du capital de la société du port du Pirée (Grèce) par le groupe chinois COSCO, pour un montant de 368,5 millions d'euros.

Document 8 : Vote « pro-Brexit » en faveur de la sortie de l'UE du Royaume-Uni (23/06/2017). (Source : *Images économiques du monde 2017*)

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 97 13/10/2017 11:34

DOCUMENTS

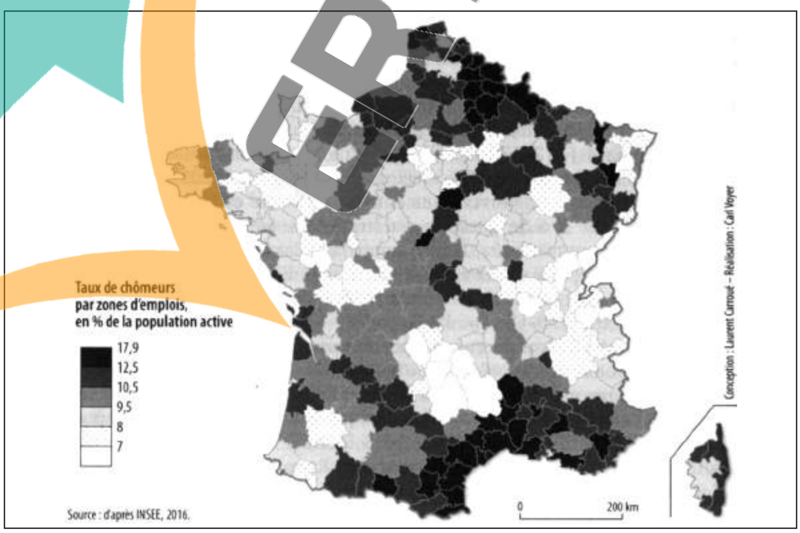
Document 1. 31 mars 2010 : Annonce de la fermeture de l'usine de pneumatiques du groupe Continental à Clairoix (Oise), 1 120 salariés licenciés.

Document 2. Extrait d'une interview du Président de la Fédération des industries mécaniques (FIM), mars 2012.

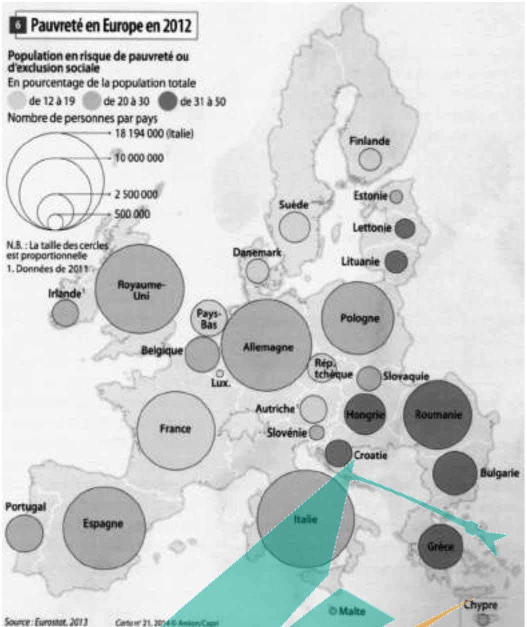
« L'objectif n'est pas d'imposer le fabriquons français » à coups de lois et de réglementations, mais de donner envie de concevoir et de produire en France. »

Jérôme Frantz*, *Les Échos*, 6 mars 2012, p. 15.
*Président de la Fédération des industries mécaniques (FIM)

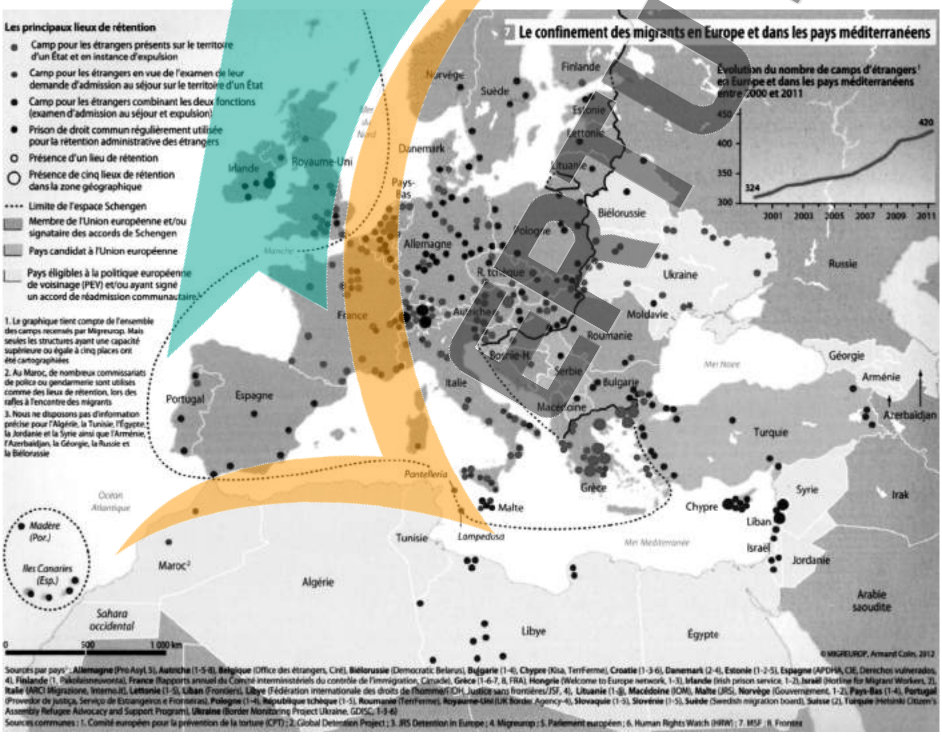
Document 3 : La géographie du chômage en France métropolitaine en 2016.



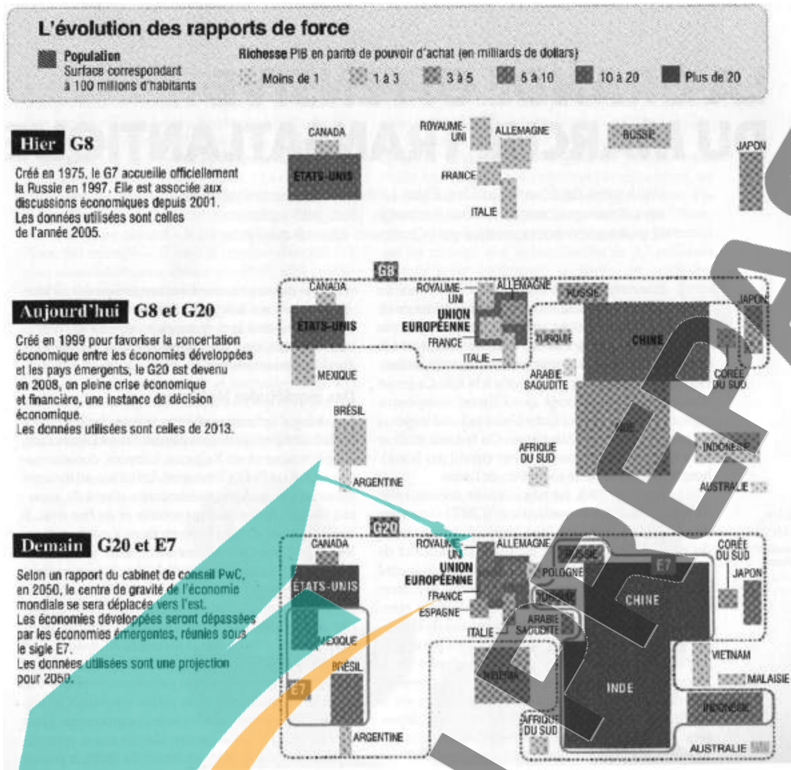
Document 4. La pauvreté en Europe (situation en 2012).



Document 5. Le confinement des migrants en Europe et dans les pays méditérranéens en 2011.



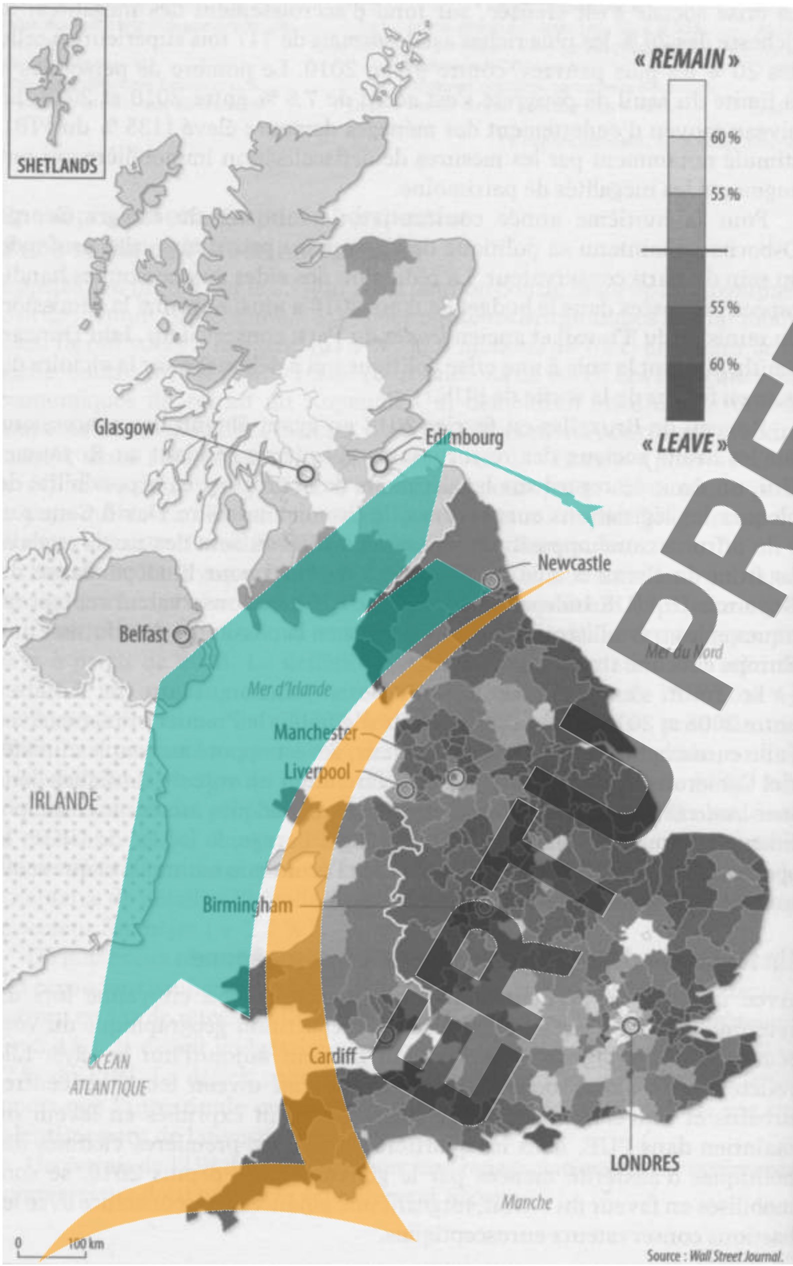
Document 6. L'évolution des rapports de force internationaux.



Document 7. 20 janvier 2016, annonce du rachat de 67 % du capital de la société du port du Pirée (Grèce) par le groupe chinois COSCO pour un montant de 368,5 millions d'euros.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 100 13/10/2017 11:34

Document 8. Vote « pro-Brexit » en faveur de la sortie de l'UE du Royaume-Uni (23/06/2017).



978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 101 13/10/2017 11:34

CORRIGÉ

Par Alain Nonjon, professeur de chaire supérieure.

De prime abord…

Un sujet fédérateur: le thème de l'UE n'a pas eu les faveurs des jurys depuis longtemps, l'approche spécifique « les effets déstabilisateurs de la mondialisation » est indiscutablement stimulante, l'absence de chronologie est le gage de la fin des paraphrases monocordes et monocolores dans les devoirs, l'actualité du sujet est évidente pour le pire (une accroche dans une copie sur 3 était bâtie sur l'épisode de Whir(l)pool) et une certaine lassitude face à l'allusion fréquente, à l'entre-deux tours des présidentielles.

Un sujet sélectif :

– qui exigeait une réflexion sur l'UE, processus né de et se pensant dans la mondialisation ;
– qui ne pouvait que déboucher sur une réflexion sur la date, les années, la décennie où l'Europe passe du crédo mondialiste quasi unanime à la défiance, voire au rejet (fin des années 90, ou crise des *subprimes*) ;
– qui nécessitait de balayer tous les effets déstabilisateurs sans se cantonner aux seuls secteurs agressés en termes d'emplois (culture normalisée, projet édulcoré, FMN prédatrices, tropismes centrifuges, frontières dévaluées) ;
– qui imposait l'art de la nuance ; déstabilisateurs ne signifie pas dévastateurs et le pessimisme ambiant concernant l'UE était mauvais conseiller ;
– qui passait par une analyse des comportements diversifiés des rythmes d'adaptation hétérogènes… des régions qui gagnent et des territoires qui perdent.

Un sujet délicat à traiter: face au désenchantement européen, face à l'europessimisme ambiant en période de Brexit, de souverainismes de replis nationaux, face au problème des migrants qui a fait irruption dans l'espace Schengen.
Face aux débats ouverts encore sur la désindustrialisation européenne, l'effet des travailleurs détachés, l'ordolibéralisme plaqué dans l'UE, la bureaucratie Bruxelloise, les visions populistes d'une Europe technocratique… bref « l'Europe et ses salauds » de Jean Quatremer.
Il fallait une dose d'engagement personnel, de prise de position non frileuse, car de fait le jury attend des raisonnements et pas des alignements sur des banalités, il attend une démonstration et pas que le candidat se borne à montrer en déballant des approximations journalistiques.
Et face à l'importance des connaissances à mobiliser.

Problématique possible : la mondialisation fragilise sensiblement les positions acquises, les avantages comparatifs et le modèle même de la construction européenne, ajoutant à la crise économique une série de crises et de remises en questions cruciales pour l'avenir de l'Europe. Mais la mondialisation au cœur même du projet européen met également en valeur les atouts considérables de l'Union sur la scène internationale, à charge pour les responsables politiques de les reconnaître et les mettre en œuvre. L'UE est-elle apte à dépasser les effets déstabilisateurs de la mondialisation voire à se mobiliser pour se réinventer face à cette dynamique ?

I/ L'UE, projet apparemment structuré par et pour la mondialisation est au milieu des années 80 confrontée à la pression de la mondialisation

A. Un projet européen délibérément tourné vers la mondialisation

Jeremy Rifkin : « *Le rêve européen est la première tentative pour créer une conscience universelle dans un monde de plus en plus petit* ».

– L'Europe a été associée pleinement aux battements de la mondialisation depuis les grandes découvertes, les volontés impériales nées sur ses terres. L'Europe a toujours connu le prix élevé à payer aux nationalismes, aux modèles autarciques. En ce sens, même spectatrice des ruptures depuis 1991, elle a une carte à jouer dans la 4e mondialisation portée par l'émergence de nouveaux acteurs, la confirmation de l'économie de marché et du couple libre-échange croissance.

– Le refus des États-Unis d'Europe, et d'une américanisation par certains n'interdit pas une identification de l'UE aux idéaux de la mondialisation au travers de l'installation d'un grand marché libéral, d'une dynamique d'élargissements qui convertit certaines économies socialistes à l'économie de marché, d'une concentration des firmes pour les rendre plus opérationnelles, d'une recherche de compétitivité (programme de Lisbonne sur l'Europe première puissance mondiale par sa compétence) des coopérations d'excellence dont le but est de partir à la conquête des marchés mondiaux dans des spécialisations européennes (*cf*. airbus industries).

– L'UE introduit des déréglementations dans des secteurs pourtant protégés : la directive travailleurs détachés fixe le cap d'une mobilité et d'une flexibilité de la main-d'œuvre à l'échelle des 28 pays membres.

– De fait, héritière d'un XIXe où l'Europe a fixé le cap de la mondialisation, l'UE ne se vit pas comme une construction autocentrée. L'UE peut être même considérée comme une « petite mondialisation ». Pour Neil Fligstein et Frédéric Mérand (*Mondialisation et Européanisation ? La preuve par l'économie européenne depuis 1980*) : « La mondialisation n'est donc pas une force mystérieuse échappant au contrôle des gouvernements et pilotée par des entreprises prédatrices. Au contraire, le plus achevé des projets au cœur de la mondialisation fut celui pour lequel des gouvernements ont coopéré le plus intensément. Ils ont produit un ensemble de règles communes et des mécanismes d'application qui ont dans l'ensemble encouragé le commerce entre pays européens… ».

B. Un projet européen bousculé par une mondialisation jugée déstabilisante

Pourtant depuis les années 90 on inventorie souvent les effets déstabilisateurs de la mondialisation.

– Les délocalisations sont vécues comme un événement industriel sans penser aux transferts vers des ex PECO, aux marchés nouveaux ouverts par le passage à l'économie de marché d'économies socialistes.

– La désindustrialisation est conçue comme le lourd tribut payé à la mondialisation : 1,4 millions d'emplois auraient été perdus en France dans l'industrie en 25 ans et au niveau européen l'industrie et la construction, la part des actifs seraient passées de 29 % à 23 %, souvent sans prendre en compte les transferts vers le tertiaire et les gains de productivité… La mondialisation est seule (et à tort) convoquée pour expliquer ce déclin. Et le chômage de masse lié pour Jacques Sapir (*La fin de l'eurolibéralisme*) «la pression du libre-échange coûte à la France directement environ 2 % de la population active en emplois industriels perdus ou non créés. Ceci correspond probablement à une perte globale (avec l'effet multiplicateur habituel de l'emploi industriel sur l'emploi global) de 3 à 3,5 % de la population active»…

– La pauvreté endémique est ressentie comme une mondialisation qui trie, et déclasse ceux qui sont les moins formés, ceux qui ne sont pas des «analysts resolvers», ceux qui n'appartiennent pas à des élites financières sans penser aux insuffisances de l'Europe sociale malgré la charte de Strasbourg.

– Des déclassements industriels sont identifiés à des pertes de compétitivité face à de nouveaux concurrents que les accusations de *dumping* social ou monétaire (*cf*. cas chinois) ne suffisent pas à freiner. L'analyse est parfois sommaire mais il est de bon ton de dénoncer la sinistrose du secteur automobile par l'environnement mondialisé sans penser aux effets d'investisseurs étrangers comme Dong feng chez Peugeot et Tata chez Jaguar.

– Les IDE sont accueillis parfois avec le sentiment d'intrusions intolérables (*cf*. Chine dans la machine outil, ou le photovoltaïque allemand, ou les vignobles bordelais ou de Bourgogne), en oubliant un peu vite les quelques 35 000 emplois préservés ou créés par les investissements étrangers.

– Les déséquilibres dans l'ADT avec primat des grandes métropoles mais le déménagement du territoire est bien antérieur à l'impact de la mondialisation. Les scénarios évoqués dès 2010 par Fitoussi, scénario des villes États où la croissance se concentre sur quelques pôles par le jeu des effets d'agglomération. Ou les analyses de Pierre Veltz et autres Paul Krugman, sur les régions qui gagnent en sédimentant des avantages comparatifs dans la mondialisation, que dire enfin des menaces directes sur la zone euro par les dettes souveraines elles-mêmes rançons de la globalisation financière et des pesanteurs de la gouvernance monétaire européenne, il faut bien le reconnaître. En 2016, la dette des 28 États membres se porte à 83,5 % du PIB. Celle de la zone euro équivaut quant à elle à 89,2 % du PIB, atteignant 179 % du PIB, la dette de la Grèce est la plus élevée d'Europe.

C. La mondialisation vécue non comme une opportunité mais comme une contrainte ?

Le contexte ne peut que conduire à stigmatiser la mondialisation.

– Un contexte où l'Europe connaît une érosion systématique de son importance globale. Edgar Morin : «l'Europe a rétréci. Elle n'est plus qu'un fragment de l'Occident alors qu'il y a quatre siècles l'Occident n'était qu'un fragment d'Europe».

Le rétrécissement est d'abord démographique : l'Europe pesait 22 % de la population au XIXe siècle, au plus fort de son expansion coloniale. C'est exactement ce que pèse la Chine actuellement, alors que les Européens ne correspondent plus qu'à 7 % de la population mondiale. Cet affaiblissement participe du rétrécissement général de l'Occident dans la mondialisation : en 2030, deux habitants de la planète sur trois seront Asiatiques.

– Un contexte de «panne technologique» qui voit l'Europe un peu décalée par rapport aux NTIC (Siemens un des rares constructeurs européens de hard) dans les réseaux (monopole rapidement installé de AGFA) dans des projets.

– Un contexte où l'Europe semble victime de l'onde de choc de la crise des « subprimes » qu'elle subit au niveau des produits toxiques, de l'instrumentalisation des dettes souveraines (*cf*. en Grèce rôle de Goldman Sachs – banque la plus puissante du monde, a spéculé sur le dos de la Grèce tout en se faisant rémunérer par Athènes pour l'aider à gérer la crise…).
– Un contexte où l'Europe ne parle pas d'une même voix : très tôt cavalier seul britannique depuis 1974 (Pac ciblée), ou après 1979 le « *I want my money back* » de Thatcher, Allemagne de plus en plus tentée par l'extension de son hinterland au monde et à un contrôle de l'Europe à la veille de la faillite de Lehman brothers, ou après les incartades de certains pays comme l'Autriche ou certains pays de l'Est qui ont du mal à déléguer leur souveraineté surtout pour les fondamentaux des valeurs européennes. La Pologne par exemple encore aujourd'hui, ou République Tchèque eurosceptique avant l'heure, ou simplement pays méditerranéens brutalisés par la crise et donc contraints à porter un regard critique sur une Europe passive à leur égard.
– Un contexte où le problème de l'intangibilité des frontières du vieux continent émerge étrange préface à une mondialisation assumée après Kosovo, Crimée, et remise en cause de la notion même de frontière au contact du problème des migrations de Syrie, d'Afghanistan… crise de l'Europe puissance d'accueil.

De plus en plus d'opposants sortent de l'anonymat de combat clandestins ou confidentiels pour porter un message anti européen et anti mondialisation (pour certains l'un ne se conçoit pas sans l'autre) comme les indignés nés sur la puerta del sol.
Anti et altermondialistes : le berceau de Attac en France : combat pour un autre monde possible, les populistes et les souverainistes qui réinterprètent avec plus ou moins d'honnêteté statistique la formule de Jean Jaurès « Un peu d'internationalisme éloigne de la patrie ; beaucoup d'internationalisme y ramène » l'armée nouvelle 1910, et plus généralement tous ceux qui derrière l'Europe des nations cachent une volonté de repli frileux et font du protectionnisme la réponse aux excès de la mondialisation.

II/ L'UE est tout à la fois confrontée depuis les années 90 à la concomitance d'une « polycrise » et à une radicalisation des contestations de la mondialisation

A. Les fragilités structurelles de l'UE

– Des choix de mondialisation à des rythmes différents : engagement de la Grande Bretagne qui ne va pas au rythme du social colbertisme gaulois.
– La désaffection vis-à-vis du projet européen or la mondialisation exige un sursaut et une mobilisation collectifs.
– Les divisions intestines sur les solidarités nécessaires face à la mondialisation rendent celles-ci plus inacceptables : migrations incontrôlées, problèmes des dettes souveraines (derrière la crise grecque les responsabilités de Goldman Sachs).
– La fragilité de certaines politiques structurelles et surtout industrielles qui interdisent des réactions collectives, majorent les problèmes : pas d'industries d'armements, pas de logique de coopération malgré des paravents (sidérurgie, automobiles).

– Le vieillissement de l'Europe obscurcit son horizon: En 2015, le nombre des décès sera supérieur au nombre de naissances dans l'Union ce qui s'accompagne de perspectives inquiétantes en termes d'innovation, de tensions sur le marché du travail ou de financement des retraites.

B. L'UE mal préparée pour résister aux effets déstabilisateurs

– Elle n'a aucune voix, en tant qu'Union, dans les grandes institutions internationales, économiques ou politiques, à l'exception de l'OMC. Or les États membres qui participent à ces instances, qu'il s'agisse de l'ONU, du FMI ou du G20, ne pèsent que leur petit poids relatif par rapport aux États-Unis ou à la Chine. Au G20, l'Union n'envoie pas moins de 8 représentants, mais cette surreprésentation quantitative se paie d'une sous-influence politique notoire.
– La crise est une crise de confiance dans le modèle européen: difficile de se projeter dans la mondialisation avec de tels handicaps. La construction européenne n'est plus évaluée comme une réussite exemplaire. L'appauvrissement et la récession plombent les visions d'avenir, une nouvelle fracture Nord-Sud peut à tout moment déboucher sur l'implosion de la zone euro (Grèce), la régression de pays stigmatisés autour de l'acronyme Piigs (Italie Portugal Irlande Espagne), le club méditerranée européen est cloué au piloris, l'Allemagne est ciblée pour son manque de solidarité envers les pays en crise, et le retrait de la Grande Bretagne est une destinée que d'autres envisagent dans un contexte où des régions réclament leur indépendance de la Catalogne à l'Écosse ou la Padanie région imaginaire du Nord de l'Italie;
– Le « soft power » autre parade contre une mondialisation prédatrice est d'autant plus en veilleuse que le « vouloir vivre ensemble » ciment de l'Europe se délite. Le repli derrière leurs frontières des pays de l'Est (provocation de la Hongrie pour faire financer son mur) et la crise d'identité à l'Ouest hésitant entre rôle d'acteur ou de subdélégué des EU, discrédite l'UE.
– L'UE est même considérée comme l'amplificateur des déséquilibres nés de la mondialisation: chômage avec près de 20 millions de personnes sans emploi, le taux de chômage dans l'Union européenne atteint 7,8 % en mai 2017, et 8,7 % dans la zone euro désindustrialisation, régions sinistrées trouvent leur bouc émissaire: la mondialisation libérale acceptée par l'UE sans fixer en quelque domaine que ce soit les règles du jeu. Pire, l'UE est souvent perçue comme un acteur ultralibéral dont les choix sont tenus responsables de la dégradation économique et sociale des classes moyennes.
– L'UE est victime d'une crise de projet enfin, dans la mesure où aucun accord n'existe plus entre Européens sur le rôle et la finalité de l'Union dans la mondialisation. Marcel Gauchet, *la Condition politique, L'Europe cette mixture de bureaucratie et de bons sentiments* « Doit-elle se concevoir comme une protection collective contre les dérèglements de la mondialisation? S'agit-il à l'inverse d'un tremplin et d'un échelon nécessaires pour réussir au sein de l'économie mondiale? L'Union doit-elle subir les règles du jeu mondialisé, au mieux en s'en protégeant, au pire en les contournant? Doit-elle au contraire avoir pour objectif de participer, aux côtés d'autres puissances, à l'écriture des nouvelles règles de la mondialisation à venir? Le projet politique de la construction européenne semblait clair à l'origine des Traités de Rome: la réconciliation franco-allemande et le retour de la prospérité en Europe de l'Ouest. Il était également lisible lors de la chute du communisme: la réconciliation entre les deux parties de l'Europe et l'aide à la démocratisation des

nouveaux pays ex-communistes. Mais le projet du XXIe siècle manque encore d'un grand récit mobilisateur », fondation Schuman.

C. Des mobilisations où populismes et europhobies se conjuguent

– Face à ces carences, il est aisé pour les opposants d'accuser la Mondialisation d'être un libéralisme exacerbé, une américanisation subie, et la dure loi d'un darwinisme industriel.
– Les régions perdantes témoins des agressions de la mondialisation se mobilisent contre (Lorraine contre Mittal, Combats des métallos de Hayange Hagondange).
– La Mondialisation est vite cataloguée de destructrice car l'Europe paraît plus offerte qu'ouverte (Tafta, Ceta). Les nationalismes se crispent au service d'une Europe citadelle. Des peurs sont instrumentalisées par des partis (Front National, Ukip Bepe Grillo et le mouvement des 5 Étoiles).
– Des réquisitoires sont formatés : mondialisation – financiarisation c'est la toute puissance des marchés financiers : où est l'Europe Beveridgienne ? C'est l'américanisation à outrance : où est l'Europe qui se fait par elle-même entre deux blocs ? C'est la régression sociale : où est l'Europe du « bien-être et de tous » ? C'est le nivellement par le bas : où est l'Europe des transferts sociaux, des avancées sociales de la seconde chance ? C'est l'acculturation : où est l'Europe qui donnait par sa technique, ses idéaux, sa civilisation des leçons au monde non sans quelque arrogance au XIXe siècle (P. Lévi Strauss). Ce sont les retours des tribalismes : où est le bien vivre ensemble ?
Tous ces réquisitoires se retrouvent dans une nébuleuse de contestations où la mondialisation coalise contre elle nationalistes, souverainistes, anti et alter mondialistes… opportunistes de tout poil pour dresser le portrait d'une Europe projet inspiré par l'étranger qui s'est fait sans les peuples (J. Quatremer rappelle la formule maladroite du belge P.-H. Spaak « l'œuvre accomplie fut celle d'une minorité sachant ce qu'elle voulait »).

III/ L'europessimisme face à la mondialisation fait le constat de l'impuissance collective mais fait fi des potentiels de l'Europe

A. Les capacités de riposte de l'UE sont souvent à tort minimisées

L'UE n'est pas désarmée.
– Le FEM, Fonds européen d'ajustement à la mondialisation créé en 2006 et doté d'un budget est un amortisseur des conséquences de la mondialisation « pour les plus vulnérables » : C'est dire qu'avec un budget certes restreint (150 millions d'euros pour la période 2014-2020) il tente de faire face aux restructurations dans des entreprises de plus de 500 salariés à l'aval d'une mondialisation agressive (Aide à la recherche d'emploi, formation, reconversion)…
– L'UE peut opérer des rééquilibrages régionaux par le Feder depuis 1975 qui même accusé de compléter les programmes nationaux de ne pas assez promouvoir d'initiatives intraeuropéennes est un élément modérateur des excès de la mondialisation. Complété par le fonds de cohésion articulé sur les fonds structurels, tous ces mécanismes de rééquilibrage ne laissent pas les régions sinistrées sans moyens. (*cf.* dans les RETI régions à tradition industrielles du Nord, Pas de Calais au Limbourg luxembourgeois).
– L'UE est un réducteur d'incertitudes dans les grandes négociations commerciales au cœur de la mondialisation ; L'Europe a une masse critique

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 107 13/10/2017 11:34

qui peut en imposer. Même pour le traité avec le Canada, la Ceta, des garde fous sont installés et à l'OMC, l'UE se fait forte d'obtenir quelques concessions réparatrices (comme dans la renégociation de Blair house au moment du Reagan round agricole). De toute façon la riposte est plus simple et plus efficace à 28 que séparément. L'Europe est représentée soit à titre d'observatrice soit d'actrice directe des grandes institutions de la mondialisation et peut fixer des cadres à l'OMC comme aux conférences sur le climat (à la COP 21 la ratification a été globale pour l'Europe avant que les pays ne ratifient séparément l'accord final).

– L'Europe peut peindre la mondialisation à ses couleurs pour P. Lamy. La construction européenne est un dépassement du vieux système international vers un système de gouvernement démocratique alter-national avancé : elle a le sens du compromis final au terme de marathons dantesques (agriculture, dettes), elle sait conclure des accords pondérés, *in extremis* au terme de négociations laborieuses et en ce sens elle est un laboratoire utile de la mondialisation et de prise de décision collective.

– L'UE ne reste pas sans réaction face aux FMN américaines. L'échec du NTM (new transatlantical market) à l'initiative de la France, la négociation âpre du TIPP bousculé désormais par l'administration Trump, la lutte contre l'optimisation fiscale dans le prolongement d'amendes contre Microsoft ou IBM montrent que l'UE n'est pas passive ; loin de là, elle anime une réflexion sur les paradis fiscaux et le retrait de la Grande Bretagne (le mea culpa du Luxembourg J.-C. Juncker) annoncent certainement des positions plus affirmées.

B. L'UE a de toute façon peu de moyens d'échapper à la mondialisation quels que soient les effets induits et les moyens de s'y préparer

– L'UE puissance commerçante avant tout, donc impactée positivement et négativement.

– Le protectionnisme européen serait contre productif pour l'UE champion mondial à l'exportation, même si certains plébiscitent une préférence communautaire et que l'Europe soit ouverte sans être offerte. La riposte de partenaires pourrait être pire que la solution initiée, et l'UE devrait tirer les leçons des embargos ou des sanctions dans le passé (*cf*. encore aujourd'hui les effets des sanctions contre la Russie sur l'agroalimentaire français). L'interdépendance est féconde : même dans des secteurs comme l'aéronautique Airbus et General Électrique marchent main dans la main, le même General Électrique venu à la rescousse de Alstom. Cas d'école le secteur de l'automobile : Jaguar doit beaucoup à des acteurs étrangers. Nationalisé en 1966 – avant l'entrée du Royaume-Uni dans la Communauté économique européenne en 1973 – puis privatisé en 1984 par Margaret Thatcher, Jaguar est repris par Ford en 1990 à l'occasion d'un vaste mouvement de concentration dans l'industrie mondiale automobile. La marque, qui ne faisait pas partie des priorités de l'américain, a perdu son côté *so british* et a décliné. Aussi, lorsque Ford acculé par la crise des *subprimes* s'est séparée de ses activités les moins stratégiques Jaguar – et Land Rover ont été cédés – au conglomérat indien Tata. Résultat immédiat : un « revival industriel ». Le groupe Jaguar Land Rover, a quadruplé son CA en 6 ans, et est devenu le premier constructeur automobile dans une Grande-Bretagne intégrée à l'UE. Toutefois, le marché britannique ne représente plus que 20 %

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 108 13/10/2017 11:34

des ventes des deux marques, soit moins que pour le reste de l'Europe et la Chine à plus de 20 % chacun. Jaguar a connu une croissance vertigineuse avec, par exemple, une progression de 80 % des ventes mensuelles en février 2017 par rapport à 2016. Deux enseignements : ni l'UE ni la mondialisation ne sont des obstacles industriels !
– L'UE ne peut raisonnablement emboiter le pas du *make america greater* de Donald Trump et au contraire doit saisir l'opportunité d'être aux avant-postes du libre échange désormais. La fébrilité des accords commerciaux asiatiques montre que le balancier penche du côté d'un libéralisme organisé des échanges plus qu'une quelconque idéologie du repli.
– Si l'UE a quelque chose à reprocher à la mondialisation c'est peut être avant tout de ses responsabilités ou des États ou des entreprises elles-mêmes : chez STX, l'accord de « compétitivité » conclu en 2014, par lequel les salariés avaient renoncé à des RTT, signé par les syndicats réformateurs, a peut-être permis de booster les commandes. Depuis, des commandes colossales sur neuf ans ont été signées avec la livraison de 14 paquebots prévues d'ici à 2026 et donner les moyens de résister à la pression de Fincantieri (acquéreur potentiel de 50 % des actions).

C. L'UE rempart paradoxal face à la mondialisation ?

– La force du nombre est un atout : un marché de 508 millions de consommateurs globalement homogénéisés par des normes et des goûts.
– La force d'un marché qualitativement évolué au regard d'un PIB par habitant élevé (34 000 dollars par hab.) est intacte.
– La force d'une créativité qui donne de la plus value mais aussi des gages de qualité et donc de moindre porosité face à la pénétration produits étrangers.
– La force des politiques structurelles pour Pascal Lamy lorsqu'il était Commissaire européen au commerce : « ces politiques communes – politique commerciale, politique agricole, politique de la concurrence, politique structurelle – sont donc l'un des fondements de la solidarité européenne. Face à des réalités qui s'expriment en termes globaux, elles sont autant d'instruments disponibles pour permettre à l'Europe de répondre aux défis de la mondialisation »… Et, il ajoutait : « pour que la mondialisation se fasse au bénéfice de tous ». Politiques de cohésion (développement régional) peuvent être perçues comme des outils pour mieux se protéger contre les effets négatifs de la mondialisation (pour les territoires). Rappelons que ces politiques furent mises en place dans les années 1980 pour accompagner à la fois les élargissements et atténuer les effets négatifs du Grand Marché Unique (pour ces mêmes pays).
– La modernité des principes d'action de l'Union européenne, principal atout d'abord sur le plan économique et financier : une adhésion plus mesurée à l'idée d'une toute puissance des marchés, la nécessité d'une certaine régulation politique des échanges mondiaux et d'un contrôle minimal des opérateurs financiers assortie d'un rôle de l'État en faveur d'une dose de protection et de cohésion sociales, tels sont les éléments d'un modèle européen de développement économique et social, devenu avec la crise plus pertinent que le modèle ultralibéral des Anglo-saxons.
– La modernité sur le plan stratégique : la vision européenne de la sécurité internationale, proclamée dès 2003 dans la stratégie européenne de sécurité ne cesse, partout dans le monde, d'être validée par les faits : que la démocratie ne s'impose pas par la force, que la puissance militaire n'est ni le

seul ni le premier instrument de gestion de crises, que le dialogue avec tous et la négociation multilatérale sont indispensables pour la prévention des conflits, que la pauvreté du monde est aussi déstabilisante que la violence du terrorisme, ce catalogue de bon sens figure en effet au cœur de l'approche stratégique de l'Union et il est chaque jour rappelé par certains comme Emmanuel Macron qui veut retrouver « l'odeur, la couleur, la lecture, tout ce qui fait le sel de l'Europe » et pour ce qui dénonce « le FMI et ses hommes en noir » sur l'échafaud de la Grèce.

– Et qui peut oublier La génération Erasmus porteuse des espoirs européens face à un *american dream* un peu palot sinon en berne après ses années de lustre (concept né en 1931 et son apogée dans les années 60 et 80. Le « rêve européen » serait mieux armé pour nous conduire dans le nouvel âge global parce qu'ils se fonde sur les relations entre communautés plutôt que l'autonomie individuelle, sur la diversité culturelle plutôt que l'assimilation, la qualité de vie plutôt que l'accumulation de la richesse, le développement soutenable plutôt que la croissance matérielle illimitée, les droits de l'homme universels et les droits de la nature plutôt que le droit de propriété, la coopération globale plutôt que l'exercice unilatéral du pouvoir. Le rêve européen n'est pas la fin de l'histoire mais la fin d'une histoire et le début d'une autre écrite à travers de normes nouvelles que l'Europe saura imposer.

– Encore faut-il que l'Europe soit capable de rebondir, de se refonder, de faire un nouveau pari une décennie après ce credo européen de Nicole Gnesotto, *Notre Europe*.

« Les Européens sont pétris de la culture du partage du pouvoir, ils ont su incarner dans la construction européenne *via* notamment les fonds structurels une forme particulièrement généreuse de solidarité entre pays riches et pauvres de la communauté. Or ce modèle européen parce qu'il est une incarnation d'un partage des pouvoirs et des solidarités est exemplaire pour l'établissement d'une structure nouvelle de gouvernance au niveau mondial. Inspirer la structure du monde de demain, fonder le système international de la mondialisation sur le partage du pouvoir politique et la solidarité entre riches et pauvres, y a-t-il puissance plus politique que celle-là ?

Conclusion

Sans nier les effets déstabilisateurs que la mondialisation fait peser sur l'Europe, il faut voir en eux une invite à « un wake up » surtout quand l'Amérique de Donald Trump se replie, à un sursaut car « le plus grand péril qui menace l'Europe c'est la lassitude » disait déjà en 1935 Husserl. Les Européens ne doivent pas considérer l'Europe comme trop ouverte, ni mal armée face à la mondialisation mais ils doivent simplement cesser de chercher des boucs émissaires et poursuivre dans la voie d'une mondialisation maîtrisée. « À la peur de l'avenir ne répondent que les formules creuses des démagogues. Ce qui s'entend, ce n'est pas le refrain du déclin, ni celui de la décadence finale. C'est l'appel du vide ». P. André Taguieff… est-il encore temps ? C'est ce que pense le président de la commission européenne Juncker qui exhorte les Européens à un sursaut fédéraliste (plus de majorité qualifiée pour décider) pour mieux protéger l'Europe de la concurrence, pour contrôler les IDE.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 110 13/10/2017 11:34

HISTOIRE, GÉOGRAPHIE ET GÉOPOLITIQUE DU MONDE CONTEMPORAIN

DURÉE : 4 HEURES.

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document en dehors de ceux fournis au verso ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Le développement de l'Afrique à l'épreuve de la guerre (des années 1960 à nos jours)

DOCUMENTS

Remarque importante : les documents et la carte sont destinés à aider à la réflexion dans le cadre de la dissertation. Ils n'ont pas à faire l'objet d'un commentaire spécifique.

Document 1. Chronologie sommaire

1960-1965 : sécession et guerre civile au Congo (ex « Congo belge »). Intervention militaire de l'ONU.
1962 : accords d'Évian et indépendance de l'Algérie.
1967 : guerre du Biafra (guerre civile du Nigéria) – Guerre des Six jours.
1975-1976 : partition du « Sahara espagnol » et affrontements entre le Marco et l'Algérie.
1975-2002 : succédant à la guerre pour l'indépendance, guerre civile en Angola et ses prolongements internationaux.
1989-2003 : guerre civile au Libéria et son extension à la Sierra Leone.
1991 : début de la guerre civile algérienne.
1994-2003 : génocide rwandais de 1994 et extension du conflit dans toute la région des Grands Lacs et du Zaïre.
2002 : création de l'Union Africaine.
2003 : début de la guerre civile du Darfour.
2012 : conflit armé au Nord du Mali entraînant une intervention militaire française et internationale.
2013 : nouvelle guerre civile en République centrafricaine.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 111 13/10/2017 11:34

Document 2. Dessin de presse (*Les Échos*, 9.11.2012).

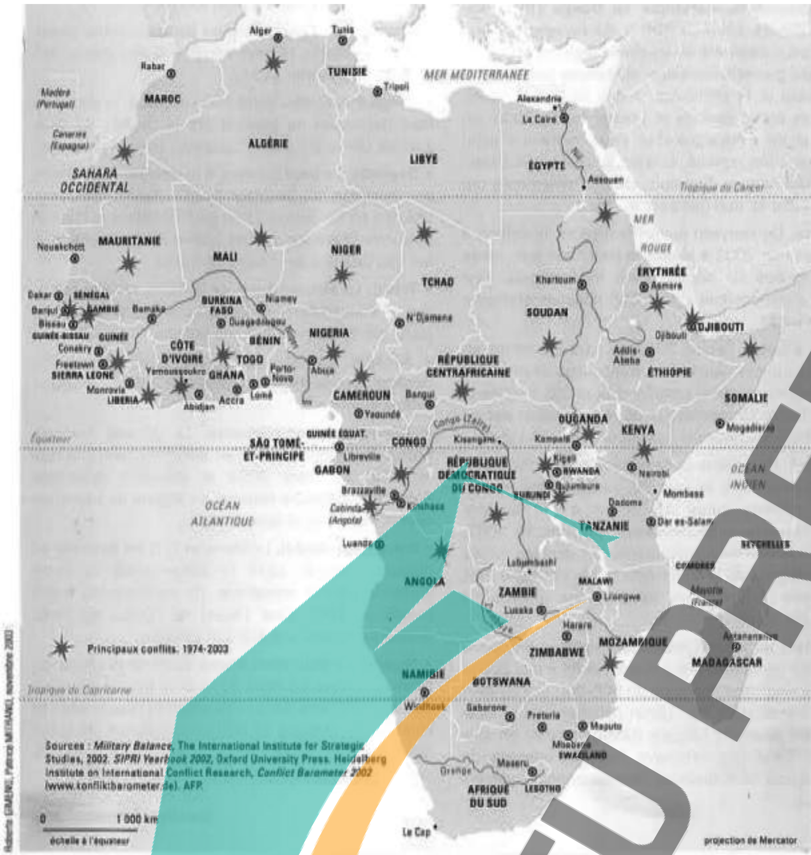
Document 3. La longue guerre froide du Maghreb (*Le Monde* du 21.04.2013).

Le conflit autour du Sahara occidental, une ancienne colonie espagnole annexée par le Maroc en 1975, paralyse le développement d'une union politique et économique dans la région. (…) Une étude du ministère marocain de l'économie publiée en 2008 avait évalué le commerce entre États d'Afrique du Nord à 1,3 % de leurs échanges extérieurs, le taux régional le plus bas du monde. Une autre étude, européenne cette fois, avait calculé, la même année, que l'Algérie importait 0,6 % de ses produits agroalimentaires du Maroc, alors que 40 % provenaient de France et d'Espagne… Depuis, bien peu de choses a changé.

Document 4. Yves Lacoste, La question postcolonie (*Hérodote* n° 120, 1er tr. 2006, p. 26).

« Le grand problème géopolitique de l'Algérie depuis 1990 est l'offensive islamiste qui peut être relancée, celle-ci combinant les contradictions d'ensemble du monde musulman avec les multiples conséquences de la colonisation, celles de la guerre d'indépendance, celles de vingt-cinq ans de socialisme et de dix ans de guerre civile. »

Document 5. « Un continent dévasté par les conflits ».



Source : *Questions internationales*, n° 5, janvier-février 2004.

Document 6. Sylvie Brunel, *L'Afrique*, Bréal, 2004, p. 84.

« La multiplication des conflits a, dans l'intervalle, ouvert de larges balafres dans un continent où la porosité des frontières et l'affaiblissement des États ont favorisé la multiplication des entrepreneurs de guerre »… 35 pays africains en guerre sur 53, le drame du génocide rwandais en 1994 (…) : l'effondrement des États a pour conséquence d'embraser le continent. Parce que la guerre est désormais plus rentable que la paix pour certains groupes politiques, comme pour les enfants soldats qui recrutent – qui puisent dans leurs épopées meurtrières une reconnaissance, un revenu, une famille – l'Afrique présente dans la décennie 1991-2001 à peu près toute la panoplie des conflits.

Document 7. L'Afrique et la croissance en 2016
(source : *Les Échos* 27.09.2016).

Cette année, « seulement » dix des vingt économies les plus dynamiques de la planète sont africaines. Sur la période 2005-2015, c'étaient même douze des pays à plus fort taux de croissance, avec 8 % en moyenne, qui étaient situés sur ce continent ayant longtemps désespéré les économistes. (…) Certes, les participants de cette séquence africaine [*les Rencontres économiques africaines]* à Paris se sont appliqués à rappeler que ces croissances échevelées peuvent s'expliquer par un effet de rattrapage (…).

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 114 13/10/2017 11:34

CORRIGÉ

Par Alain Nonjon, professeur de chaire supérieure.

L'Afrique est le continent de la conflictualité : depuis 1991, l'Afrique a concentré 40 % des conflits mondiaux contre 30 % de la fin des années 1960 à 1989. Le nombre de victimes dépasse celui de toutes les autres guerres réunies. En témoignent les bilans des guerres (RDC plus de 4 millions de morts en 40 ans de conflits, Rwanda en juillet 1994 plus de 800 000 morts) et surtout leurs cortèges de réfugiés (l'Afrique est le continent qui compte le plus de réfugiés et le camp de Dadaab, qui porte la marque de cette histoire troublée avec ses 500 000 réfugiés surtout des Somaliens). L'Afrique même engagée sur la voie d'une renaissance après l'impasse du sous-développement depuis les années 90 en est encore à se poser la question de son essor : est-elle encore mal partie (1960 : PIB par tête de l'Afrique subsaharienne était égal à 5 % de celui des États-Unis… il était de 3 % en 2015) ou si elle est repartie, est-elle bien partie ? Les hésitations viennent de la masse des PMA figés dans leur retard, de l'isolement et de la vulnérabilité de quelques *success stories* souvent liées à des matières premières plus qu'à une véritable stratégie. Tous les échecs posent directement la question du lien entre guerre et développement. L'émergence n'est-elle pas condamnée à n'être qu'une utopie devant la réalité au quotidien de la guerre ? L'Afrique a-t-elle les moyens par elle-même de créer le cadre d'une paix qui serait la matrice d'un nouveau développement ?

I/ Dès les indépendances, le développement de l'Afrique est borné par des guerres spoliatrices

A. Les guerres d'indépendance, véhicules de modèles de développement plaqués

Certes ces guerres expriment des rejets d'une emprise coloniale mais elles vont peser sur la nature du développement.

– Économie de traite et mono-exportation rendant vulnérable aux cours erratiques des matières premières minérales et agricoles (Ouganda ou Rwanda dont les génocides sont concomitants d'une crise du café et de l'étain).

– Un clientélisme qui va être un principe de gouvernement, une corruption pas éradiquée (Sassou Nguesso au Congo), le népotisme qui prépare l'avènement de la fille de E. Santos déjà milliardaire ou la femme de Mugabe.

– Une Kleptocratie installée souvent au travers de dirigeants choisis comme gage de stabilité plus que de probité : les pays arabes avant les printemps en ont été les meilleurs exemples comme les plus anciens dirigeants africains (Sur le continent, sept chefs d'État sont au pouvoir depuis plus de 30 ans dont le président Teodoro Obiang Nguema de la Guinée Équatoriale ou Edouardo Santos en poste depuis 1979 et à 92 ans Robert Mugabe est au Zimbawe au pouvoir depuis l'indépendance en 1980. (Frontières de papier plaquées car confirmées.)

– Un bilatéralisme qui a du mal à être remplacé par un multilatéralisme fécond : cas d'école la Françafrique ou la dépendance dans l'interdépendance de pays comme la Côte d'Ivoire.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 115 13/10/2017 11:34

– L'exode des cerveaux : formation dans les métropoles avec peu de retour ou si retour des schémas pas adaptés aux besoins locaux : drainage des médecins nigérians en Grande Bretagne.
Le post colonialisme est au total plus vecteur de recettes artificiellement plaquées que d'un véritable développement.

B. La guerre froide et ses prolongements : un développement pris en otage

– La Rente minière a expliqué le jeu des grandes puissances sur le continent africain.
– Les affrontements entre maquis s'inscrivent souvent dans le cadre de conflits secondaires dits de substitution où des acteurs locaux agissent pour le compte des États-Unis ou de l'URSS. Entre 1960 et 1965, l'URSS espérait le basculement de l'ex-Congo belge dans le camp socialiste et la « congolisation » de toute l'Afrique centrale par la multiplication des foyers de guérillas. À partir de 1975, Moscou et Washington se sont affrontés en Angola sur la ligne de front des États hostiles à la RSA (Apartheid), l'URSS sous-traitant l'intervention en Angola à ses auxiliaires cubains (50 000 hommes) alors que les États-Unis soutenaient l'UNITA. En 1977-1978 Brejnev l'Africain, à la faveur de la guerre de l'Ogaden a renversé ses alliances dans la Corne de l'Afrique ; les conseillers cubains et soviétiques ont quitté Mogadiscio pour Addis-Abeba. Parfois l'Afrique a été victime par mouvements de libération nationale interposés des affrontements idéologiques entre Moscou et Pékin comme au Mozambique.
– Des conflits internationalisés et longs se nourrissent de la guerre froide et de ses effets de traîne comme en Angola ou en Érythrée. Les seuls conflits en Angola de 1961 à 2002 ont fait un demi million de morts, 500 000 exilés, 4 millions de déplacés pour une population de 12 millions d'habitants dont les 2/3 de la population vivent en dessous du seuil de pauvreté, liens qui sont plus qu'une corrélation, des liens de causalité directe. L'Angola qui émerge en 2017, accueille des multimillionnaires en dollars et anime une immigration en provenance du Portugal mais reste 149e au niveau de l'IDH.
– Des jeux de chaise musicale perturbent le développement (cf. Égypte de l'allié russe à l'allié américain ou la Somalie de l'allié américain à la proximité russe).
– Le loyer géopolitique d'hier demeure souvent sous forme de réseaux et de prébendes avec des évolutions qui propulsent la Chine désormais comme partenaire de choix, (conférence de Pékin réunissant en Novembre 2006, 48 chefs d'État africains) dans un théorique *win win* où la Chine ménage ses intérêts : accaparement de terres, boom des échanges avec des pays pétroliers (plus de 75 % d'importations chinoises d'Afrique sont des ressources naturelles).

C. Les guerres larvées et latentes héritées : un développement siphonné par le coût des guerres

– Le conflit du Sahara occidental est des plus représentatifs : une partie du capital de légitimité du Maroc a été gaspillé ; le pays a quitté l'UA, jusqu'en 2017, l'UMA a été condamné à l'impasse au regard des conflits intestins sur l'aide aux sahraouis entre Alger et Rabat après une « guerre des sables ».
– Les conflits interethniques du Biafra (1967) traduisent les heurts et malheurs de la captation de la rente pétrolière entre les Ibos chrétiens du

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 116 13/10/2017 11:34

Sud et les peuples musulman Nord et l'insécurité du delta du Niger n'y est pas étrangère derrière les coups de main du Mouvement pour l'émancipation du delta. 30 ans de coups d'État et de dictatures militaires… jusqu'à la démocratie retrouvée de 1999 que veut dire alors la 1re place en terme de PIB du Nigéria en Afrique en 2014 quand près des 2/3 de la population sont en dessous du seuil de pauvreté ? La première guerre mondiale africaine des grands lacs et du Congo et le génocide du Rwanda sont des factures très lourdes acquittées au nom du passé et de la gestion des légitimités des ethnies (Tutsis et Hutus). Les colons privilégient les Tutsis, décrits comme des « Européens noirs » et jugés d'intelligence supérieure, au détriment des Hutus qualifiés de « Nègres bantous », réduits à leur condition d'agriculteurs. Les Tutsis étaient prioritaires dans l'accès aux écoles missionnaires et dans le recrutement pour les emplois administratifs. Inutile de dire que les Hutus vivaient leur relégation comme une injustice. De là les enchaînements du génocide de 1994 qui met à genoux l'économie rwandaise (armée portée à 40 000 hommes, infrastructures plus opérationnelles, climat d'insécurité).

– Des conflits potentiels émergent : guerre de l'eau sur le Nil malgré l'accord de 1959, pas de possibilité de pleinement utiliser le pactole du Nil à la fois en termes d'irrigation et d'électricité hydraulique. Tensions depuis le barrage de la renaissance éthiopien inauguré en 2016.

– Des conflits interétatiques territoriaux sont rares mais il existe certains prédateurs de la Libye et le rêve de grande Libye au détriment du Tchad en passant par les guerres expansionnistes en Ogaden ou dans le triangle Éthiopie, Érythrée, Somalie.

II/ Les guerres récentes des deux dernières décennies plombent le développement

A. Des guerres dont le terreau est le mal développement structurel et qui l'aggravent

– Les conflits fonciers : l'accès à la terre dans un contexte de désertification est la base même des conflits ente tribus arabes nomades et populations sédentaires africaines. Le conflit du Darfour est en partie dû à l'exaspération des tensions entre cultivateurs et éleveurs pour l'accès à la terre et aux ressources naturelles.

– Les conflits interethniques. Guerres tribales qui mettent en échec des processus électoraux ; c'est le cas du Kenya dont le dynamisme (leader mondial du paiement mobile) est remis en cause par la vulnérabilité face au terrorisme et des affrontements entre les membres de l'ethnie kikuyu du président Uhuru Kenyatta et des partisans luo de l'opposant Raila Odinga, en août 2017.

– Les conflits à l'aval d'un délitement des États : ainsi peut-on parler du Sud Soudan, le 54e État africain d'État mort né avec la guerre civile qui oppose le chef rebelle Riek Machar et le président Salva Kir, nuits écarlates de terreur depuis 2013 entre Dinkas et Nuer, un État sinistré alors que le jeune État était doté de 75 % de la production pétrolière du Soudan et de la bienveillance des chinois. Les États sont souvent exsangues pour honorer leurs pouvoirs régaliens. Ces États simples garde-barrières ne sont pas aptes à payer les soldats ; la police, et souvent face à cette incurie s'organisent des insurrections (Centrafrique, Kivu).

– La guerre récente contre le terrorisme mobilise des troupes, création de fonds des solidarités fragiles (G5 africain face à Boko Haram et autre Aqmi ou Mujao), détournement des fonds (Muhari au Nigeria est contraint de changer de priorité pour contenir la menace terroriste). Après la Guerre civile algérienne (1991-2002), les 4 élections de Bouteflika sont un gage d'inertie plus que de développement.
– Les conflits sur les matières premières demeurent : la richesse du sous sol est un facteur de conflictualité élevée et la malédiction du pétrole n'est pas qu'une vision pessimiste de l'Afrique : Sao Tomé, comme le Sud Soudan confirment le mot de Jean Giraudoux dans la *folle de Chaillot*. « *Ce qu'on fait avec du pétrole ? De la misère, de la guerre, de la laideur. Un monde misérable.* »
– Les Guerres climatiques s'amplifient avec leur cortège de réfugiés et de migrants subsahariens qui à l'image des malinkés préfèrent travailler à l'extérieur de leur pays plutôt que mourir chez eux.

B. Des guerres aux modalités particulières qui hypothèquent le développement

– La privatisation des guerres et le mercenariat se généralisent : difficile de croire que la convention de 1977 sur la suppression du mercenariat a suffi à éliminer ces « chiens de guerre » ces « affreux » qui étaient intervenus dès les années 1960 au Congo (devenu Zaïre, puis République démocratique du Congo) ; dans les années 1970 et 1980, aux Comores, aux Seychelles, au Bénin, en Guinée, en Rhodésie (devenue le Zimbabwe) et en Angola. Le Royaume-Uni, la France, l'Afrique du Sud et Israël ont été parmi les grands pourvoyeurs de ces « soldats perdus ». Durant ces années dominées par les luttes anticoloniales et la guerre froide, le roi Hassan II du Maroc, le président gabonais Omar Bongo, le régime blanc de M. Ian Smith en Rhodésie (Zimbabwe), ou des dirigeants français comme Jacques Foccart – secrétaire général aux affaires africaines de l'Élysée – et l'ancien premier ministre Michel Debré, député de l'île française de La Réunion, leur avaient apporté un soutien plus ou moins discret… Un des plus emblématiques de ces mercenaires fut M. Robert « Bob » Denard du Katanga (1961) aux Comores (1975) avec le soutien des services secrets français… La Libye de Kadhafi a poursuivi leur recrutement et ils jouent encore un rôle dans les milices de l'après dictature ou dans les raids dans l'arc saháliens. Prêts à s'enrôler auprès du plus offrant ils contribuent à l'instabilité des territoires, ils sont un déni de démocratie, et ils placent le développement des pays africains sous la dictature du hasard. La bonne intention d'observer les élections en Afrique – pour attester de leur sincérité – a fait naître une espèce d'observateurs, lesquels sont prêts à apporter, contre espèces sonnantes et trébuchantes, leur onction à des scrutins calamiteux : ce sont les nouveaux mercenaires.
– Les Enfants soldats. À la Conférence de Paris en février 2007, 105 États membres de l'ONU s'engagent à « libérer de la guerre » les enfants associés aux forces et groupes armés. 10 ans plus tard, sur les 20 pays ou zones concernés figurent des pays africains : République centrafricaine, République Démocratique du Congo, Libye, Mali, Somalie, Soudan du Sud, Soudan. Selon le rapport 2016 de l'Unicef, des filles et des garçons de moins de 18 ans sont recrutés et exploités par des groupes armés dans 20 conflits répartis sur quatre régions du monde : Afrique, Asie, Moyen-Orient

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 118 13/10/2017 11:34

et Amérique latine. L'image du garçonnet africain à la kalachnikov est loin d'être l'unique réalité : la prolifération d'armes légères qui s'adaptent aux petites mains, l'endoctrinement de jeunes enfants intellectuellement malléables, la discrétion des enfants espions, sont des incitations à les recruter… (Soudan jusqu'en 2016).

– Les guerres véhiculent une acculturation sournoise, la culture du kalachnikov, la culture du 4X4 et des pick up des janjawids, la culture des supermen en Somalie (cf. film *la chute du faucon noir*) sont autant de schémas culturels plaqués et régressifs.

– Le Commerce des armes se nourrit d'une mondialisation sans règle. Plus de 100 millions d'armes circuleraient en Afrique. L'Algérie, l'Égypte et le Maroc forment un trio de tête, qui a dépensé à lui seul plus de 11 milliards de dollars entre 2012 et 2016, ce qui place l'armée algérienne entre ses homologues chinoise et turque en termes de dépenses. Derrière, l'Afrique subsaharienne est un peu à la traîne mais le Nigeria et, dans une moindre mesure, le Cameroun, s'illustrent, notamment sous l'effet du conflit engagé contre Boko Haram. On ne peut que s'interroger sur le retour sur investissement de tels choix.

– Des richesses naturelles sont détournées pour acquérir des armes comme les diamants du sang au Libéria ou en Sierra Leone, les minerais stratégiques circulent dans des circuits parallèles comme le coltan (RDC et Rwanda), la déforestation finance la guerre et les contrats miniers signés par la RDC avec la Chine sur le cobalt avaient certes pour but de financer des infrastructures (barrages de l'Inga) mais dévoyés. Ils expliquent l'insurrection du mouvement M23 dès 2012. Au Tchad les royalties pétrolières destinées aux générations futures… sont très vite devenues des liquidités pour protéger Idriss Déby et contrer les maquis venus du Darfour.

Richesses humaines et matérielles font donc cruellement défaut à l'heure des stratégies de développement.

C. Les stigmates des guerres constituent autant de handicaps parfois irréversibles pour un développement futur

– Les réfugiés : L'Afrique subsaharienne est à elle seule la terre d'asile de 4,41 millions de réfugiés (sur un total de 21,3 millions dans le monde) et occupe donc la première place. Leur gestion est souvent chaotique au point que l'horizon d'une vie au-delà des camps n'est plus vraiment envisagé chez les habitants de ces camps comme Dollo Ado (plus de 200 000 habitants) en Éthiopie ou M'bera en Mauritanie (plus de 40 000 habitants). Ces camps se caractérisent par leur longévité : au Kenya, le camp de Dadaab, aujourd'hui le plus grand complexe de camps de réfugiés dans le monde (avec près de 350 000 habitants en 2016), existe depuis plus de vingt-cinq ans. Ses habitants, sont pour la plupart des Somaliens, dont une partie n'a jamais connu d'autre toit que celui de leur tente estampée UNHCR.

– Les victimes des guerres : les femmes. Le viol des femmes et des filles est conçu comme arme de guerre pour terroriser les populations pour les inciter à se déplacer, et ce en toute impunité. Quelques cas de violences sexuelles ont même été enregistrées dans les forces d'interposition de l'ONU ou de l'UA, ce qui accroît incompréhensions et tensions. Enfants soldats les forces vives du développement.

– Les guerres conduisent à des destructions de capital (infrastructures) et de capital humain. Leur coût est élevé et les taux de pauvreté sont estimés

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 119 13/10/2017 11:34

à 20 % supérieurs pour les pays touchés par la violence. Les comparaisons internationales montrent que les guerres (7 ans en moyenne) font chuter les revenus *per capita* de 15 % et amputent de 2 points le taux de croissance. 80 % des PMA ont connu un conflit au cours des 15 dernières années. Insécurité et pauvreté conduisent à des trappes à conflits accroissant les risques de récurrence : 90 % des conflits se déroulent dans des pays ayant déjà connu des conflits. 200 millions d'Africains répartis dans 17 pays sont touchés par des conflits ou l'instabilité politique (Pierre Jacquemot, *L'Afrique des possibles. Les défis de l'émergence*, 2016).

– Dépenses miliaires surdimensionnées : Égypte de Sissi au prix d'une mise en sommeil des réformes (rafales et mistral) prés de 2 % du PIB. Nigéria un des premiers importateurs d'Afrique subsaharienne.

– Les retards des infrastructures ne sont rien aux côtés des effets de déstructuration des sociétés africaines par la guerre. La manipulation des famines au service de causes politiques fait partie des coûts des guerres de plus en plus nombreuses en Afrique. Les guerres en Afrique font désormais parties de ce que les géopoliticiens appellent les nouveaux conflits : conflits de portée limitée ne remettant pas en cause les équilibres internationaux ; des conflits de basse intensité (*low intensity conflicts*) mais surtout des conflits interminables ; parfois médiatisés à l'instar du génocide au Rwanda en 1994 alors que cet épisode avait été précédé par la « Toussaint rwandaise » de 1959 où les Tutsis avaient été chassés par l'installation d'un pouvoir Hutu à Kigali. Un « système de conflits » s'érige donc en Afrique, antagonique au système économique matrice du développement.

III/ L'Afrique est elle condamnée à la guerre et donc au sous-développement ?

Éviter la guerre est-ce nécessairement se développer pour le continent africain ?

A. L'extérieur, garant de la paix ? Un développement sous surveillance

– On ne compte plus les interventions bilatérales extérieures qui ont des relents d'ingérences postcoloniales… dans la logique post guerre froide. Les interventions françaises sont… légion, depuis la répression au Cameroun de l'UPC (union des populations camerounaises, à la guerre d'Algérie achevée sur des traumatismes encore vivaces en 1964, la participation à la lutte contre les rebelles du Tibesti en 1968, et en 1972 avec la pénible affaire Claustre) ou la prise de relais des américains à Kolwezi pour sécuriser le Shaba au Zaïre, l'intervention pour contrer le Polisario en 1977, le soutien à des régimes typiques de la Françafrique comme en 1983 aux côtés de Eyadéma ou en 1990 au Gabon, sans oublier les interventions aux Comores (1989 et 1995) contre les tentatives putschistes de Bob Denard aujourd'hui jugé, et l'opération Licorne en Côte d'Ivoire et un contingent de maintien de la paix avec l'opération Artémis en Ituri en république démocratique du Congo.

– L'ONU (« ce meilleur espoir et ce meilleur investissement » pour Madeleine Albright s'active aussi avec des effectifs (indiens notamment) considérables du Rwanda, au Soudan, en Côte d'Ivoire, comme hier au Congo (première intervention de casques bleus en 1965) – missions Monuc en RDC jusqu'en 2010 la plus importante devenue la Monusco) l'ONUCI en Côte d'Ivoire

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 120 13/10/2017 11:34

depuis 2004, la Minurcat en RCA et au Tchad la Minuad au Darfour dissoute en juillet 2011, la MINUL depuis 2003 au Libéria, la Manurss au Soudan du sud depuis 2011. Parfois réduite au rôle de spectateur comme au Rwanda ou en Somalie elle n'échappe pas aux critiques même si les 16 programmes DDR sur 22 dans le monde (désarmement, démobilisation), réinsertion sous patronage onusien se multiplient. Pour l'ONU le message est clair : « il n'y a pas de paix sans développement et pas de développement sans démocratie ». De là la multiplication des commissions de sanctions (6) en Afrique Subsaharienne pour restaurer paix et sécurité.

– La piraterie devient un thème majeur de mobilisation avec le soutien de l'OTAN.

– Les ONG tentent tant bien que mal de se mobiliser sans être récupérées comme Médecins sans frontières née de la guerre du Biafra (1967-1970) certaines bavures (Arche de Zoé) facilitent leurs critiques : instrumentalisation, et rôle dans la victimisation des populations africaines les ONG sont de plus en plus victimes de la brutalité croissante des conflits (morts, kidnappings (3/100 000 /an en RDC)).

– Le CPI essaie de mettre en accusation tous les anciens dictateurs seigneurs de guerre de Taylor à Hissene Habré (pas encore abandonné par le Sénégal où il a trouvé refuge).

– L'Europe dans sa vocation de puissance normative essaie de prévenir les conflits avec des initiatives originales comme tout sauf les armes (2001) accord commercial par lequel elle s'engage à importer en franchise de douane tous les produits des PMA excepté les armes.

– Beaucoup de dirigeants ont travaillé dans des organisations internationales et font valoir leur expérience de travail en commun au service de la paix (Ellen Johnson, Sirleaf au Libéria prix nobel de la paix 2011, Amadou Toumani Traoré au Mali et Olusegun Obasanjo au Nigeria).

L'impuissance de la diplomatie spectacle, et des grandes puissances apparaît dans des règlements différés comme au Darfour où les grandes puissances sont chacune prise en tenailles dans leurs contradictions.

L'ingérence extérieure n'est pas la panacée : suivisme, immaturité, clientélisme, dérapages, télescopage culturel, incompréhensions et inadéquation des méthodes, sont autant de risques pour le développement si les pays africains se limitent à cela. C'est un peu comme la « politique du cargo » et de l'aide qui a des aspects mercantilo philanthropiques aliénants.

B. La paix par l'Afrique elle-même ? Un espoir de développement assez lointain

Des solutions africaines pour des crises africaines existent-elles ?

– Le panafricanisme renaît au travers de l'Union africaine (UA) qui tente de redorer depuis 2002 le blason de l'ex OUA sur un modèle calqué sur l'Union européenne (désormais l'ONU se prononce clairement pour un financement des interventions qui laisse le terrain à l'UA).

– Les organisations régionales semblent jouer un rôle plus important comme la CEDEAO (communauté économique des États d'Afrique de l'ouest) impliquée dans les conflits du Libéria, de la Sierra Leone, de la Côte d'Ivoire. Le commerce peut être doux (Montesquieu) dès lors que 10 000 produits circulent en franchise au sein de l'Union économique et monétaire ouest africaine.

– Le Nepad peut être aussi un laboratoire d'expérimentation de la bonne gouvernance de son triptyque transparence, gouvernance, et maintenance

peut contribuer à pacifier des zones de conflits notamment avec l'autorité morale de ces leaders (Algérie de Bouteflika, Nigéria de Obasango, Sénégal de Wade, Afrique du sud de Thabo Mbeki).
– L'Afrique du Sud pilote beaucoup d'interventions de pacification comme le traité de Sun city et de Prétoria décisif pour permettre au Congo de vivre ses premières élections libres depuis 40 ans mais le rôle de grande puissance de l'Afrique du Sud est source de méfiances internes (Sénégal) et externes (Brésil).
Les crises maliennes et centrafricaines sont des tournants dans le débat sur la sécurité en Afrique car elles ont montré les limites de la gestion africaine des crises, ce sont les crash test de l'UA ! La CEDEAO a été prise de vitesse par les islamistes de même que la CEEAC et la Micopax mission de consolidation de la paix en RCA présente depuis 2008 a été prise de cours. D'où l'appel à la France, la Force africaine en attente de l'UA était toujours en… attente. De là une gestion métisse des crises. Les transferts des missions de paix à l'ONU comme la Misca en septembre 2014 montrent l'échec de l'UA absente alors que Paris avait alerté dès l'été 2013 pour la RCA. Les grandes puissances africaines ont du mal à assurer leur présence continue, l'Afrique du Sud n'a pas donné suite en Centrafrique, le Nigeria s'est retiré de Misma prétextant le combat contre Boko Haram.
Mais la crise du Sud Soudan est un bon contre exemple car elle a été gérée essentiellement par l'Afrique avec la vive réaction de l'IGAD (autorité intergouvernementale pour le développement). L'Igad a déployé des troupes aux côtés des 12 000 casques bleus présents, l'ONU ne joue qu'un rôle secondaire. Succès de « peacemaking » ? Les récents foyers de reprise de la guerre civile paraissent le démentir.

C. Une prise de conscience salutaire d'une paix vitale : l'ultime chance du développement

– Il n'y a pas de fatalité : le Rwanda renoue avec la croissance et même dans les TIC fait figure de pionnier, mais il faut se garder de toute exagération : avec la stabilité retrouvée depuis le génocide de 1994 le PIB par habitant du Rwanda a certes été multiplié par trois en vingt ans. Mais avec 700 dollars, il reste parmi les plus bas au monde.
– Il n'y a pas de certitude : le Kenya longtemps considéré comme un des symboles du tourisme spectacle revient dans une période d'instabilité à l'occasion des présidentielles de 2017.
– Il n'y a rien d'impossible : ainsi le président Idriss Déby en faisant la guerre contre Boko Haram et pour maintenir la paix au Sahel, vient d'obtenir en septembre 2017 les dividendes de sa lutte contre le terrorisme : un plan de développement sur 5 ans (2017-2021) avec objectif émergence en 2030, financement qui lui aurait été refusé si on avait pris en compte que ses capacités de réforme, il occupe encore le 3e rang des pays les plus pauvres du monde. Soumis à des attaques de l'extérieur, à la présence de 400 000 réfugiés, à des migrations climatiques le Tchad verrou du Sahel, et poste de commandement de l'opération barkhane tire paradoxalement une manne de la guerre.
– Il n'y a qu'une conviction profonde : le développement a besoin du terreau de la paix si l'Afrique veut pouvoir rebondir sur des résultats flatteurs : 10 des 20 économies les plus dynamiques de la planète sont africaines en 2016, en 2015 de parent pauvre des IDE l'Afrique est devenu eldorado. Même illusoire

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 122 13/10/2017 11:34

dans certaines données chiffrées la « moyennisation » des classes sociales en Afrique est en cours. On pense bien sûr aux « petits prospères » du Niger commerçants fonctionnaires, taximan avec activité connexe à l'emploi principal (ventes de sacs bijoux, mécanique) qui se disent ni riches ni pauvres qui échappent à la survie au jour le jour. Certes on peut suspecter la *middle class* d'être une *muddle class* (classe confuse) ? On ne peut oublier que pour la Banque africaine de développement la classe moyenne commence à partir d'un pouvoir d'achat de deux dollars par personne et par jour (en parité des pouvoirs d'achat). Mais il y a dans l'émergence des classes moyennes et l'accès à la consommation peut-être un potentiel de baisse des conflits liés à la pauvreté et aux inégalités. Cécile Nallet, *Afrique contemporaine*, 2012.
– Dans l'hypothétique Chindiafrique, l'Afrique par sa jeunesse rejoint le camp des émergents asiatiques au-delà de l'Afrique du Sud déjà présente dans le G3 IBSA (avec Inde et Brésil). La gouvernance est à bonne école avec la fondation Mo Ibrahim qui chaque année publie un indice évaluant les avancées ou les reculs en matière de bonne gouvernance en Afrique, et récompense depuis 2007 les dirigeants africains qui incarnent un « leadership d'excellence » l'ancien président mozambicain Joaquim Chissano, ou encore à l'ancien président sud-africain Nelson Mandela ont été honorés et taisons le fait que certaines années le prix n'a pu en être accordé.

Le chemin est encore long vers une paix salvatrice. L'Afrique reste mitée de maillons faibles : le « Djihadistan » au Sahel péniblement endigué par les opérations Serval-Barkhane, la Somalie dans la Corne de l'Afrique, les Kivus en Afrique centrale, le Zimbabwe en Afrique australe. Dans de nombreux États, dits les « démocratures » le désordre est un art de gouverner et de faire l'impasse sur l'essentiel comme en RDC et la province du Kasai. De ce fait nombreux sont les États africains qui enregistrent, selon l'expression de l'économiste ghanéen Georges Ayittey, une « croissance sans développement », qui bénéficie à une poignée de riches sans toucher une majorité de pauvres, voire de très pauvres. Cette croissance inégale condamne l'Afrique à rester « un continent riche peuplé de pauvres » : la moitié de la population y vit encore avec moins de 1,25 dollar par jour et Sylvie Brunel peut encore légitimement poser la question « l'Afrique est-elle si bien partie ? » (ed. sciences humaines : 2014). « On ne peut raisonnablement parler de développement sans sécurité », diagnostic de François Hollande au moment de bâtir un partenariat France-Afrique (déc 2013).

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

PROBLEME 1

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déterminer une matrice P de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 124 13/10/2017 11:34

PARTIE II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1,\ X,\ \ldots,\ X^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E, $T(P) = \big(X(X-1)P'\big)'$, où l'accent désigne la dérivation.

Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc

$$T(P) = \big(X(X-1)\,2X\big)' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E.

5. Calculer, pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B}$.

6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

PARTIE III : Intervention d'un produit scalaire

On conserve les notations de la partie **II**.

On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

9. Démontrer : $\forall (P,Q) \in E^2,\quad \varphi\big(T(P),Q\big) = -\displaystyle\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.$

10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
Quel résultat de la partie **II** peut-on retrouver ainsi ?

11. a. Établir : $\forall P \in E,\quad \varphi\big(T(P),P\big) \geqslant 0.$

b. Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi\big(T(P),P\big) = 0$.

PARTIE IV : Retour sur l'exemple de la partie I

On conserve les notations des parties **II** et **III** et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ de E ?

13. En utilisant les résultats obtenus dans la question **3** de la partie **I**, déterminer une base orthonormale $\mathscr{C}$ de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.

14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ de E, un endomorphisme V de E, symétrique pour le produit scalaire φ, tel que :

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E,\quad \varphi\big(V(P),P\big) \geqslant 0 \end{cases}$$

PROBLEME 2

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $\quad H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$.

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.

2. Montrer que H est décroissante sur I.

3. **a.** Calculer $H(1)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $H(n) = 2n\big(H(n) - H(n+1)\big)$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

c. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

d. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H(n) = \dfrac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}$.

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$

4. **a.** Montrer que la fonction $\varphi : u \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser $\varphi^{-1}(0)$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \varphi^{-1}(t)$.

b. A l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, \quad H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\,\mathrm{d}u.$$

5. **a.** Justifier : $\quad \forall u \in [0\,;+\infty[, \quad \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\,\mathrm{e}^u$.

b. En déduire : $\quad \forall x \in I, \quad \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{4^x}{2(2x-1)}$.

6. Déterminer la limite de H en $\frac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. **a.** Montrer : $\quad \forall u \in [0\,;1], \quad \ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{2}$.

b. A l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

c. En déduire : $\quad \forall x \in I, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

d. Montrer : $\quad \forall x \in I, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}$.

e. En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\big(H(n)\big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

a. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b**.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

c. En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

PARTIE IV : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

10. Montrer que f est une densité.

11. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

a. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?

12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f.

On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.

a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b. Justifier : $\forall u \in]0\,;+\infty[,\ \ \mathrm{Arctan}(u) + \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{u}\Big) = \dfrac{\pi}{2}$

et $\mathrm{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

c. Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ \ \mathbf{P}(Z_n \leqslant x) = 1 - \Big(1 - \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\big(\dfrac{x}{n}\big)\Big)^n$.

d. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

EM LYON

Corrigé

Mathématiques Scientifique

Corrigé

Par Jean-Louis Roque, *external lecturer* à ESSEC Business School (jlroque@me.com).

Problème 1

Partie 1

1. Elle n'est pas inversible car sa première colonne est nulle. En revanche sa deuxième et sa troisième colonne forment ouvertement une famille libre — profondeurs différentes *for example* — et nul ne peut alors ignorer que

$$\operatorname{rg} A = 2.$$

2. C'est tout à fait *trigonalement* que nos yeux assénent

$$\operatorname{Spec} A = \{0, 2, 6\},$$

et notre matrice est *suffisamment*(*) diagonalisable car elle possède trois valeurs propres *différentes* alors que 3 est précisément son ordre.

↱ Lorsque n est un entier naturel non nul, nous avons pris l'habitude de qualifier de *stars* les matrices d'ordre n qui possèdent justement n valeurs propres distinctes. Ce qualificatif n'est pas du tout usurpé quand on a compris que ces matrices constituent le *nec plus ultra* de la gente des matrices diagonalisables d'ordre n. Il est d'ailleurs officiellement exigé de savoir que les sous-espaces propres des *stars* sont des droites vectorielles, c'est-à-dire des espaces vectoriels de dimension 1.

3. Le lecteur habile en résolution de systèmes trouvera aisément et sans aucun produit illicite que

$$\mathrm{E}_0(A) = \operatorname{Vect}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{E}_2(A) = \operatorname{Vect}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{E}_6(A) = \operatorname{Vect}\begin{bmatrix}1\\-6\\6\end{bmatrix},$$

en ayant bien entendu tenu compte de la consigne selon laquelle certaines *entries* doivent impérativement être égales à 1. Cela étant, et parce que nous maîtrisons la grande histoire de la diagonalisation et que nous respectons *toutes* les consignes, nous proposons

$$P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -6\\0 & 0 & 6\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix},$$

et tout le monde devrait y trouver son compte.

Partie 2

4. Nous devons y aller en deux temps.

▷ Soit P un élément de E. Vu les innombrables et officielles stabilités de l'environnement polynomial, nous pouvons tout d'abord affirmer que

$$X(X-1)P'$$

(*) C'est une gentille allusion à une très importante condition suffisante de diagonalisation.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 128 13/10/2017 11:34

est à coup sûr un polynôme réel et nous pouvons même ajouter que son degré ne devrait pas excéder $n+1$. Nous savons ensuite que la dérivation le ramenera docilement dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ et nous avons ainsi prouvé que T applique bien E dans E.

▹ Quant à la linéarité de T, nous nous autoriserons à dire tout bêtement qu'elle repose, essentiellement, sur celle de la dérivation.

↱ Nous sommes souvent étonnés de voir que, dans ce genre de sitations, d'aucuns traitent la linéarité, *avant* d'avoir prouvé le côté « application ». C'est quand même quelque part *a world upside down*… Pas vraiment sérieux tout cela !

5. Soit k appartenant à $[\![0, n]\!]$. La *polynomiale attitude*(*) impose une articulation en deux temps.

▹ Si $k=0$, on a $(X^k)' = 0$ et il en résulte dans la foulée que $T(X^k) = 0$.

▹ Si $k \geqslant 1$, nous avons cette fois $(X^k)' = kX^{k-1}$, et un calcul enfantin amène alors à

$$T(X^k) = k(k+1)X^k - k^2X^{k-1}.$$

Grâce à l'important protocole de « matricialisation » on parvient alors gentiment à

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & \\ & 2 & -4 & & & & \\ & & 6 & \ddots & & & \\ & & & \ddots & -k^2 & & \\ & & & & k(k+1) & \ddots & \\ & & & & & \ddots & -n^2 \\ & & & & & & n(n+1) \end{bmatrix}$$

les éléments « oubliés » étant assurément nuls.

↱ Le texte a supposé $n \geqslant 2$, ce qui nous a permis de faire figurer au moins les trois premières colonnes de M. Si l'on avait autorisé les valeurs $n=0$ ou $n=1$, notre matrice eut été sérieusement rétrécie et l'on aurait trouvé $M = [\,0\,]$ dans le premier cas et

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dans le second.

6. La première colonne de M est nulle. La matrice M n'est donc pas inversible. Quant aux autres colonnes de M, elles sont *de visu* de *profondeurs* différentes et elles forment donc une famille libre. Nous devons alors impérativement clamer que

$$\operatorname{rg} M = n.$$

Il reste maintenant à ressortir le Gaffiot(**) du linéariste pour affirmer que T n'est pas bijectif et que

$$\operatorname{rg} T = n.$$

(*) C'est un comportement exemplaire qui consiste, par exemple, à ne pas écrire X^{k-1}, lorsque $k=0$…

(**) En hommage à un très célèbre latiniste, nous appelons ainsi le dictionnaire officiel qui permet de passer de la langue vectorielle à la langue matricielle et Lycée de Versailles.

Observons pour finir que le théorème de monsieur *durang* stipulant que

$$\dim \operatorname{Ker} T = \dim E - \operatorname{rg} T,$$

le noyau de T est une droite vectorielle qui, depuis une fort belle lurette, contient le polynôme 1. Autant dire alors que

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X].$$

7. La matrice M est trigonale supérieure et nos mirettes murmurent à l'oreille que

$$\operatorname{Spec} M = \{k(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}.$$

Un petit coup de Gaffiot plus loin, nous avons bien sûr également

$$\operatorname{Spec} T = \{k(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}.$$

Il suffit alors de se persuader que, lorsque l'entier k déambule dans $[\![0,n]\!]$, les nombres

$$k(k+1)$$

sont deux à deux distincts, et la très fameuse condition *suffisante* utilisée quelues lignes plus haut conduit à la diagonalisabilité de T.

↱ Avec notre langage très personnel et comme nous l'avons évoqué *supra*, l'endomorphisme T est une authentique *star* et tous ses sous-espaces propres sont donc des droites vectorielles. On retrouve ainsi, *via* une autre route, que

$$\dim \operatorname{Ker} T = 1,$$

puisque tout le monde sait que $\operatorname{Ker} T = \mathrm{E}_0(T)$.

Partie 3

8. On rappelle que pour gérer une problématique de produit scalaire on peut s'y prendre en quatre points ou en cinq points. Il va être commode ici de le faire en cinq. *Here we go !*

▷ Soit P et Q deux éléments de E. Les polynômes étant continus sur $\mathbb{R}$, le produit PQ est en particulier continu sur le *segment* $[0,1]$ et son intégrale a alors tout à fait droit de cité. Ainsi, φ applique bien $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

▷ La symétrie de φ ne mérite rien de plus que *no comment* puisque la multiplication dans $\mathbb{R}$ est commutative.

▷ On fixe $Q \in E$. La linéarité de l'application

$$P \mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

repose avant tout sur celle de l'intégration, même si quelques arguments de distributivité doivent venir émailler l'affaire.

▷ Soit $P \in E$. Nous avons

$$\varphi(P, P) = \int_0^1 P^2(x)dx,$$

et cette quantité est ouvertement positive ou nulle car c'est *carrément* le cas de P^2 et que l'intégration est croissante quand les bornes le veulent bien.

▷ Soit pour finir P appartenant à E vérifiant $\varphi(P, P) = 0$. Cela s'écrit

$$\int_0^1 P^2(x)dx = 0,$$

et nous mettons alors en avant les réalités suivantes :

▷ les bornes d'intégration sont *différentes* ;

▷ la fonction intérieure — la fameuse intégrande — est continue et de signe constant sur $[0, 1]$.

Nous sommes alors supposés savoir en déduire que

$$\forall x \in [0, 1], \qquad P^2(x) = 0 \quad i.e. \quad P(x) = 0,$$

et comme le segment $[0, 1]$ est un ensemble infini, le polynôme P possède une infinité de racines, ce qui ne lui présage pas un très grand avenir ! Bref,

$$P = 0,$$

et nous pouvons envisager la suite.

↱ Il y a de nombreux produits scalaires archi renommés sur les espaces de polynômes. Celui qui nous concerne est celui d'Adrien-Marie Legendre sur le segment $[0, 1]$.

Autre chose, le texte garde dans toute la suite la notation φ pour le produit scalaire, au lieu de lui substituer une notation genre $<, >$, comme cela se pratique pourtant très souvent. On peut sûrement regretter ce choix.

9. Soit P et Q deux éléments de E. Nous avons

$$\varphi(T(P), Q) = \int_0^1 T(P)(x)Q(x)dx$$

et vu les origines *dérivatives* de $T(P)$ nous sommes quasiment contraints de nous intéresser aux deux applications

$$u : x \mapsto Q(x) \quad \text{et} \quad v : x \mapsto x(x-1)P'(x).$$

Elles sont, très polynomialement, de magnifique classe sur $\mathbb{R}$ et tout particulièrement de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ et l'on a

$$\forall x \in [0, 1], \qquad u'(x) = Q'(x) \quad \text{et} \quad v'(x) = T(P)(x).$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 131 13/10/2017 11:34

Au vu et au su du faciès de v, il est totalement indéniable que

$$\big[uv\big]_0^1 = 0,$$

et le théorème d'intégration *por partes* apporte alors sur un plateau l'égalité espérée qui peut plus élégamment s'écrire

$$\varphi\big(T(P), Q\big) = \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)dx.$$

10. Soit à nouveau P et Q appartenant à E. D'après la précédente question nous avons déjà

$$\varphi\big(T(P), Q\big) = \int_0^1 x(1-x)P'(x)Q'(x)dx,$$

et grâce à un gentil *swap*(P, Q) et la symétrie du produit scalaire, nous revendiquons également

$$\varphi\big(P, T(Q)\big) = \int_0^1 x(1-x)Q'(x)P'(x)dx.$$

Il s'ensuit alors commutativement que

$$\varphi\big(T(P), Q\big) = \varphi\big(P, T(Q)\big),$$

chronique d'une symétrie attendue. On retrouve ainsi, mais *via* le théorème spectral, la diagonalisabilité de T. En revanche, cela ne permet pas de redémontrer son immense côté *star*…

11.a. Soit P appartenant à E. Grâce à l'élégante égalité mise en place à la question 9, nous avons

$$\varphi\big(T(P), P\big) = \int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2 dx,$$

et il suffit d'utiliser la même argumentation que celle développée au quatrième point de la question 8, après avoir *carrément* observé que

$$\forall x \in [0,1], \qquad x(1-x)\big(P'(x)\big)^2 \geqslant 0.$$

b. Nous nous y prenons en deux temps.

▹ Soit P appartenant à E vérifiant

$$\varphi\big(T(P), P\big) = 0.$$

Cela s'écrit

$$\int_0^1 x(1-x)\big(P'(x)\big)^2 dx = 0,$$

et en utilisant la même rhétorique qu'au cinquième point de la 8, nous parvenons cette fois à

$$\forall x \in [0,1], \qquad x(1-x)\big(P'(x)\big)^2,$$

et autant dire alors que, pour tous les réels x de l'*ouvert* $]0,1[$, nous avons $P'(x) = 0$. Seulement voilà, l'ouvert $]0,1[$ est un ensemble tout aussi infini que son cousin segment et c'est exactement comme *supra* que nous assénons que

$$P' = 0.$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il doit naturellement s'ensuivre que P est un polynôme constant.

▹ Supposons, réciproquement, que P soit un polynôme constant, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}_0[X]$. La *kernly* question 6 oblige $T(P) = 0$ et l'on a *a fortiori*

$$\varphi\big(T(P), P\big) = 0.$$

Bref, les polynômes recherchés sont *exactement* les polynômes constants, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{R}_0[X]$.

Partie 4

12. C'est à la surprise générale que l'on découvre que

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(T) = A,$$

où A a été apercue lors de la première partie.

↱ D'aucuns pourraient être complètement défaits de trouver, pour l'endomorphisme *symétrique* T, une matrice qui n'est absolument pas symétrique ! Cependant et quand on domine son cours, il n'y a aucun péril en la demeure. Cet état de chose démontre simplement que la base $\mathscr{B}$ n'est pas orthonormale pour le produit scalaire φ, et puis c'est tout !

13. La question 3 de la première partie s'est chargée de mettre en avant les éléments propres de la *matrice* A, en l'occurrence

$$\mathsf{Spec}\, A = \{0, 2, 6\},$$

$$\mathsf{E}_0(A) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathsf{E}_2(A) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathsf{E}_6(A) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix}1\\-6\\6\end{bmatrix},$$

et grâce à un petit coup de Gaffiot, nous en déduisons ceux de l'*endomorphisme* T à savoir

$$\mathsf{Spec}\, T = \{0, 2, 6\},$$

$$\mathsf{E}_0(T) = \mathsf{Vect}\,(1) \quad ; \quad \mathsf{E}_2(T) = \mathsf{Vect}\,(1 - 2X) \quad ; \quad \mathsf{E}_6(T) = \mathsf{Vect}\,(1 - 6X + 6X^2),$$

le spectre ayant été également et par ailleurs obtenu lors de la question 7.

Les *pros* de la fabrication de bases *orthonormales propres* pour les endomorphismes symétriques connaissent *farpaitement* la musique. Il faut uniquement

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 133 13/10/2017 11:34

▷ obtenir des bases orthonormales de chacun des sous-espaces propres par le biais, la plupart du temps, du fameux procédé de Jorgen Gram et Ehrard Schmidt ;

▷ concaténer tout cela en tenant compte des consignes, si consignes il y a.

Here we go !

▷ Les sous-espaces propres étant ici de dimension 1, les *Gram Schmidt process* permettant d'obtenir des bases orthonormales sont réduits à peau de chagrin ! Il suffit en effet de procéder à de toutes bêtes divisions par la norme correspondante. *As usual*, nous noterons $\| \ \|$ la norme euclidienne attachée au produits scalaire φ et nous avons donc

$$\|1\|^2 = \int_0^1 dx,$$

et

$$\|1-2X\|^2 = \int_0^1 (1-2x)^2 dx \quad ; \quad \|1-6X+6X^2\|^2 = \int_0^1 (1-6x+6x^2)^2 dx.$$

Des calculs genre « amie de la poésie bonsoir ! » conduisent alors à

$$\|1\|^2 = 1 \quad ; \quad \|1-2X\|^2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad \|1-6X+6X^2\|^2 = \frac{1}{5},$$

et nous avons pour bases orthonormales respectives de nos espaces propres les familles

$$(1) \quad ; \quad (\sqrt{3}(1-2X)) \quad ; \quad (\sqrt{5}(1-6X+6X^2)).$$

▷ la concaténation qui respecte la consigne de croissance, produit alors la base orthonormale

$$\mathscr{C} = (1, \sqrt{3}(1-2X), \sqrt{5}(1-6X+6X^2)),$$

qui devrait satisfaire *everybody*.

14. Nous ne sommes évidemment pas surpris par l'égalité

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{C}}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

et comme nous maîtrisons habilement la *diagonalitude*, nous sommes pratiquement contraints de définir matriciellement notre endomorphisme V par

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{C}}(V) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Il est en effet tout à fait évident que $V^2 = T$ et nous ajoutons que $\mathscr{C}$ étant orthonormale, notre nouveau venu V est un endomorphisme symétrique de E puisque les matrices diagonales réelles sont évidemment symétriques réelles et qu'il existe sur le marché une fondamentale caractérisation matricielle de la symétrie.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 134 13/10/2017 11:34

Soit alors pour finir un élément P de E et notons

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{1}$$

la liste de ses coordonnées dans notre base orthonormale. Ce n'est qu'une matricielle formalité que de déduire que la liste des coordonnées de $V(P)$, toujours dans la même base, est

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\,b \\ \sqrt{6}\,c \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Maintenant, et au risque de fortement radoter, nous insistons *adonf* sur l'orthonormalité de $\mathscr{C}$ qui permet de mettre en exergue l'*awesome* propriété « produit scalaire en base orthonormale ». Cette dernière affirme que le produit scalaire

$$\varphi\big(V(P), P\big)$$

est exactement le produit scalaire *canonique* des deux colonnes (1) et (2) *supra*, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}\,b \\ \sqrt{6}\,c \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,b^2 + \sqrt{6}\,c^2,$$

dont la positivité n'aura échappé à personne. Il semble alors bien que notre contrat soit rempli.

↱ Un endomorphisme symétrique u d'un espace euclidien $(\mathcal{E}, <\,,\,>)$ vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{E}, \qquad < u(x)\,,\, x > \geqslant 0,$$

est appelé endomorphisme symétrique *positif* et c'est d'ailleurs une notion importante quasiment à la limite du programme officiel. On note parfois

$$\mathcal{L}_s^+(\mathcal{E})$$

l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de $\mathcal{E}$.

Si $\mathcal{E}$ est maintenant un espace vectoriel quelconque et si u est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, on appelle assez naturellement « racine carrée » de u, tout endomorphisme r de $\mathcal{E}$, vérifiant

$$r^2 = u.$$

On démontre alors — c'est un exercice très classique — *the square root theorem* selon lequel

$$\forall u \in \mathcal{L}_s^+(\mathcal{E}), \quad \exists\,!\, r \in \mathcal{L}_s^+(\mathcal{E}), \qquad r^2 = u,$$

ce qui, en français, signifie que tout endomorphisme symétrique positif u possède une *unique* racine carrée symétrique positive r.

Mettons-nous bien d'accord, l'endomorphisme u peut posséder une palanquée de racines carrées, mais, parmi les endomorphismes symétriques positifs, il en possède une et une seule et elle est internationalement notée

$$u^{1/2}.$$

Forts de toutes ces informations, il semble que le texte nous ait fait découvrir un endomorphisme V qui n'est autre que

$$V = T^{1/2}.$$

La partie « existence » de V a été parfaitement couverte, mais on peut sûrement regretter que la partie « unicité » ait été complètement occultée. Une autre fois peut-être…

Problème 2

Partie 1

1. Soit x un élément de I. Comme nous maîtrisons toutes les finesses(*) concernant les fameuses fonctions « puissance », et comme

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad 1 + t^2 > 0,$$

nous clamons la continuité sur $[0, +\infty[$ de la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^x},$$

à telle enseigne que l'intégrale définissant $H(x)$ n'est impropre qu'en plus l'infini. Mais il est indéniable que

$$\frac{1}{(1+t^2)^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2x}} \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 1, \quad \frac{1}{t^{2x}} \geqslant 0.$$

Comme x appartient à I, nous avons $2x > 1$, ce qui assure une paisible existence à la référence riemannienne

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}},$$

et, par équivalence en signe positif, il devrait en être de même de la cousine

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x}.$$

L'intégrande de cette dernière étant, depuis longtemps, continue sur $[0, +\infty[$, un important *théorème* de Michel Chasles — *cf.* la première remarque *infra* — assure que les deux intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x}$$

(*) Et Dieu sait s'il y en a !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 136 13/10/2017 11:34

sont de même nature et nous pouvons donc envisager la suite.

↱ D'aucuns invoquent à cet endroit la *relation* de Chasles ! Il est totalement impossible qu'elle fasse le job puisque c'est une simple égalité qui n'a jamais eu vocation à *prouver* des existences d'intégrales. En revanche le *théorème* de Chasles auquel nous faisons allusion, *démontre* que, sous certaines conditions, quelques intégrales sont de même nature, et est donc profondément au cœur du débat.

↱ Conformément à la requette du texte, nous avons établi que H est au moins définie sur l'intervalle I. Le lecteur malin pourra vérifier que la preuve que nous venons de donner n'est pas loin de révéler qu'en réalité

$$\operatorname{def} H = I.$$

2. Soit x et y deux éléments de I vérifiant $x < y$, et t un élément de $[0, +\infty[$. Comme

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1,$$

les *pros* de l'exponentiation doivent savoir en déduire que

$$\frac{1}{(1+t^2)^y} \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^x},$$

et l'on en déduit immédiatement que

$$H(y) \leqslant H(x),$$

puisque l'intégration est croissante lorsque les bornes le veulent bien.

3.a. Vu la position géographique de 1 par rapport à sa montié, on a sans autre explication

$$H(1) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

b. Comme n et $n+1$ appartiennent à I la situation est sous contrôle et la linéarité de l'intégration amène tout d'abord en douceur à

$$2n\big(H(n) - H(n+1)\big) = 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

Nous observons alors que les deux fonctions

$$u : t \mapsto t \quad \text{et} \quad v : t \mapsto -\frac{1}{(1+t^2)^n}$$

sont assurément et *rationnellement* de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad u'(t) = 1 \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{2n\,t}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

En outre et parce que n n'est pas nul, le produit uv a la limite finie 0 en plus l'infini. Comme l'on a également $uv(0) = u(0)v(0) = 0$, le théorème d'intégration impropre *by parts* stipule que

$$2n\big(H(n) - H(n+1)\big) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n},$$

ce qui n'est pas du tout pour nous déplaire.

↱ Contre toute attente, nous sommes depuis un certain temps au XXI^e siècle, mais le théorème d'intégration impropre par parties n'est toujours pas au programme de nos classes. Le lecteur obéissant devra donc rédiger cette intégration

▷ en annonçant *first* un réel $A > 0$;

▷ en procédant à une intégration par parties *propre* sur le segment $[0, A]$ *via* les mêmes fonctions u et v que celles que nous avons sélectionné *supra* ;

▷ en légitimant pour finir la possibilité de passer à la limite lorsque A tend vers plus l'infini.

Il reste alors à redire pour la 6174^{ième} fois que n n'est pas nul et que par conséquent et tout à fait mentalement

$$H(n+1) = \frac{2n-1}{2n} H(n).$$

c. Voilà notre proposition.

```
n = input (' Entrer une valeur de n : ')
  H = %pi/2
  for i = 1 : n-1
     H = (2*i-1)*H/(2*i);
  end
disp ('And the winner is ') ; disp (H)
```

d. Une récurrence de Cotonou et un *nanochouia* d'habileté calculatoire viennent à bout de l'affaire. Nous laissons au lecteur méfiant, le soin d'en rédiger les détails.

Partie 2

4.*a*. La fonction φ est à n'en pas douter de classe(*) $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et nous avons immédiatement

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(u) = e^u + e^{-u},$$

et il en résulte *de visu* que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(u) > 0.$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, notre application φ est désormais *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$ et c'est déjà une excellente nouvelle. Comme elle y est continue et que, sans aucune indétermination, nous avons

$$\varphi(u) \xrightarrow[u \to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad \varphi(u) \xrightarrow[u \to +\infty]{} +\infty,$$

(*) Nous n'avons pas lésiné sur la classe de φ car, comme le signale la maxime de Duracell, qui peut le plus, peut le moins. Nous n'utiliserons cependant que sa dérivabilité en question a et sa classe $\mathcal{C}^1$ en question b.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 138 13/10/2017 11:34

elle réalise effectivement une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, car il existe sur le marché un important théorème de la bijection strictement monotone.

Comme

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \varphi(u) = +\infty,$$

il suffit de se mettre la tête à l'envers pour asséner tranquillement que

$$\varphi^{-1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi^{-1}(t) = +\infty,$$

↱ Il y a ici un gros parfum de trigonométrie hyperbolique.

Dans la littérature, la fonction φ est appelée « sinus hyperbolique » et son international logo est « $\mathtt{sinh}$ » et sa dérivée φ' est son compère « cosinus hyperbolique » ayant pour logo « $\mathtt{cosh}$ ». Il est à noter que le formulaire de trigonométrie hyperbolique est *presque* un copier-coller de celui de trigonométrie classique — dite trigonométrie circulaire — et ce n'est pas vraiment étonnant car, si l'on en croit les formules de Leonhard, nous avons

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathtt{cosh}(iu) = \mathtt{cos}\, u \quad \text{et} \quad \mathtt{sinh}(iu) = i\,\mathtt{sin}\, u.$$

b. Soit x appartenant à I. Vu ce qui vient d'être narré à l'instant, on déduit aisément que la fonction

$$u \mapsto \varphi(u)$$

réalise une bijection croissante de $[0, +\infty[$ sur lui-même et selon l'important théorème de changement de variable, nous déduisons que

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(u)}{\big(1+\varphi^2(u)\big)^x}\, du.$$

Nous avons déjà observé que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

et il est très facile de parvenir — c'est la formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique — à l'égalité

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathtt{cosh}^2\, u - \mathtt{sinh}^2\, u = 1,$$

qui se décline ainsi en

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad 1 + \varphi^2(u) = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2.$$

Quelques simplifications tranquilles et un *nanochouia* de linéarité conduisent alors au résultat souhaité, que nous préférons écrire

$$H(x) = 2^{2x-1} \int_0^{+\infty} (e^u + e^{-u})^{1-2x}\, du.$$

5.a. Soit u un réel *positif* ou nul. Après avoir mis en avant la désopilante banalité

$$0 \leqslant e^{-u} \leqslant e^{u},$$

nous pouvons passer à la question suivante.

b. Soit x appartenant à I et u appartenant à $\mathbb{R}_+$. Comme $1-2x$ est négatif, il résulte aisément de la précédente que

$$2^{1-2x}e^{-(2x-1)u} \leqslant (e^u+e^{-u})^{1-2x} \leqslant e^{-(2x-1)u},$$

qui se transforme positivement et opérationnellement en

$$e^{-(2x-1)u} \leqslant 2^{2x-1}(e^u+e^{-u})^{1-2x} \leqslant 2^{2x-1}e^{-(2x-1)u}.$$

Vu qu'en réalité $2x-1$ est *strictement* positif, il est bien connu que la référence exponentielle

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u}du$$

mène une paisible existence et vérifie l'égalité

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2x-1)u}du = \frac{1}{2x-1}.$$

L'encadrement mis en place quelques lignes plus haut, la croissance de l'intégration — les bornes n'y sont pas opposées ! — et un *picochouia* de linéarité permettent alors de conclure tranquillement l'affaire.

6. Il est tout d'abord évident que

$$\frac{1}{2x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}]{} +\infty,$$

et vu la partie gauche de l'encadrement de la toute récente question b, c'est *by squeeze* à l'infini que nous assénons que

$$H(x) \xrightarrow[\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}]{} +\infty.$$

Notons ensuite que

$$2^{2x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}]{} 1,$$

de sorte que, quasi mentalement

$$H(x) \underset{\substack{x\to 1/2\\ x>1/2}}{\sim} \frac{1}{2x-1}.$$

Partie 3

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 140 13/10/2017 11:34

7.a. Il y a sûrement bien des manières d'aborder une telle question. Nous optons pour un argument de concavité. La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave sur l'intervalle $[0,1]$ puisqu'elle y est ouvertement de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa dérivée, en l'occurrence,

$$u \mapsto \frac{1}{1+u},$$

y est assurément décroissante. Comme l'équation de la corde tendue entre les points d'abscisses 0 et 1 a une équation qui devrait rappeler de bons souvenirs aux potaches de la fin du collège, nous nous permettons d'en déduire que

$$\forall u \in [0,1], \qquad \ln(1+u) \geqslant \ln 2\, u,$$

et comme nul ne peut ignorer que

$$\ln 2 \geqslant \frac{1}{2},$$

nous pouvons savourer notre plaisir en signalant, cependant, que la positivité de certains protagonistes a été fortement appréciée.

b. Il est *normalement* recommandé de savoir que, tout réel *strictement* positif σ, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt$$

existe et vaut $\sigma\sqrt{2\pi}$. Un joli argument de parité fait alors que sa moitié de copine

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt$$

existe également et que

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit alors $x \in I$. Ce dernier étant *strictement* positif, le choix

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

semble parfaitement judicieux et nous revendiquons ainsi l'existence de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt.$$

ainsi que la valeur

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-xt^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

c. Soit x appartenant à I et t appartenant au segment $[0,1]$. Comme c'est aussi le cas de t^2, il résulte du récent a légèrement exponentié que

$$1+t^2 \geqslant e^{t^2/2},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 141 13/10/2017 11:34

et l'élévation à la puissance *négative* $-x$ devrait nous déposer en douceur sur

$$0 \leqslant (1+t^2)^{-x} \leqslant e^{-xt^2/2},$$

la positivité ajoutée sur le côté gauche, ne pouvant troubler que certains neurasthéniques chroniques. La croissance de l'intégration — encore elle ! — assure alors que

$$0 \leqslant \int_0^1 (1+t^2)^{-x} dx \leqslant \int_0^1 e^{-xt^2/2} dt,$$

puisque les bornes l'ont bien voulu, et il reste à évoquer la positivité d'une certaine intégrande stipulant que

$$\int_0^1 e^{-xt^2/2} dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt^2/2} dt,$$

pour que le récent b se charge de conclure l'affaire.

d. Soit à nouveau x appartenant à I. Étant très bien entendu que

$$\forall t \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et que $2x-1$ est positif, nous revendiquons

$$\forall t \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^x} \leqslant \frac{1}{t^{2x}},$$

et comme la référence riemannienne

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}},$$

a déjà eu l'occasion de faire parler de son existence, c'est par le sempiternel argument de croissance déjà utilisé mille fois que

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^x} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}}.$$

Le lecteur rompu aux références intégrales et à leurs valeurs — quand elles existent s'entend ! — n'oserons pas contredire l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2x}} = \frac{1}{2x-1},$$

et nous pouvons donc passer à la question suivante.

e. Soit $x \in I$. Il résulte des deux dernières question et de la relation de Chasles que

$$0 \leqslant H(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + \frac{1}{2x-1},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 142 13/10/2017 11:34

et c'est grâce à un très gentil *squeezing process* que l'on parvient à

$$H(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons avant de commencer que la question 3.d de la première partie suffit à mettre en lumière l'indispensable *stricte* positivité de $H(n)$, sans laquelle son logarithme… Tout est donc sous contrôle.

a. Soit derechef $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à la question 3.b et à notre passage sur les bancs de la terminale scientifique, nous avons

$$u_{n+1} - u_n = \ln\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) + \frac{1}{2}\ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big),$$

et le développement limité officiel au voisinage de 0

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2),$$

permet d'en déduire en un tournemain que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{8n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Seulement voilà, cette dernière assertion est exactement la *définition* de l'équivalence

$$u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{3}{8n^2}.$$

b. Nous mettons en avant l'équivalence obtenue à l'instant, la convergence de la série de Riemann de paramètre 2 ainsi que le crucial argument de signe

$$\forall n \geqslant 1, \qquad -\frac{3}{8n^2} \leqslant 0.$$

Tout cela devrait satisfaire tout le monde, puisqu'il existe sur le marché un important test d'équivalence en signe (localement) négatif, un argument de *picolinearity* — pour la gestion de la constante $-3/8$ — ayant cependant participé aux rouages de la machine.

c. Nul ne peut officiellement ignorer la géniale « *passerelle suite-série* » selon laquelle la *suite* (u_n) et la *série*

$$\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n),$$

sont de même nature. Il ressort alors du récent b que la suite (u_n) est convergente et nous nous empressons de noter ℓ sa limite. La légendaire continuité de l'exponentielle stipule dans la foulée que

$$e^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell},$$

ce qui, après notre passage sur les bancs de la fin du lycée, se métamorphose en

$$H(n)\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}.$$

Comme le réel e^ℓ n'est pas nul, cette dernière « flèche » de limite se transforme en l'équivalence

$$H(n)\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^\ell,$$

et il reste à proposer

$$K = e^\ell,$$

en insistant fortement sur sa criante positivité stricte.

9. Il s'agit d'une de ses parfois délicates problématiques de passages de propriétés concernant des *integers* à des propriétés analogues portant sur des *reals* dans lesquelles le concept de « partie entière » est souvent fortement sollicité.

Soit donc x un réel, que nous supposons confortablement supérieur ou égal à 1 et profitons-en pour noter

$$n_x = \lfloor x \rfloor.$$

Étant donné que, nous avons *entièrement*

$$1 \leqslant n_x \leqslant x \leqslant n_x + 1,$$

et que H est décroissante sur I, nous avançons tranquillement que

$$H(n_x+1) \leqslant H(x) \leqslant H(n_x),$$

et comme à l'évidence

$$n_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

la précédente question, profitant du caractère *integer* de n_x, ne laisse aucune place au doute. Nous devons avoir tout d'abord

$$H(n_x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n_x}} \quad \text{et} \quad H(n_x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{n_x+1}}. \tag{EQ}$$

Seulement voilà, comme nul ne s'opposera à l'équivalence

$$n_x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} n_x,$$

et qu'il est officiellement indéniable que

$$\lfloor u \rfloor \underset{u\to+\infty}{\sim} u,$$

nous pouvons très largement améliorer les deux équivalences (EQ) en les transformant en

$$H(n_x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad H(n_x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}},$$

puisque l'équivalence est, entre autres, légendairement compatible avec les *légales* élévations à la puissance $1/2$. Les deux extrêmes de l'encadrement *supra*

$$H(n_x+1) \leqslant H(x) \leqslant H(n_x),$$

ont donc le même équivalent et c'est par un *squeeze* d'équivalence, que le lecteur justifiera sans peine, que nous assénons

$$H(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{K}{\sqrt{x}}.$$

↱ La fonction H a des liens très étroits avec la célèbre fonction W de John Wallis facilement définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$\forall x > -1, \qquad W(x) = \int_0^{\pi/2} \cos^x u \, du,$$

et qui avait déjà fait parler d'elle dans le sujet de la même école de l'année 1996.

Soit en effet x appartenant à I. Le lecteur pugnace constatera que, *via* le changement de variable $t = \tan u$, effectué sur l'intégrale $H(x)$, il s'avère que

$$H(x) = W(2x - 2),$$

le réel $2x - 2$ étant, fort heureusement, strictement supérieur à -1. Dans ces conditions, les habitués de la sphère *wallisienne* ne doivent pas être surpris par les résultats de la première partie et pire, ils se doivent de connaître la vraie valeur de la constante K, qui se trouve, en réalité, être la magnifique

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Avis aux amateurs !

Partie 4

10. La fonction f est parfaitement définie sur $\mathbb{R}$, elle y est ouvertement à valeurs positives ou nulles, elle n'a manifestement qu'une seule discontinuité et nous avons déjà signalé que $H(1)$ existe et que

$$H(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Quod quaeris !

11.a. Soit x un nombre réel. Une gentille gestion des facettes de l'application f conduit *caïman* mentalement à

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ \dfrac{2}{\pi} \operatorname{Arctan} x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

b. Étant donné que

$$\frac{t}{1+t^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t},$$

EM LYON

CORRIGÉ

SCIENTIFIQUE MATHÉMATIQUES

le lecteur maîtrisant ses classiques — signe ambiant, références riemanniennes, test des équivalents — conclura que X ne possède pas d'espérance et qu'en conséquence elle a encore moins de variance.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On ne le répétera jamais assez, M_n n'est absolument pas le *maximum* des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, pour la simple et bonne raison qu'elles n'en possèdent pas, mais en revanche et même si cela dérange, nous avons plutôt

$$M_n = \sup(X_1, \ldots, X_n).$$

a. Soit x un nombre réel. La sempiternelle lapalissade du « sup » se traduit *as usual* par

$$\big[M_n \leqslant x\big] = \bigcap_{i=1}^{n} \big[X_i \leqslant x\big],$$

ce qui a déjà le privilège, comme nous allons bientôt le constater, de *démontrer* que M_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé sur lequel sont définies les variables X_i et que nous nous permettrons de baptiser $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$, puisque le texte n'a pas jugé bon de le faire.

Pour chaque entier $i \in \mathbb{N}^*$, puisqu'il est précisé que X_i est une variable aléatoire réelle sur notre espace, nous sommes tenus de savoir que

$$\big[X_i \leqslant x\big] \in \mathcal{A},$$

et comme les tribus sont, entre autres, stables par intersection finie, nous avons également

$$\big[M_n \leqslant x\big] \in \mathcal{A},$$

ce qui termine ce petit épisode tribal. Cela étant, et compte tenu de la mutuelle indépendance et de l'isonomie — la même loi — des variables X_i, nous assénons très *nautiquement* que

$$F_{M_n}(x) = \big(F_X(x)\big)^n.$$

↱ En vue d'argumentation future, nous allons quelque peu approfondir l'affaire. Les origines densitaires de la variable X font que la fonction F_X est ouvertement continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et ces deux propriétés sont *généreusement* transmises à la fonction

$$F_{M_n} = F_X^n.$$

Bref, la variable aléatoire M_n est également à densité et nous saurons nous en souvenir.

b. Notons momentanément μ — comme Machin ! — la fonction parfaitement définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall u \in \,]0, +\infty[, \qquad \mu(u) = \operatorname{Arctan} u + \operatorname{Arctan} \frac{1}{u}\cdot$$

Elle est très pertinemment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a presque mentalement

$$\forall u \in \,]0, +\infty[, \qquad \mu'(u) = 0.$$

Seulement voilà, il se trouve que $]0,+\infty[$ est un authentique *intervalle* de $\mathbb{R}$ ce qui permet à la fonction μ d'y réclamer sa *constance*, et comme

$$\mu(1) = 2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2}\cdots$$

↱ Voici une vieille anecdote qui devrait éveiller les méfiances de nos lecteurs dévoués. Notre gentille fonction μ est en réalité *farpaitement* définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et un jour d'un certain mois de mai des années 80 un texte de concours, que nous ne nommerons pas, demandait le calcul de $\mu(u)$ pour tout u réel non nul. On a évidemment comme *supra*

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \qquad \mu'(u) = 0,$$

et, à l'époque, pas loin de 98% des candidats ont dramatiquement répondu que μ était constamment égale à $\pi/2$ sur $\mathbb{R}^*$ alors que la réalité est bien différente puisque

$$\forall u \in \mathbb{R}^*, \qquad \mu(u) = \mathrm{Arctan}\,u + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{u} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad u > 0, \\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad u < 0, \end{cases}$$

ce qui constitue d'ailleurs l'un des aspects des fameuses formules de John Machin.

Au risque de radoter, cette anecdote mérite que l'on clame dans les chaumières qu'une *dérivée nulle* n'a pratiquement jamais entraîné une *constance* vu que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont rares(*), voire très très rares !

Il nous reste maintenant à justifier une gentille équivalence. Nous le faisons, par exemple, en notant que

$$\mathrm{Arctan}\,0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}'\,0 = 1,$$

et en s'appuyant sur la définition et sur quelques conséquences de la dérivabilité ponctuelle que nous résumons dans le résultat suivant.

DÉRIVABILITÉ ET ÉQUIVALENCE

Soit f une application numérique de variable réelle définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0. On suppose que f est dérivable en zéro. Alors,

i. on a, au voisinage de 0, et quoi qu'il arrive

$$f(u) - f(0) = uf'(0) + o(u)\,;$$

ii. en outre, si $f'(0) \neq 0$, on a l'équivalence

$$f(u) - f(0) \underset{u\to 0}{\sim} uf'(0).$$

Bien entendu, tout le monde aura bien reconnu ici les premiers pas vers l'exquis théorème de Brook Taylor, William Henry Young et l'acolyte Colin Maclaurin !

(*) Si l'on choisit au hasard une partie de $\mathbb{R}$, la probabilité qu'il s'agisse d'un *intervalle* est nulle ! *So*…

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 147 13/10/2017 11:34

c. Soit x un réel quelconque pour l'instant et organisons-nous *un poquitín*.

▷ Si x est strictement positif, étant donné les strictes positivités des uns et des autres(*) nous avons sans ambage

$$\left[Z_n \leqslant x\right] = \left[M_n \geqslant \frac{n}{x}\right],$$

et cela démontre que

$$\left[Z_n \leqslant x\right] \in \mathcal{A},$$

puisque M_n a récemment gagné ses galons de variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$.

▷ Si x est maintenant négatif ou nul, il est positivement acquis que

$$\left[Z_n \leqslant x\right] = \varnothing,$$

et il est bien connu que l'ensemble vide appartient à toutes les tribus du monde ! Nous avons ainsi établi que Z_n est également un authentique *alea numérique* sur notre espace probabilisé.

↱ Le texte semble faire fi des problématiques *tribales* que nous avons cru bon de mettre en avant par deux fois. Nous nous sommes donc sentis obligés de combler ces manques car n'est pas variable aléatoire qui veut, même si…

Revenons maintenant à nos moutons en annonçant $x > 0$. D'après ce que nous venons de constater, nous avons déjà

$$\mathrm{p}(Z_n \leqslant x) = \mathrm{p}\left(M_n \geqslant \frac{n}{x}\right) = 1 - F_{M_n}\left(\frac{n}{x}\right),$$

la dernière égalité reposant fermement sur la providentielle avancée *densitaire* que nous avons faite à l'issue de la question 12.*a* ainsi que sur l'adage bien connu selon lequel les variables à densité ne chargent rien sur leur passage. La stricte positivité de n/x, les questions 11.*a*, 12.*a* et la formule de Machin de la 12.*b* font alors *in fine* que tour à tour

$$\mathrm{p}(Z_n \leqslant x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{n}{x}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{n}\right)^n,$$

ce qui ne peut que nous satisfaire.

d. Soit n un entier naturel non nul, x un nombre réel et reprenons notre indispensable organisation.

▷ Si x est négatif ou nul, il est quasiment dit un peu plus haut que

$$F_{Z_n}(x) = 0,$$

et il en ressort évidemment que

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

(*) Celle de M_n repose sur l'excellente idée du texte d'imposer des X_i à valeurs strictement positives !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 148 13/10/2017 11:34

▷ Si $x > 0$, le lecteur futé vérifiera aisément la stricte positivité du réel

$$1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n},$$

qui autorise la *neperienne* action grâce à laquelle

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n}\Big)^n = n\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n}\Big)\cdot$$

Vu qu'il est indéniable que

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

l'équivalence standard

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

nous amène gentiment vers

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2n}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n},$$

que la fin de la récente question b métamorphose transitivement en

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{\pi}\cdot$$

Comme le *right hand side* ne dépend pas de n, il s'ensuit inexorablement que

$$\ln\Big(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{2x}{\pi},$$

et puisque la fonction exponentielle est continue, nous avons également

$$\Big(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{n}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2x/\pi}.$$

Autant dire alors que finalement

$$F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-2x/\pi}.$$

Le résultat de toutes ces courses est donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-2x/\pi} & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

et l'impétrant *expoaffuté* concluera haut et fort que

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathfrak{Z},$$

où $\mathfrak{Z}$ est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $2/\pi$, ce qu'il est autorisé de résumer en

$$Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}\Big(\frac{2}{\pi}\Big)\cdot$$

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Notations et Objectifs :

Soit E un espace vectoriel réel et A une partie non vide de E.
Soit a un élément de A, on dit que a est un point extrémal de A si:

$$\forall (x,y)\in A^2,\ \left(\frac{x+y}{2}=a\right)\Rightarrow (x=y=a).$$

Les parties 0 et I permettent de se familiariser avec la notion de point extrémal.

La partie II prouve que les points d'une partie donnant le diamètre de cette partie sont extrémaux.

Enfin la partie III étudie des propriétés des matrices de permutation, en particulier de l'isobarycentre de ces matrices. On obtient finalement une preuve du fait que les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutation.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 150 13/10/2017 11:34

Partie 0 : Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$.

1- On prend ici $E=\mathbb{R}$ et $A=]0,1[$, montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.

2- On considère maintenant $E=\mathbb{R}$ et $A=[0,1]$, montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

Partie I : Étude d'un second exemple dans $M_2(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, on note A_2 l'ensemble $\left\{M_\alpha=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & \alpha\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ \alpha\in[0,1]\right\}$ et J la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Par ailleurs, I_2 désigne la matrice identité dans $M_2(\mathbb{R})$.

3- Description et propriétés des éléments de A_2.

a- Vérifier que : $A_2=\{\alpha I_2+(1-\alpha)J,\ \alpha\in[0,1]\}$.

b- Soient (α,β) de $[0,1]^2$ et (M_α,M_β) dans A_2^2, montrer que : $\frac{1}{2}(M_\alpha+M_\beta)\in A_2$.

c- Déterminer les éléments M_α de A_2 qui sont inversibles dans $M_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de α de $[0,1]$ $(M_\alpha)^{-1}$ appartient à A_2.

4- Points extrémaux de A_2.

a- Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A_2.

b- Soit α dans $\left]0,\frac{1}{2}\right]$, vérifier que : $M_\alpha=\frac{1}{2}(M_{2\alpha}+J)$; en déduire que M_α n'est pas extrémal.

c- Par une méthode similaire, montrer que si α est dans $\left[\frac{1}{2},1\right[$, M_α n'est pas extrémal.

5- Réduction simultanée des matrices de A_2.

a- Déterminer les valeurs propres et espaces propres de la matrice J.

b- Montrer qu'il existe une matrice inversible P dans $GL_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout α de $[0,1]$, $P^{-1}M_\alpha P$ est une matrice diagonale D_α, on précisera P et D_α.

c- On note u_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice M_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les réels α de $]0,1]$ tels que u_α soit un projecteur de $\mathbb{R}^2$. On précisera l'image et le noyau du ou des projecteurs ainsi trouvés.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 151 13/10/2017 11:34

Partie II : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien.

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension finie non nulle, muni d'un produit scalaire noté $\langle \ | \ \rangle$. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée.

On considère A une partie non vide de E telle qu'il existe un réel R positif tel que, pour tout vecteur v de A, on ait : $\|v\| \le R$.

6- Montrer que l'ensemble $\{\|v-w\| ; (v,w) \in A^2\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Cet ensemble admet donc une borne supérieure.

On note alors $\delta(A) = \sup\{\|v-w\| ; (v,w) \in A^2\}$, $\delta(A)$ est appelé diamètre de A.

Dans la suite de cette partie, on suppose que la partie A vérifie la propriété (H) suivante :

(H) : Il existe (a,b) dans A^2 tel que $\delta(A) = \|b-a\|$.

On se propose de démontrer que a est un point extrémal de A.

7- On considère donc (c,d) dans A^2 tel que $\dfrac{c+d}{2} = a$.

a- Vérifier que : $\|a-b\| \le \frac{1}{2}(\|c-b\| + \|d-b\|) \le \|a-b\|$.

En déduire que : $\|c-b\| = \|d-b\| = \delta(A)$.

b- Vérifier que : $\|c-b\|^2 = \|c-a\|^2 + \|a-b\|^2 + 2\langle c-a | a-b\rangle$.

En déduire que : $\|c-a\|^2 = -2\langle c-a | a-b\rangle$.

c- Montrer de même que : $\|d-a\|^2 = -2\langle d-a | a-b\rangle$.

d- Montrer alors que $c-d$ et $a-b$ sont orthogonaux.

e- En déduire que a, c et d sont égaux et conclure.

Partie III : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux.

Dans tout la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et on note $E = M_n(\mathbb{R})$,

$$A_n = \left\{ M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{i,j} \geq 0, \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1 \right\}$$

est l'ensemble des matrices bistochastiques de $M_n(\mathbb{R})$.

F_n est l'ensemble $\left\{ M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{R}) \,/\, \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 0 \right\}$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

Enfin, $B_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

8- Premières propriétés de A_n.

a- Soit (M, M') dans A_n^2, montrer que : $\frac{1}{2}(M + M') \in A_n$, et que : ${}^tM \in A_n$ (${}^tM$ désigne la matrice transposée de M).

On note $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ (toutes les composantes de X_0 sont égales à 1).

b- Soit M de A_n, montrer que : $MX_0 = X_0$.

c- Réciproquement, soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ $m_{i,j} \geq 0$, $MX_0 = X_0$ et $({}^tM)X_0 = X_0$, montrer que : $M \in A_n$.

d- Soit (M, M') de A_n^2, montrer que : $MM' \in A_n$.

9- Endomorphismes et matrices de permutation.

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même. Le cardinal de S_n est $n!$.

Soit σ de S_n, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que : pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

On note M_σ la matrice de f_σ dans la base B_0, on dit que M_σ est la matrice de permutation associée à σ.

a- Si σ est l'identité de $[\![1,n]\!]$ (pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$), que sont f_σ et M_σ ?

b- Si σ est une permutation de S_n, montrer que : $M_\sigma \in A_n$. Déterminer τ de S_n telle que ${}^tM_\sigma = M_\tau$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 153 13/10/2017 11:34

c- Soit (σ,σ') de $(S_n)^2$, montrer que $f_\sigma o f_{\sigma'} = f_{\sigma o \sigma'}$; en déduire que M_σ est inversible et déterminer $(M_\sigma)^{-1}$.

d- Justifier que les matrices M_σ sont des matrices orthogonales.

e- Justifier que les matrices M_σ sont exactement les matrices présentant sur chaque ligne et chaque colonne une fois la valeur 1 et $n-1$ fois la valeur 0.

10- Soit σ de S_n, montrer que M_σ est un point extrémal de A_n.

11- Étude d'un projecteur : on note $p = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ et $P = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma$.

a- Soit τ fixé dans S_n, montrer que l'application $\varphi_\tau : \sigma \mapsto \tau o \sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même. Montrer alors que : $f_\tau o p = p$.

b- En déduire que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

c- Montrer que : $\mathrm{Im}(p) = \{x \in \mathbb{R}^n / \forall \sigma \in S_n, f_\sigma(x) = x\}$.

d- Montrer alors que : $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(x_0)$ où $x_0 = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

e- Calculer ${}^tP$; en déduire que p est un projecteur orthogonal et déterminer P.

f- Vérifier que $P \in A_n$.

12- Diamètre de A_n.

a- Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sont deux matrices de E, calculer $Tr({}^tMN)$.

b- Montrer que l'application $(M,N) \mapsto Tr({}^tMN)$ est un produit scalaire sur E.

Si (M,N) sont dans E, on note $(M|N) = Tr({}^tMN)$ et $\|M\|_2 = \sqrt{Tr({}^tMM)}$.

c- Soit σ de S_n, calculer $\|M_\sigma\|_2$.

d- Dans cette question seulement, on suppose que $n=2$. Soit (α,β) dans $[0,1]^2$ et (M_α, M_β) de A_2^2, calculer $\|M_\alpha - M_\beta\|_2$. Montrer alors que $\delta(A_2) = 2$.

e- On revient au cas général : $n \geq 2$. Soit M de A_n, montrer que $\|M\|_2^2 \leq n$.

f- Montrer alors que, pour tout (M,N) de A_n^2, $\|M-N\|_2 \leq \sqrt{2n}$.

g- Soit σ dans S_n, construire τ dans S_n tel que $(M_\sigma | M_\tau) = 0$.

h- En déduire le diamètre de A_n et retrouver que les matrices de permutation sont des points extrémaux de A_n.

13- Structure et dimension de F_n.

a- Vérifier que F_n est un sous-espace vectoriel de E.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 154 13/10/2017 11:34

b- Soit $\Phi : F_n \to M_{n-1}(\mathbb{R})$ qui, à toute matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de F_n, associe la matrice $\Phi(M) = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2}$. Montrer que Φ est un isomorphisme de F_n dans $M_{n-1}(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de F_n.

14- On désire montrer que les matrices de permutation sont les seuls points extrémaux de A_n. On raisonne par récurrence sur $n \geq 2$, on note (P_n) la proposition :

(P_n) Si M est un point extrémal de A_n, M est une matrice de permutation.

a- Vérifier, à l'aide de la partie I, que la proposition (P_2) est réalisée.

On considère n un entier naturel supérieur ou égal à 3 tel que (P_{n-1}) soit réalisée et on se donne $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in E$ un point extrémal de A_n.

On suppose d'abord que la matrice M a au moins $2n$ coefficients non nuls : il existe $2n$ couples $(i_k, j_k)_{k\in[\![1,2n]\!]}$ deux à deux distincts tels que m_{i_k,j_k} est non nul.

On pose alors $H = Vect\left(E_{i_k,j_k} ; k \in [\![1,2n]\!]\right)$ où les matrices $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ sont les matrices élémentaires de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire : $E_{i,j}$ est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ayant n^2-1 coefficients nuls et un seul valant 1, placé en position (i,j).

b- Montrer que $H \cap F_n \neq \{0\}$.

c- On prend N dans $H \cap F_n$ avec $N \neq 0$ et, pour t réel, on note $Q_t = M + tN$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout t de $]-\varepsilon, \varepsilon[$, Q_t est dans A_n.

d- En considérant t de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et les matrices Q_t et Q_{-t}, montrer que l'on aboutit à une contradiction.

On a donc prouvé que la matrice M a au plus $2n-1$ coefficients non nuls.

e- Montrer alors qu'il existe une colonne de M n'ayant qu'un terme non nul et que ce terme vaut 1.

On note s l'indice d'une telle colonne et r l'indice de la ligne telle que $m_{r,s} = 1$.

f- Justifier que la ligne d'indice r de M a tous ses coefficients nuls sauf $m_{r,s}$.

g- On considère alors la matrice M' obtenue à partir de M en lui enlevant la colonne d'indice s et la ligne d'indice r, montrer que M' est dans A_{n-1} et que M' est un point extrémal de A_{n-1}.

h- En déduire que M' est une matrice de permutation de A_{n-1} et que M est une matrice de permutation de A_n.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 155 13/10/2017 11:34

CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, *external lecturer* à ESSEC Business School (jlroque@me.com).

Nous signalons que la définition de l'extrémalité d'un point a peut être simplifiée en

$$\forall (x,y) \in A^2, \qquad \frac{x+y}{2} = a \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

et nous ne l'oublirons pas. Une autre chose, comme nous allons le rencontrer maintes fois, nous noterons $\mathfrak{J}$ le segment $[0,1]$.

Partie 0

1. Soit a un élément de l'ouvert $]0,1[$. Le plus simple est de faire un dessin et de distinguer deux cas.

▹ Si $0 < a \leqslant 1/2$, les réels

$$x = a - \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad y = a + \frac{a}{2},$$

appartiennent ouvertement à $]0,1[$, vérifient

$$\frac{x+y}{2} = a$$

parce que l'on a tout fait pour, et sont manifestement très différents. Le point a n'est donc pas extremal.

▹ Si $1/2 < a < 1$, on procède *mutatis mutandis* mais avec cette fois

$$x = a - \frac{1-a}{2} \quad \text{et} \quad y = a + \frac{1-a}{2}.$$

↱ Il eut été possible d'éviter les deux cas en considérant le réel

$$\eta = \min(a, 1-a) > 0,$$

et en proposant

$$x = a - \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad y = a + \frac{\eta}{2},$$

mais comme nous savons que les $\min$, les $\max$ et autres $\inf$ et $\sup$, donnent parfois des migraines ophtalmiques à nos lecteurs…

2. Soit a appartenant cette fois au fermé $\mathfrak{J}$ et organisons-nous naturellement.

▹ Si a appartient à l'ouvert $]0,1[$, grâce aux mêmes acolytes

$$\eta \quad ; \quad x = a - \frac{\eta}{2} \quad ; \quad y = a + \frac{\eta}{2},$$

qui ont permis au migraineux de réussir la question 1, le point a n'est pas extremal.

▹ Si $a = 0$, et si x et y sont deux éléments de $\mathfrak{J}$ vérifiant

$$\frac{x+y}{2} = 0, \quad i.e. \quad x + y = 0,$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 156 13/10/2017 11:34

le fieffé argument des sommes nulles de réels positifs ou nuls oblige $x = y = 0$ et 0 est bel et bien extremal.

▷ Si $a = 1$, et si x et y sont deux éléments de $[0, 1]$ vérifiant

$$\frac{x+y}{2} = 1, \quad i.e. \quad (1-x) + (1-y) = 0,$$

le même fieffé impose $x = y = 1$, et nous pouvons envisager la suite.

Partie 1

Il suffit de bien ouvrir les mirettes pour constater que les matrices appartenant à A_2 sont exactement les matrices $(2, 2)$ réelles, dont les entrées sont positives ou nulles et telles que la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est égal à 1. Ces matrices sont appelées matrices bitochasiques d'ordre 2 et elles seront généralisées à l'ordre n un petit peu plus loin.

Les matrices bistochastiques jouent un grand rôle en mathématique et tout particulièrement en calcul des probabilités.

3.*a*. *No comment !*

↱ Cette dernière et triviale égalité a cependant le privilège de mettre en lumière que A_2 est l'ensemble des combinaisons convexes(*) des vecteurs I_2 et J

$$A_2 = [I_2, J],$$

qui s'appelle « segment » d'extrémités I_2 et J dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La notion de *segment* d'un espace vectoriel réel figurait dans l'ancien programme mais comme il y a toujours de l'érosion…

b. Simple formalité, puisque lorsque α et β appartiennent à $\mathfrak{I}$, on a mentalement

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \in \mathfrak{I},$$

et il en résulte aussi facilement que

$$\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \tag{MP}$$

jolie précision que nous appellerons « *middle property* » lorsque nous en aurons l'utilité.

↱ Nous insistons sur une chose importante. Le texte a décidé, *manu militari*, de n'autoriser la notation M_{yo} qu'à la condition *sine qua non* que « *yo* » soit un élément de $\mathfrak{I}$. Nous saurons ne pas le perdre de vue.

c. Soit α appartenant au segment $[0, 1]$. Nous avons aisément

$$\det M_\alpha = 2\alpha - 1,$$

(*) On appelle ainsi les importantes combinaisons linéaires à coefficients positifs de somme 1.

et par conséquent

$$M_\alpha \text{ inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\cdot$$

Supposons désormais que la matrice M_α soit inversible. D'après l'incontournable formule des cofacteurs nous revendiquons

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha-1}\begin{bmatrix} \alpha & \alpha-1 \\ \alpha-1 & \alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{2\alpha-1}I_2 + \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}J,$$

et il faut alors s'organiser un peu.

▷ Si α vérifie

$$0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} > 0.$$

Ces signes contraires nous font oublier la combinaison convexe et M_α^{-1} n'a aucune chance d'appartenir à A_2.

▷ Si α est maintenant tel que

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1,$$

c'est *mutatis mutandis* que nous affirmons que M_α n'appartient pas à A_2.

▷ Si $\alpha = 0$, on a alors

$$M_\alpha^{-1} = J \in A_2.$$

▷ Si $\alpha = 1$, on a cette fois

$$M_\alpha^{-1} = I_2 \in A_2.$$

En résumé, lorsque M_α est inversible, on a l'équivalence

$$M_\alpha^{-1} \in A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1.$$

4. Nous commençons par deux utiles observations. Lorsque α est un élément de $\mathfrak{I}$, nous avons les anodines équivalences logiques

$$M_\alpha = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{et} \quad M_\alpha = J \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

a. Nous les prenons l'un après l'autre.

▷ Soit α et β deux éléments du segment $\mathfrak{I}$ tels que

$$\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = I_2,$$

ce qui, depuis quelques lignes, s'écrit également

$$M_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = I_2.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 158 13/10/2017 11:34

La première des anodines conduit alors à

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1,$$

et d'après l'extrémale question 2, il advient que $\alpha=\beta$, c'est-à-dire

$$M_\alpha = M_\beta,$$

chronique d'une *extrémalitude* annoncée !

▷ Si maintenant nos deux compères vérifient

$$\frac{M_\alpha+M_\beta}{2}=J \quad i.e. \quad M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=J,$$

la seconde anodine amène cette fois et facilement à

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=0,$$

et l'extrémale…

b. Vu l'idyllique position de α, les réels α et 2α appartiennent docilement à $\mathfrak{I}$ — tout est donc sous contrôle — et comme depuis la nuit des temps $J=M_0$, la géniale *middle property* garantit qu'effectivement

$$M_\alpha=\frac{M_{2\alpha}+J}{2}.$$

Signalons maintenant que, *because* $\alpha\neq 0$, on sait que $M_{2\alpha}\neq J$ et, compte tenu de notre toute première mise au point, M_α n'est extrémal.

c. On procède bien sûr *mutatis mutandis* en ayant pris cette fois la peine de justifier soigneusement l'égalité

$$M_\alpha=\frac{M_{2\alpha-1}+I_2}{2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de se charger de l'intendance.

↱ Nous prenons le temps de revenir sur le résultat de la récente question 3.c qui mérite un peu de considération. Comte tenu des résultats de cette quatrième question, nous y avons appris que les matrices M_α qui sont inversibles et dont l'inverse appartient encore à A_2 sont précisément les éléments extrémaux du segment A_2.

5.a. Soit λ un nombre réel. Nous avons

$$\det(J-\lambda I_2)=\lambda^2-1,$$

et il en ressort très tranquillement que déjà

$$\operatorname{Spec} J=\{-1,1\}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 159 13/10/2017 11:34

C'est ensuite dans la même sérénité que notre dévoué lecteur trouvera

$$\mathsf{E}_{-1}(J) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{E}_1(J) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

↱ Nous laissons au lecteur malin le soin de découvrir au moins deux raisons menant à la diagonalisabilité de J.

b. C'est à la surprise générale que nous proposons

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

puisque les *pros* de la diagonalisation savent depuis peu qu'elle est inversible et que

$$P^{-1}JP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Si maintenant α est un élément de notre vénéré $\mathfrak{I}$, nous avons tour à tour

$$P^{-1}M_\alpha P = P^{-1}\big(\alpha I_2 + (1-\alpha)J\big)P = \alpha I_2 + (1-\alpha)P^{-1}JP = \begin{bmatrix} 2\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

les différents calculs ne posant aucune espèce de difficulté. Nous proposons alors

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} 2\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce qui devrait satisfaire tout le monde.

↱ Il y a ici un petit miracle dont nous devons causer. Notre géniale matrice P ne dépend aucunement de α et elle diagonalise pourtant toutes les matrices M_α. On dit que ces dernières sont *codiagonalisables* ou encore qu'elles sont *simultanément diagonalisables*.

c. Attention, il nous semble qu'il y ait une légère faute de frappe à cet endroit, mais cela n'engage que nous ! Nous préférons annoncer α dans le semi-ouvert $[0, 1[$. D'après la question précédente les matrices M_α et D_α sont semblables et par conséquent

$$u_\alpha \ \text{projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad D_\alpha^2 = D_\alpha,$$

ce qui, très diagonalement, sur résume à

$$(2\alpha - 1)^2 = 2\alpha - 1 \quad \textit{i.e.} \quad 2(2\alpha - 1)(\alpha - 1) = 0.$$

comme nous avons *manu militari* exclu 1 de l'affaire, il ne reste qu'un projecteur convenable en l'occurrence $u_{1/2}$.

Partie 2

6. Comme il est dit que A est non vide il existe au moins un élément $z \in A$ et

$$0 = \|z - z\|$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 160 13/10/2017 11:34

est un figurant de l'ensemble en question qui n'est donc pas vide. Soit maintenant v et w appartenant à A. Selon l'inégalité du triangle, nous avons

$$\|v-w\| \leqslant \|v\| + \|w\| \leqslant 2R,$$

et notre ensemble est donc majoré par $2R$. L'existence de sa borne supérieure repose sur le fantastique — mais délicat, admis même ! — théorème de la borne supérieure.

7. L'hypothèse (H) fait que pour une fois — nous en verrons d'autres *infra* — l'on a carrément

$$\delta(A) = \max_{(u,v)\in A^2} \|u-v\|,$$

puisque l'on doit — on l'on devrait ! — savoir qu'un *supremum* atteint s'appelle un *maximum*.

a. Selon l'inégalité du triangle et notre récente *supposition* nous avons simplement et tour à tour

$$2\delta(A) = 2\|a-b\| = \|c-b+d-b\| \leqslant \|c-b\| + \|d-b\| \leqslant 2\delta(A),$$

la dernière inégalité procédant de ce qu'un *supremum* est avant tout un majorant et notre découverte est *grosso modo* la première chose qui nous est demandée. On déduit de cet encadrement pour le moins serré que

$$\big(\delta(A) - \|c-b\|\big) + \big(\delta(A) - \|d-b\|\big) = 0,$$

et quand une somme de nombres manifestement positifs est nulle…

↱ Pardonnez-nous si nous oublions les futures questions b, c, d, e parce que, s'il s'agit simplement de conclure, nous préférons passer par la formule du parallélogramme ou de la médiane qui, pour chaque triplet $(u,v,z) \in E^3$, peut efficacement s'écrire

$$4\left\|\frac{u+v}{2} - z\right\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u-z\|^2 + 2\|v-z\|^2.$$

On y choisit alors

$$u = c \quad ; \quad v = d \quad ; \quad z = b,$$

et d'après ce qui précède, on récupère ainsi

$$4\big(\delta(A)\big)^2 + \|c-d\|^2 = 4\big(\delta(A)\big)^2.$$

L'histoire se termine en bref sur $c = d$, *and Bob' your uncle !*

Partie 3

Pour une matrice rectangulaire $\mathcal{R}$ quelconque de format (m,p), il est pratique d'adopter les dispositions suivantes :

▹ pour chaque entier $i \in [\![1,m]\!]$, on note

$$\ell_i(\mathcal{R}) = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{R}_{ij},$$

qui n'est autre que la somme des éléments de la ligne i ;

▷ pour chaque entier $j \in [\![1, p]\!]$, on note

$$c_j(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{ij},$$

qui n'est autre que la somme des éléments de la colonne j.

Il est absolument évident que les différentes applications ℓ_i et c_j sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et nous utiliserons librement cet état de choses.

L'ensemble A_n des matrices bistochastiques d'ordre n est ainsi exactement l'ensemble des matrices M appartenant à E, dont les entrées sont toutes positives ou nulles et pour lesquelles

$$\ell_1(M) = \ell_2(M) = \cdots = \ell_n(M) = c_1(M) = c_2(M) = \cdots = c_n(M) = 1.$$

Nous pouvons alors attaquer l'affaire.

8.a. Nous y allons en deux temps et trois mouvements !

▷ En ce qui concerne

$$\frac{M + M'}{2},$$

nous observons que

▷ ses entrées sont évidemment positives ou nulles ;

▷ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, la linéarité de ℓ_i oblige

$$\ell_i\Big(\frac{M+M'}{2}\Big) = \frac{\ell_i(M) + \ell_i(M')}{2} = \frac{1+1}{2} = 1\,;$$

▷ pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, la linéarité de c_j oblige

$$c_j\Big(\frac{M+M'}{2}\Big) = \frac{c_j(M) + c_j(M')}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

▷ En ce qui concerne M^{T} nos divagations sont les suivantes :

▷ ses entrées sont manifestement positives ou nulles ;

▷ pour chaque entier $i \in [\![1, n]\!]$, tout *transposeur* sait bien que

$$\ell_i(M^{\mathsf{T}}) = c_i(M) = 1\,;$$

▷ pour chaque entier $j \in [\![1, n]\!]$, on a également

$$c_j(M^{\mathsf{T}}) = \ell_j(M) = 1,$$

et tout le monde est ravi.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 162 13/10/2017 11:34

b. Les adeptes du produit matriciel d'Arthur Cayley ne pouvant s'opposer à

$$MX_0 = \begin{bmatrix} \ell_1(M) \\ \ell_2(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{bmatrix},$$

l'égalité souhaitée est lumineuse. Nous nous permettons d'ajouter que, compte tenu de la précédente, nous avons à l'avenant

$$M^{\mathsf{T}} X_0 = X_0.$$

c. Nous nous appuyons à nouveau sur l'opération du roi Arthur selon laquelle

$$MX_0 = \begin{bmatrix} \ell_1(M) \\ \ell_2(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{\mathsf{T}} X_0 = \begin{bmatrix} c_1(M) \\ c_2(M) \\ \vdots \\ c_n(M) \end{bmatrix},$$

et nos mirettes font le reste.

d. C'est encore une valse !

▷ Soit i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Au gré de la formule du *King*, nous avons

$$(MM')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} M'_{kj},$$

et la positivité des entrées de MM' pointe son nez au milieu de la figure.

▷ Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Il ne fait aucun doute que

$$\ell_i(MM') = \sum_{j=1}^{n} (MM')_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik} M'_{kj},$$

on réverse à la papa et voilà que tour à tour

$$\ell_i(MM') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ik} M'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \sum_{j=1}^{n} M'_{kj},$$

la dernière égalité procédant, du bout de la lorgnette, de la non dépendance de j des M_{ik}. Le *physio* est alors mis à contribution. Il trahit que pour chaque entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} M'_{kj} = \ell_k(M') = 1,$$

et il poursuit dans la foulée avec

$$\sum_{k=1}^{n} M_{ik} = \ell_i(M) = 1.$$

Voilà donc en bref que

$$\ell_i(MM') = 1,$$

et c'est une excellente chose.

▷ Soit pour finir $j \in [\![1, n]\!]$. On démontre *mutatis mutandis* que

$$c_j(MM') = 1,$$

et nous pouvons changer de question.

9.a. Après avoir ingurgité une énorme dose d'antalgique, nous sommes parvenus à

$$f_\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad M_\sigma = I_n.$$

b. À très bien y regarder, la définition de l'endomorphisme f_σ et le protocole de « matricialisation » font que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \qquad (M_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)},$$

où nous utilisons, très librement, le génial symbole de Leopold Kronecker. En conséquence

▷ les entrées de M_σ sont bien positives ou nulles, car il ne s'agit que de 0 ou de 1 ;

▷ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons

$$\ell_i(M_\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i\sigma(j)},$$

et nous appuyons sur la bijectivité de σ pour affirmer que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad \delta_{i\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = \sigma^{-1}(i), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et après la gestion toujours si délicieuse de nos « δ », il ne reste que

$$\ell_i(M_\sigma) = \delta_{ii} = 1.$$

▷ Soit maintenant $j \in [\![1, n]\!]$, nous avons cette fois

$$c_j(M_\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i\sigma(j)},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 164 13/10/2017 11:34

et il ne reste délicieusement que

$$c_j(M_\sigma) = \delta_{\sigma(j)\sigma(j)} = 1.$$

La matrice M_σ est donc bien bistochastique. Poursuivons.

Soit i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Nous savons par définition que

$$(M_\sigma^{\mathsf{T}})_{ij} = (M_\sigma)_{ji} = \delta_{j\sigma(i)},$$

et par une simple pirouette bijective, il est très facile de relever que

$$\delta_{j\sigma(i)} = \delta_{i\sigma^{-1}(j)},$$

vu que

$$j = \sigma(i) \quad \Leftrightarrow \quad i = \sigma^{-1}(j).$$

Nous proposons donc $\tau = \sigma^{-1}$, et tout le monde est aux anges.

c. La première partie de la question n'est qu'une formalité qui se traduit d'ailleurs matriciellement par

$$M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma\circ\sigma'}.$$

La puissante et récente question a permet alors d'en déduire que

$$M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = I_n,$$

et une officielle nouveauté assure que cela suffit à prouver l'inversibilité de la matrice M_σ ainsi que l'égalité

$$(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}}.$$

d. Soit $\sigma \in S_n$. Nous avons appris à la récente b que

$$M_\sigma^{\mathsf{T}} = M_{\sigma^{-1}},$$

et compte tenu de ce qui précède cela devient

$$M_\sigma^{\mathsf{T}} = (M_\sigma)^{-1},$$

chronique d'une orthogonalité annoncée.

e. Le « exactement » impose une gestion de la chose en deux temps.

▷ Soit à nouveau $\sigma \in S_n$. Symbole de Konecker oblige, nous avons déjà aperçu que chaque ligne et chaque colonne de M_σ contiennent une fois le réel 1 et $n-1$ fois le réel 0.

▷ Considérons maintenant et réciproquement une matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ possédant cette propriété. Soit j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Nous définissons alors $\sigma(j)$ comme étant la « latitude » de l'unique 1 de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M. Nous insistons sur le fait que chaque colonne de M ayant *un et un seul* 1, σ est une *genuine* application de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

Nous allons maintenant montrer que σ est injective. Si par l'absurde elle ne l'est pas, il existe, dans $[\![1, n]\!]$ deux entiers *différents* i et j tels que

$$\sigma(i) = \sigma(j)$$

et grâce à la définition « *latitudinale* » de σ cela signifie que la ligne de numéro $\sigma(i)$ contient au moins deux « 1 » dont un est situé en longitude i et l'autre en longitude j. Cela fait évidemment désordre et σ est bel et bien injective. On rappelle alors un important résultat de la théorie des ensembles finis.

FINITUDE ET BIJECTIVITÉ

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini *et f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même. On a alors les équivalences logiques*

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective.}$$

Notre application σ est donc dorénavant une permutation de $[\![1, n]\!]$ et sa définition latitudinale fait précisément que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \qquad M_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Autant dire alors que

$$M = M_\sigma,$$

ce qui nous permet de changer de question.

10. Supposons que A et B soient deux éléments de A_n tels que

$$M_\sigma = \frac{A+B}{2},$$

ce qui se détaille en

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \qquad (M_\sigma)_{ij} = \frac{A_{ij} + B_{ij}}{2}.$$

Soit maintenant i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Il y a une évidente chose qui ne nous a pas servie jusqu'à présent et qui va avoir ici une effet fulgurant. En effet, pour des raisons d'éléments positifs et se sommes égales à 1, les entrées de toutes les matrices de A_n sont situées dans l'inénarrable $\mathfrak{I}$. Comme $(M_\sigma)_{ij}$ ne peut valoir que 0 ou 1, selon l'éternelle question 1, il est extrémal dans $\mathfrak{I}$, et comme A_{ij} et B_{ij} appartiennent à ce dernier, il advient que

$$A_{ij} = B_{ij}.$$

Autant dire alors que $A = B$ chronique d'une nouvelle extrémalité annoncée.

11.a. Un composée de deux permutations de S_n est bien sûr encore un élément de S_n et il s'ensuit déjà que φ_τ est donc une application de S_n dans lui-même. Considérons alors *manu militari* $\psi : \sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma$. C'est pour la même raison une application de S_n dans lui-même et c'est très mentalement qu'elle vérifie

$$\varphi_\tau \circ \psi = \psi \circ \varphi_\tau = \mathrm{Id}_{S_n}.$$

Nul ne peut alors ignorer que cela entraîne la bijectivité de φ_τ.

La composition ayant de grandes vertus *distributives* nous avons maintenant

$$f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\tau \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau\circ\sigma},$$

la toute dernière égalité reposant la récente $9.c$. Le changement d'« indice »

$$\sigma' = \tau \circ \sigma$$

et la toute récente bijectivité font alors et très lumineusement que

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau\circ\sigma} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in S_n} f_{\sigma'} = p,$$

à telle enseigne qu'effectivement

$$f_\tau \circ p = p.$$

b. Toujours pour de distributives raisons, il ne fait aucun doute que

$$p^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \circ p,$$

ce qui d'après la précédente, se transforme tour à tour en

$$p^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p = \frac{1}{n!} \times n!\, p = p,$$

le texte ayant aimablement rappelé que le cardinal de S_n est $n!$.

d. L'égalité ensembliste va passer par une double inclusion.

▷ Supposons que x soit tel que

$$\forall \sigma \in S_n, \qquad f_\sigma(x) = x,$$

la définition de p et l'amabilité du cardinal font sans crier gare que

$$p(x) = x,$$

ce qui, vague histoire de faciès, montre que x appartient à $\operatorname{Im} p$.

▷ Supposons maintenant et réciproquement que x appartienne à l'image de p et annonçons $\sigma \in S_n$. Les liens indestructibles entre l'image d'un projecteur et l'ensemble de ses points fixes font que p fixe x et la récente égalité du a, en l'occurrence $f_\sigma \circ p = p$, nous amène au point x à

$$f_\sigma(x) = x$$

et tout le monde est charmé.

d. Nous procédons à nouveau en deux temps.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 167 13/10/2017 11:34

▷ Soit $\sigma \in S_n$, grâce à la linéarité et à la définition de f_σ, nous avons

$$f_\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)},$$

et comme σ n'est qu'une permutation des entiers de $[\![1, n]\!]$, nous avons également

$$f_\sigma(x_0) = x_0.$$

Ainsi et depuis quelques secondes, x_0 appartient à $\operatorname{Im} p$ et par conséquent

$$\operatorname{Vect} x_0 \subset \operatorname{Im} p.$$

▷ Supposons, réciproquement, que x soit un élément de $\operatorname{Im} p$. Comme il est *a fortiori* élément de $\mathbb{R}^n$ et qu'une certaine base canonique traîne dans le passage, il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

Soit alors j appartenant à $[\![2, n]\!]$ et considérons la transposition $\sigma = \mathit{swap}(1, j)$, c'est-à-dire la permutation qui échange 1 et j et qui ne touche à rien d'autre. Nous avons alors sans conteste

$$f_\sigma(x) = a_1 e_j + \cdots + a_j e_1 + \cdots + a_n e_n,$$

les termes sa cachant derrière les « pointillés » ayant été épargnés par l'affaire. Comme il est écrit quelque part que $f_\sigma(x) = x$ et quand on sait à quoi servent les bases on revendique avec force

$$a_j = a_1,$$

et voilà donc *in fine* que

$$x = a_1(e_1 + \cdots + e_n) = a_1 x_0,$$

ce qui n'est pas pour nous défriser.

e. La transposition étant linéaire, nous avons déjà

$$P^{\mathsf{T}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma^{\mathsf{T}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_{\sigma^{-1}},$$

la transposition des matrices de permutations ayant été gérée quelques lignes plus haut. Seulement voilà, la correspondance $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est aussi une bijection de S_n sur lui-même et par le même argument de changement d'indice que celui développé *supra* nous avançons que

$$P^{\mathsf{T}} = P.$$

La matrice P est donc désormais symétrique réelle et c'est assurément la matrice de p dans notre base canonique qui est officiellement *orthonormale*. L'importante caractérisation matricielle de la symétrie fait alors que p est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et le

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 168 13/10/2017 11:34

lecteur *aware* siat bien que les projecteurs symétriques sont exactement les projecteurs orthogonaux. On avance, on avance !

Quand on sait ce sur quoi les projecteurs projettent, on doit deviner, depuis le récent d, que p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\, x_0$, et c'est ici que nous allons apprécier une nouveauté officielle que l'on pourrait appeler « matrices de projecteurs orthogonaux et bases orthonormales ». Dans ce qui suit, nous appliquons tout simplement un protocole de cours auquel le lecteur dubitatif est chargé de se reporter. Nous le déroulons par étapes.

▷ Une base orthonormale de $\mathrm{Vect}\, x_0$ est bien évidemment constituée du seul vecteur

$$u = \frac{x_0}{\sqrt{n}}\cdot$$

▷ Le vecteur colonne associé à ce dernier dans la base canonique est tranquillement

$$U = \frac{X_0}{\sqrt{n}}$$

la colonne X_0 ayant été croisée lors de la huitième question.

▷ Il faut alors officiellement savoir que

$$P = U \cdot U^{\mathsf{T}},$$

et l'on en déduit *de memoria* que

$$P = \frac{J_n}{n},$$

où J_n est la retentissante matrice (n, n) dont les entrées sont toutes égales à 1.

f. Mis à part, pour ceux — ou celles ! — qui souffrent de diplopie aiguë, notre réponse sera à jamais *no comment !*

12.*a*. Le produit $M^{\mathsf{T}} \cdot N$ manifestement carré (n, n) est assuré de laisser une trace derrière lui et, *via* l'éternelle formule du produit matriciel, il ne nous échappe pas que :

$$\mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} \cdot N) = \sum_{i=1}^{n} (M^{\mathsf{T}} \cdot N)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M^{\mathsf{T}}_{ij} N_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji} \qquad (1)$$

la dernière égalité procédant d'une adorable gestion de transpositition.

b. En prenant juste un tout petit peu d'avance, nous notons $(\,|\,)$ l'application en question et nous allons nous y prendre en quatre points.

▷ La précédente question montre déjà que $(\,|\,)$ est une *genuine* application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

▷ Vu la toute proche égalité (1), la symétrie de $(\,|\,)$ ne pose aucun problème.

▷ Soit M un élément de E fixé. La linéarité de

$$N \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji}$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 169 13/10/2017 11:34

découle très naturellement de celle de la sommation.

▷ Soit M une matrice *non nulle* de E. Toujours grâce à la très pratique formule (1), nous avons :

$$(M \mid M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji}^2$$

Il s'agit d'une somme de réels positifs *non tous nuls* et nous ne craignons donc pas d'affirmer que :

$$(M \mid M) > 0$$

↱ *This scalar product* s'appelle produit scalaire de Schur-Hilbert-Schmidt. D'aucuns le qualifient également de produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. La raison en est que si nous rangeons dans une seule et même colonne les n^2 éléments d'une matrice carrée réelle d'ordre n, la formule (1) stipule que $(\mid)$ n'est rien d'autre que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et cela aurait d'ailleurs pu constituer une preuve pour le moins solide de la présente question…

↱ Précisons, juste pour enfoncer le clou que nous avons le choix entre

$$(M \mid N) = \mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} \cdot N) \quad \text{et} \quad (M \mid N) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji},$$

ainsi qu'entre

$$\|M\|_2^2 = \mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} \cdot M) \quad \text{et} \quad \|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji}^2,$$

la dernière version exhibant la somme des carrés des entrés de la matrice M.

c. C'est par exemple *orthogonalement*(*) que nous avons *alternately*

$$\|M_\sigma\|_2^2 = \mathrm{tr}\left(M_\sigma^{\mathsf{T}} \cdot M_\sigma\right) = \mathrm{tr}\left(M_\sigma^{-1} \cdot M_\sigma\right) = \mathrm{tr}\, I_n = n,$$

et nous en déduisons que

$$\|M_\sigma\|_2^2 = \sqrt{n}.$$

d. On trouve assez facilement que

$$M_\alpha - M_\beta = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{bmatrix},$$

et nous optons ici pour la somme des carrés des entrées, à telle enseigne que

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2^2 = 4(\alpha - \beta)^2.$$

(*) On aurait pu, tout aussi bien, passer également par la somme des carrés des entrées conformément à la remarque précédente.

Après avoir échappé au piège le plus sournois de la fin du collège(*), nous terminons notre calcul en beauté sur

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2|\alpha - \beta|.$$

Comme il ne fait aucun doute que

$$-1 \leqslant \alpha - \beta \leqslant 1,$$

il s'avère que $|\alpha - \beta| \leqslant 1$, et 1 majore déjà l'ensemble

$$\big\{|\alpha - \beta| \ \mid\ (\alpha, \beta) \in \mathfrak{I}^2\big\},$$

et à simplement regarder la situation $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, ce majorant est atteint et tout le monde sait qu'un majorant atteint est un *maximum*. Bref

$$\max_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{I}^2} \|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2,$$

ce qui devrait s'écrire

$$\delta(A_2) = 2.$$

↱ Le sup du diamètre qui généralement n'est qu'une borne supérieure, est ici un maximum et cela vaut bien la peine d'être souligné.

e. Nous avons déjà signalé que les entrées des matrices de A_n appartiennent à l'omniprésent $\mathfrak{I}$ et par conséquent, pour chaque couple (i, j), l'on a $M_{ij}^2 \leqslant M_{ij}$ de sorte que

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji}.$$

Seulement voilà, le *physio* rétorque que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji} = \sum_{i=1}^{n} c_j(M) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

et nous passons à la suivante.

f. Soit M et N deux matrice appartenant à A_n. D'après la formule d'Al Kashi, il apparaît déjà que

$$\|M - N\|_2^2 = \|M\|_2^2 - 2\,(\,M \mid N\,) + \|N\|_2^2.$$

La positivité de nos fameuses entrées révélant que

$$(\,M \mid N\,) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ji}N_{ji} \geqslant 0,$$

(*) Le piège le plus redoutable — et redouté — de la classe de troisième. Combien de potaches ont foiré leur brevet des collèges pour avoir naïvement cru que, pour x réel, $\sqrt{x^2} = x$ alors qu'en réalité $\sqrt{x^2} = |x|$?

nous déduisons que

$$\|M-N\|_2^2 \leqslant \|M\|_2^2+\|N\|_2^2,$$

et c'est ainsi grâce à la précédente que

$$\|M-N\|_2^2 \leqslant 2n.$$

Il reste alors à prendre les carrés par la racine…

g. Soit τ un élément de S_n quelconque pour l'instant. Nous avons déjà été informés de

$$(\ M_\sigma \mid M_\tau\ ) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{j\sigma(i)}\delta_{j\tau(i)},$$

et il suffit de mettre en place une permutation τ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \tau(i) \neq \sigma(i),$$

pour exiger la victoire ! Le lecteur assidu vérifiera aisément que la *shifted* τ définie par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \tau(i) = \begin{cases} \sigma(i+1) & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \sigma(1) & \text{si} \quad i=n, \end{cases}$$

fait *farpaitement* l'affaire.

h. La récente question f est là pour nous persuader que le réel $\sqrt{2n}$ est un majorant de l'ensemble

$$\{\|M-N\|_2 \mid (M,N) \in A_n^2\}.$$

Soit alors σ appartenant à S_n et choisissons τ comme il est dit dans la question précédente. Selon le théorème de Pythagore, nous avons

$$\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = \|M_\sigma\|_2^2 + \|M_\tau\|_2^2 = 2n,$$

la dernière égalité reposant sur la toute proche question c. Notre majorant *supra* est donc atteint sur le couple (M_σ, M_τ) qui appartient bien à A_n^2 depuis une certaine question $9.b$. Nous avons donc établi que

$$\max_{(M,N)\in A_n^2} \|M-N\|_2 = \sqrt{2n},$$

c'est-à-dire

$$\delta(A_n) = \sqrt{2n},$$

la remarque concernant les acolytes $\sup$ et $\max$ étant encore une fois d'actualité. Notons pour finir qu'il est écrit que

$$\delta(A_n) = \|M_\sigma - M_\tau\|_2,$$

et qu'une très vieille question, en l'occurrence la 7, stipule alors que M_σ est extrémal. Nous retrouvons ainsi, par une bien jolie méthode, l'extrémalité des matrices de permutation.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 172 13/10/2017 11:34

13.a. Il suffit d'observer visuellement que

$$F_n = \Big(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \ell_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} c_j\Big),$$

et de ne pas avoir égaré qu'une intersection de sous-espaces vectoriel…

b. Nous mettons en place ici une notion qui va nous être utile par la suite. Soit A une matrice carrée d'ordre $n-1$. On souhaite la *border* par une colonne de hauteur n et une ligne de largeur n pour obtenir une matrice (n,n) « genre »

$$B = \begin{bmatrix} & & * \\ & A & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

appartenant au fameux F_n. La solution est simple puisqu'il suffit *de visu* de définir

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad B_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, n-1]\!], \quad B_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} A_{ij},$$

en priant, cependant pour que le *gugus* en bas à droite, en l'occurrence B_{nn}, ne soit pas trop dans le *mood !* On peut avoir en effet et de façon louable une légère angoisse car B_{nn} a deux contraintes à repecter qui sont

$$B_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} B_{in} \quad \text{et} \quad B_{nn} = -\sum_{j=1}^{n-1} B_{nj},$$

et qui n'ont pas intérêt à être antinomiques ! Seulement voilà, la chance est décidément de notre côté puisque, inversion des sommations oblige, on a

$$-\sum_{i=1}^{n-1} B_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} B_{nj} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}.$$

La matrice B sera notée *bord*(A) et nous pouvons maintenant reprendre notre activité.

Il y a plusieurs points à mettre en avant et nous y allons sagement.

▷ À bien y regarder Φ applique ouvertement F_n dans $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, et sa linéarité n'est qu'une mince affaire de définition des opérations — addition et multiplication par un scalaire — sur les matrices.

▷ Définissons alors Ψ sur $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \qquad \Psi(A) = \textit{bord}(A).$$

Nous nous sommes décarcassés pour que Ψ applique $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dan F_n et sa linéarité ne mérite pas beaucoup plus d'égards que celle de sa cousine Φ.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 173 13/10/2017 11:34

▷ Ensuite et parce que nous avons tout fait pour — on borde, on déborde ! — il est manifeste que

$$\Phi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{F_n} \quad \text{et} \quad \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})},$$

chronique d'une bijectivité — et donc d'une isomorphie — totalement annoncées.

Lorsque deux espaces vectoriels sont isomorphes ils ont la même dimension et quand l'on connaît parfaitement ses classiques on doit asséner

$$\dim F_n = (n-1)^2.$$

14.*a*. À très bien y regarder, la première partie a révélé que les points extrémaux de A_2 sont exactement

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

qui sont d'authentiques matrices de permutation.

b. Nous nous permettons une remarque liminaire à propos de ces matrices élémentaires appelées aussi « unités matricielles » du format (n, n). Il est bien connu qu'elles forment une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ appelée d'ailleurs base canonique et que

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} E_{ij}.$$

En outre, parce que les couples (i_k, j_k) sont deux à deux distincts, la famille

$$\left(E_{i_k j_k}\right)_{k \in [\![1,2n]\!]}$$

est une sous-famille de la base canonique et hérite ainsi d'une réelle liberté. Enfin et parce que nous savons compter, nous en déduisons que

$$\dim H = 2n.$$

Nous pouvons maintenant retourner à nos moutons.

Supposons par l'absurde que

$$H \cap F_n = \{0\}.$$

Les deux sous-espaces vectoriels H et F_n seraient donc en somme directe et l'on aurait

$$\dim H + \dim F_n = \dim(H \oplus F_n) \leqslant \dim \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

l'inégalité procédant de l'incontournable théorème du sous-espace. Seulement voilà, étant donné notre liminaire remarque

$$\dim H + \dim F_n = 2n + (n-1)^2 = n^2 + 1$$

ce qui dépasse un peu trop la dimension n^2 de notre cher $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$…

c. La question est un peu sévère !

$\triangleright$ On commence par noter que, vu la linéarité des ℓ_i et autres c_j, on a pour n'importe quelle valeur de t et n'importe quelle valeur de i et j,

$$\ell_i(Q_t) = 1 \quad \text{et} \quad c_j(Q_t) = 1,$$

puisque M appartient à A_n et que N se pavane dans F_n. Ce ne sont donc pas les sommes *ad hoc* égales à 1 qui posent problème pour l'appartenance de Q_t à A_n et c'est donc la positivité des $(Q_t)_{ij}$ qui est au cœur du débat que nous allons animer sur-le-champ.

$\triangleright$ Les origines de la matrice N font aussi qu'elle est non nulle et qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ tels que

$$N = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k E_{i_k j_k},$$

et pour virer les « 0 » inutiles et indésirables nous pouvons à loisir considérer l'ensemble ouvertement non vide

$$K = \{k \in [\![1, 2n]\!] \mid \alpha_k \neq 0\},$$

à telle enseigne que, pour n'importe quelle valeur de t

$$Q_t = M + t \sum_{k \in K} \alpha_k E_{i_k j_k}.$$

Il est alors temps de s'organiser un peu en n'oubliant pas le fonctionnement de ces fameuses unités matricielles. Soit (i, j) un couple d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

$\triangleright$ Si (i, j) n'est *pas* l'un des couples (i_k, j_k) où $k \in K$, il est absolument lumineux que

$$(Q_t)_{ij} = M_{ij}$$

dont la positivité large est à l'ordre du jour depuis la genèse !

$\triangleright$ En revanche, si le couple (i, j) est l'un des (i_k, j_k) en question, on a

$$(Q_t)_{i_k j_k} = M_{i_k j_k} + t\alpha_k,$$

en ayant rappelé, malgré l'heure tardive et parce qu'il faut toujours s'accrocher, que

$$M_{i_k j_k} > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_k \neq 0.$$

Voici alors un gentil résultat annexe et anodin.

UN LEMME TAQUIN

Soit a un réel strictement positif, b un réel non nul et t un réel quelconque. On a l'implication

$$|t| < \frac{a}{|b|} \quad \Rightarrow \quad a + tb > 0.$$

Pour gérer parfaitement les nombreux k en question, nous proposons

$$\epsilon = \min_{k \in K} \frac{M_{i_k j_k}}{|\alpha_k|},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 175 13/10/2017 11:34

qui est un authentique réel strictement positif et, minimum oblige, si $|t| < \epsilon$, le lemme taquin nous garantit toutes les positivités espérées !

↱ Nous vous avions prévenu…

d. Choisissons, parce qu'il y a la place, un réel t *non nul* dans l'ouvert $]-\epsilon, \epsilon[$. Son compère $-t$ appartient également à cet ouvert et les matrices Q_t et Q_{-t} sont donc déjà dans A_n. Nous avons en outre et trivialement

$$M = \frac{Q_t + Q_{-t}}{2},$$

alors que les matrices Q_t et Q_{-t} sont différentes puisque t et N sont non nuls.

Pour une extrémale, cela est une *énaurme* contradiction !

e. Supposons par l'absurde que *toutes* les colonnes aient au moins deux termes non nuls. À bien y compter, cela en ferait au moins $2n$ dans le carré, ce qui est définitivement exclu. Il existe donc au moins une colonne ayant *au plus* un élément non nul et comme la somme des éléments de cette colonne doit valoir 1…

f. La somme des éléments de la $r^{\text{ième}}$ ligne de M vaut aussi 1 et comme $M_{rs} = 1$ prend toute la place, les autres n'ont plus que Lisieux pour pleurer !

g. La matrice M a donc dorénavant le *look*

$$M = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccc} & A_1 & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & A_2 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & A_3 & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & A_4 & \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array} \\ s & \end{array}$$

et la compagne M' est donc

$$M' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

C'est alors en gardant un œil sur M et l'autre sur M' qu'il apparaît, intelligiblement, que la matrice M' appartient à A_{n-1}, quelques entrées nulles idéalement placées ayant eu, quelque part, leur pesant d'arachide. Il reste maintenant à parler d'extrémalité.

Soit donc H' et K' deux matrices appartenant à A_{n-1} vérifiant

$$M' = \frac{H' + K'}{2}.$$

On découpe H' et K' en blocs de quatre suivant le patron de la découpe de la matrice M' et leurs nouvelles écritures ont alors le genre

$$H' = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K' = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 176 13/10/2017 11:34

On leur fait naturellement correspondre les matrices

$$H = \begin{bmatrix} & & & 0 & & & \\ & H_1 & & \vdots & & H_2 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & H_3 & & \vdots & & H_4 & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} & & & 0 & & & \\ & K_1 & & \vdots & & K_2 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & K_3 & & \vdots & & K_4 & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix},$$

qui, à la surprise générale, et les yeux dans les clous, appartiennent à A_n et vérifient aisément

$$M = \frac{H+K}{2}\cdot$$

Comme M est par essence extrémale, on déduit que $H = K$, et il en résulte dans la foulée que

$$H' = K'.$$

h. L'hypothèse de récurrence stipule que M' est une matrice de permutation, et depuis la question 9.e elle ne présente ainsi sur chaque ligne et chaque colonne qu'un seul 1 les autres éléments étant nuls. Les liens étroits entre M et M' que nous remettons en lumière *via*

$$M = \begin{bmatrix} & & & 0 & & & \\ & A_1 & & \vdots & & A_2 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & A_3 & & \vdots & & A_4 & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

font alors et *de visu*, qu'il en est de même de la matrice M et la question 9.e est sollicitée une dernière fois.

↱ Nous avons ainsi magistralement établi que les points extrémaux de A_n sont, *exactement*, les matrices de permutation. Ce célèbre résultat est dû au mathématicien américain Garrett Birkhoff et date de 1946.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 177 13/10/2017 11:34

SUJET

HEC

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Dans tout le problème :

- pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n ;
- on identifie le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$ de $\mathbf{R}_n[X]$ avec la fonction polynomiale $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, avec la convention $0^0 = 1$;
- on rappelle la formule de Stirling : $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

Le problème a pour objet l'approximation d'une fonction réelle par des fonctions polynomiales.
Dans la partie I, on étudie le cas des polynômes de Bernstein. Les parties II et III sont consacrées aux polynômes d'interpolation de Lagrange.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ et tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$B_{n,k}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $A_k = X^k$ et on note $\mathcal{C}_n = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

Soit T_n l'application définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X]$, $(T_n(P))(X) = \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(X)$.

1. *Dans cette question uniquement, on choisit* $n = 2$.
   a) Déterminer la matrice K_2 de la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ dans la base $\mathcal{C}_2$.
   b) En déduire que la famille $(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

MATHÉMATIQUES SCIENTIFIQUE

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 178 13/10/2017 11:35

c) Calculer $T_2(A_0)$, $T_2(A_1)$ et $T_2(A_2)$; déterminer la matrice H_2 de T_2 dans la base $\mathcal{C}_2$.
Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de T_2.

2. *On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 1.*

a) Montrer que la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$ est libre ; en déduire que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Montrer que l'application T_n est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Calculer $T_n(A_0)$ et montrer que $T_n(A_1) = A_1$.

d) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré du polynôme $T_n(A_k)$ est égal à k.
Pour établir ce résultat, on pourra utiliser la propriété suivante que *l'on ne demande pas de démontrer* :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \big(T_n(A_{k+1})\big)(X) = \frac{1}{n}X(1-X)\big(T_n(A_k)\big)'(X) + X\big(T_n(A_k)\big)(X)$$

où $\big(T_n(A_k)\big)'$ est le polynôme dérivé de $T_n(A_k)$.

e) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit α_k le cœfficient de X^k du polynôme $T_n(A_k)$. Calculer α_k en fonction de k et n.
L'automorphisme T_n est-il diagonalisable ?

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose : $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ et $\forall\, z \in [0,1]$, $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k}(z)$.

Soit $z \in [0,1]$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit Z_n une variable aléatoire définie sur cet espace suivant la loi binomiale de paramètres n et z. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\overline{Z}_n = \dfrac{Z_n}{n}$.

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $(\overline{Z}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers le réel z.

b) Justifier l'existence de $M = \max\limits_{[0,1]} |f|$.

c) Soit ε un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit U_n l'événement : $U_n = \Big[\big|f(\overline{Z}_n) - f(z)\big| > \varepsilon\Big]$.
On note $\mathbf{1}_{U_n}$ la variable indicatrice de l'événement U_n et $\overline{U}_n$ l'événement contraire de U_n.
Établir l'inégalité : $\big|f(\overline{Z}_n) - f(z)\big| \leqslant 2M \times \mathbf{1}_{U_n} + \varepsilon \times \mathbf{1}_{\overline{U}_n}$.

d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) = f(z)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$.

4.a) Compléter le code *Scilab* suivant afin qu'un appel à la fonction `binom(n,z)` renvoie une réalisation d'une loi binomiale de paramètres n et z.

```
function Z=binom(n,z)
  Z= .........
endfunction
```

b) Soit une fonction *Scilab* `f` et une variable `z` définies par :

```
function y=f(x)
  if x==0 then y=0, else y=-x*log(x),end
endfunction
z=0.4
```

On considère le code *Scilab* suivant :

```
n=100 ; N=1000
S=0
for k=1:N
  S=S+f(binom(n,z)/n)
end
disp(S/N)
```

Ce code affiche une valeur approchée d'une certaine quantité. Laquelle ?
Cette valeur affichée est le résultat de la mise en œuvre de certaines méthodes. Lesquelles ?

Partie II. Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit Φ l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ telle que : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \Phi(P) = \big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big)$.

 a) Montrer que l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

 b) On note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec $e_0 = (1,0,0,\ldots,0)$, $e_1 = (0,1,0,\ldots,0)$,...... et $e_n = (0,0,0,\ldots,1)$. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on note L_i le polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\Phi(L_i) = e_i$.

 Montrer que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, on a : $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$.

 c) Soit Ψ l'application définie sur $\big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2$ par : $\forall (P,Q) \in \big(\mathbf{R}_n[X]\big)^2,\ \Psi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$.

 Vérifier que Ψ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$. On munit alors $\mathbf{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.

 Montrer que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbf{R}_n[X]$.

 d) Expliciter la matrice A de passage de la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ à la base canonique $\mathcal{C}_n$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

 e) Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles.

 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$, noté P_f, vérifiant les relations :

$$P_f(x_0) = f(x_0),\ P_f(x_1) = f(x_1), \ldots,\ P_f(x_n) = f(x_n).$$

 On dit que P_f *est le polynôme d'interpolation de la fonction* f *aux points* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

 Exprimer P_f dans la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$.

6. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels appartenant à un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$ tels que $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et $\overline{x}$ un réel de $[a,b]$ différent de $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On note P_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et Q_f le polynôme d'interpolation de la fonction f aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}$. On pose : $w(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$.

 a) Établir l'existence d'un réel δ tel que pour tout $t \in [a,b]$, on a : $Q_f(t) - P_f(t) = \delta \times w(t)$.

 b) Soit h la fonction définie sur $[a,b]$ par : $\forall t \in [a,b],\ h(t) = f(t) - Q_f(t)$.

 Montrer que la fonction h s'annule en les $(n+2)$ points $\overline{x}, x_0, x_1, \ldots, x_n$ et en déduire l'existence d'un réel $\theta \in\,]a,b[$ tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$.

 c) Établir l'égalité : $f(\overline{x}) - P_f(\overline{x}) = \dfrac{1}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(\theta) \times w(\overline{x})$.

 d) En déduire que pour tout $t \in [a,b]$, on a : $\big|f(t) - P_f(t)\big| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \sup\limits_{[a,b]} \big|f^{(n+1)}\big|$.

Partie III. Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

Dans cette partie, on suppose que l'entier n *appartient à* $\mathbf{N}^*$ *et n'est plus fixé.*

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose : $x_{k,n} = -1 + \dfrac{2k}{n}$.

Pour tout réel $\rho > 0$, on note f_ρ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_\rho(x) = \dfrac{1}{x^2 + \rho^2}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $\rho > 0$, on note $P_{f_\rho,n}$ le polynôme d'interpolation aux points $x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n}$ de la fonction f_ρ.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $w_n(X) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - x_{k,n})$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 180 13/10/2017 11:35

Cette partie se propose de mettre en évidence des conditions suffisantes de convergence de la suite $\left(P_{f_\rho,n}(x)\right)_{n\geqslant 1}$ vers $f_\rho(x)$ pour x appartenant à un intervalle $I\subset \mathbf{R}$.

7.a) Justifier que la fonction f_ρ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a : $\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| = \left|f_\rho^{(n)}(-x)\right|$.

c) Montrer que pour tout réel x vérifiant $|x|<\rho$, on a : $\dfrac{1}{x^2+\rho^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}}\,x^{2k}$.

8. Dans cette question, **on admet** le résultat qui suit.

Pour tout $k\in\mathbf{N}$, soit A_k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $A_k(t)=t^k$. Soit R un réel strictement positif. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour tout $t\in\,]-R,R[$, la série de terme général $u_k\times A_k(t)$ est convergente ; on note $\varphi(t)$ sa somme.

Alors, la fonction φ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et $\forall\, t\in\,]-R,R[$ et $\forall\, n\in\mathbf{N}^*$, on a : $\varphi^{(n)}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\times A_k^{(n)}(t)$.

Soit $\rho>0$. On pose : $\forall\, x\in\,]-\rho,\rho[,\ \ v(x)=\dfrac{\rho^2}{\rho^2-x^2}$.

a) Déterminer les réels p et q pour lesquels on a : $\forall\, x\in\,]-\rho,\rho[,\ \ v(x)=\dfrac{p}{\rho-x}+\dfrac{q}{\rho+x}$.

b) Comparer pour tout $n\in\mathbf{N}^*$ et pour tout $x\in\,]-\rho,\rho[$, $\left|v^{(n)}(x)\right|$ et $\left|v^{(n)}(-x)\right|$.

c) Montrer que pour tout $x\in\,]-\rho,\rho[$ et pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a : $\left|f_\rho^{(n)}(x)\right|\leqslant\dfrac{1}{\rho^2}\times\left|v^{(n)}(x)\right|$.

d) On suppose que $\rho>1$. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$ et pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\left|f_\rho^{(n)}(x)\right|\leqslant\frac{1}{\rho}\times\frac{n!}{(\rho-1)^{n+1}}.$$

9. Pour $x\in[-1,1]$ avec $x\notin\{x_{0,n},x_{1,n},\ldots,x_{n,n}\}$, soit k l'entier de $[\![0,n-1]\!]$ tel que $x\in\,]x_{k,n},x_{k+1,n}[$.

a) Établir les inégalités : $|w_n(x)|\leqslant\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}\times(k+1)!\,(n-k)!\leqslant\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}\times n!$.

b) À l'aide de la formule de Stirling (rappelée dans le préambule du problème), montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0$, on a pour tout $x\in[-1,1]$: $|w_n(x)|\leqslant\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}$.

c) Déduire des questions 6.d), 8.d) et 9.b) qu'une *condition suffisante* pour que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|f_\rho(x)-P_{f_\rho,n}(x)\right|=0$ pour tout $x\in[-1,1]$, est : $\rho>1+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

10.a) On pose : $\forall\,\rho>0$, $H(\rho)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1}\ln\left(t^2+\rho^2\right)dt$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $H(\rho)$.

Montrer que la fonction H est prolongeable par continuité en 0. On note encore H la fonction prolongée.

b) Montrer que la fonction H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle à déterminer.

c) Montrer qu'il existe un unique réel $\rho_0>0$ tel que $H(\rho_0)=\ln 2-1$. Montrer que $\rho_0<1$ (on donne $\ln 2\simeq 0.693$).

d) On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et $|i\rho|$ le module du nombre complexe $i\rho$.

Vérifier que pour tout $\rho>0$, on a : $|w_n(i\rho)|>0$. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)|=H(\rho)$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 181 13/10/2017 11:35

11. La fonction Arctan est codée dans le langage *Scilab* par **atan**.

Le programme suivant renvoie une valeur approchée d'un réel s_0 à 0.001 près.

```
function z=G(x) ; z=(1/2)*(log((1+x^2)/4))+x*(atan(1/x)) ; endfunction
u=0.25 ; v=1 ;
while (v-u)> 0.001 do
    if G((u+v)/2)> 0 then v=(u+v)/2 ; end
    if G((u+v)/2)< 0 then u=(u+v)/2 ; end
    if G((u+v)/2)==0 then v=(u+v)/2 ; u=(u+v)/2 ; end
end
disp ((u+v)/2)
```

a) Quelle est la méthode mise en œuvre dans ce programme ? Donner une équation vérifiée par s_0.

b) Comparer s_0 et ρ_0.

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $S_n(X) = 1 - (X^2 + \rho^2)P_{f_\rho,n}(X)$.

a) Montrer que le polynôme w_n divise le polynôme S_n.

b) Montrer que le polynôme $P_{f_\rho,n}$ est pair.

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ · Exprimer $|w_n(y_n)|$ en fonction de n.

Trouver un équivalent de $|w_n(y_n)|$ lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\tau}{n} \times \sigma^n$, où τ et σ sont des réels strictement positifs que l'on déterminera.

d) *On admet sans démonstration* que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \big(\ln |w_n(i\rho)| - nH(\rho)\big) = 0$.

Déduire de ce résultat admis et de la question 12.c), un équivalent de $\left|\dfrac{w_n(y_n)}{w_n(i\rho)}\right|$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans les questions 13 et 14, on suppose que n est impair.

13.a) Montrer que $w_n(i\rho) \in \mathbf{R}^*$ et exprimer $S_n(X)$ en fonction de $w_n(X)$ et $w_n(i\rho)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a : $\big|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\big| = f_\rho(x) \times \left|\dfrac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}\right|$.

14. On suppose que $0 < \rho < \rho_0$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \big|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)\big|$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{[-1,1]} \big|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)\big| = +\infty$ (*phénomène de Runge*).

CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, *external lecturer* à ESSEC Business School (jlroque@me.com).

Partie 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous observons avant toute chose que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \deg B_{n,k} = n.$$

En conséquence, la famille

$$(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$$

est définitivement formée de polynômes appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$.

En outre, au vu et au su ce que nous venons de narrer, il apparaît que T_n applique très tranquillement $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même et sa linéarité n'est qu'une mince affaire de distributivité, de *définition* des opérations fonctionnelles et de *summation linearity*. En bref, T_n est un authentique endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, pour chaque entier naturel k, le monôme X^k est ainsi noté depuis au moins l'année de naissance de l'arrière-grand-mère de Matusalem et nous ne voyons pas l'intérêt de le noter autrement.

Toutes ces choses, nous ne les redirons plus !

1.*a*. Nous avons très naturellement

$$B_{2,0} = 1 - 2X + X^2 \quad ; \quad B_{2,1} = 2X - 2X^2 \quad ; \quad B_{2,2} = X^2,$$

et quand on maîtrise la notion de matrices des familles, on doit revendiquer

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. La matrice K_2 est trigonalement inversible, vu que ses diagonales *entries* sont différentes de 0. On doit facilement en déduire que ses colonnes forment une famille libre, liberté qui se transmet automatiquement à

$$(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}).$$

Celle-ci est désormais une famille dans $\mathbb{R}_2[X]$, libre et de longueur 3. Comme cette dernière est précisément la dimension de notre espace polynomial, la famille

$$(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$$

est effectivement une base de $\mathbb{R}_2[X]$, comme en atteste la caractérisation des bases en dimension finie.

c. Notre valeureux lecteur trouvera sans stress

$$T_2(1) = 1 \quad ; \quad T_2(X) = X \quad ; \quad T_2 = \frac{X + X^2}{2},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 183 13/10/2017 11:35

et grâce au protocole de *matricialisation*, nous parviendrons ensemble à

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

C'est assez *trigonalement* que nous assénons

$$\mathrm{Spec}\, H_2 = \{1, 1/2\}$$

et après quelques résolutions de systèmes, il n'est pas vraiment difficile de parvenir à

$$\mathrm{E}_1(H_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{1/2}(H_2) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Nous avons ici les éléments propres de la *matrice* H_2 et ceux de l'*endomorphisme* T_2 s'en déduisent, mot à mot, par traduction canonique. *Here you are !*

$$\mathrm{Spec}\, H_2 = \{1, 1/2\}$$

$$\mathrm{E}_1(T_2) = \mathrm{Vect}(1, X) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{1/2}(T_2) = \mathrm{Vect}(X^2 - X)$$

2.a. Afin de nous simplifier la vie, nous considérons les cousins β_k où

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \beta_k = X^k(1 - X)^{n-k}$$

et nous commençons par traiter la question pour la famille allégée

$$(\beta_0, \dots, \beta_n)$$

également située dans notre cher $\mathbb{R}_n[X]$. Nous attaquons par la liberté en proposant trois méthodes.

LA MÉTHODE MATRICE DES FAMILLES

C'est la généralisation de ce que nous avons développé à la récente question 1.a. Pour chaque entier $k \in [\![0, n]\!]$, Isaac Newton nous apprend que

$$\beta_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} X^{k+i} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n-k}{i-k} X^i,$$

et nous en déduisons que la matrice de notre nouvelle famille dans la base $\mathcal{C}_n$ est trigonale inférieure ses diagonales *entries* étant tout bêtement égales à 1. Il s'agit donc d'une matrice inversible et notre liberté s'en déduit par l'argumentation affichée lors de la question 1.a.

LA MÉTHODE DE VALUATION

Elle permet de réparer une très injuste discrimination de notre bible officielle. Pour un polynôme non nul P, il y a certes son terme non nul de plus *grande* puissance, mais il y a

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 184 13/10/2017 11:35

également son terme non nul de plus *petite* puissance. La plus grande puissance en question est officielle, elle s'appelle « degré » de P et se note $\deg P$. Curieusement, la plus petite puissance en question est sauvagement ignorée, elle s'appelle pourtant « valuation » du polynôme P et se note $\mathrm{val}(P)$.

Par exemple le polynôme

$$P = \sum_{i=13}^{6174} X^i$$

est de degré 6174 et de valuation 13.

Cela étant, nul ne peut ignorer que toute famille de polynômes non nuls ayant des *degrés* deux à deux distincts est une famille libre, et l'on démontre, *mutatis mutandis*, que c'est également le cas des familles de polynômes non nuls ayant des *valuations* deux à deux distinctes. Comme c'est ouvertement le cas de la famille $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$, nous pouvons nous tourner vers la troisième méthode.

LA MÉTHODE DE L'OPÉRATEUR

Elle va sembler copieusement parachutée, mais elle fortement inspirée de la propriété que le texte nous demande docilement d'admettre quelques lignes plus bas.

On considère l'opérateur U qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe

$$U(P) = \frac{1}{n} X(1 - X)P' + XP.$$

Comme la dérivation envoie linéairement $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, il est sereinement acquis que U est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et il est très facile de constater que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad U(X^k) = \frac{k}{n} X^k + \frac{n-k}{n} X^{k+1},$$

la *polynomiale attitude* ayant exigé de traiter à part la position $k = 0$. Grâce à un énorme coup de chance lorsque $k = n$, nous en déduisons que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad U(X^k) \in \mathbb{R}_n[X],$$

et il n'en faut pas plus pour asséner que U *stabilise* $\mathbb{R}_n[X]$. Nous avons alors le droit et le devoir de considérer l'endomorphisme u que U induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ et cela dessine un nouveau venu

$$u \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}_n[X]\big),$$

opérateur ô combien sympathique, car après quelques calculs anodins, le lecteur assidu finira(*) par découvrir que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad u(\beta_k) = \frac{k}{n}\beta_k.$$

Parce qu'ils sont évidemment non nuls, les vecteurs $\beta_0, \ldots, \beta_n$, sont désormais des vecteurs propres de l'adorable u, attachés à des valeurs propres qui ont bien l'air d'être

(*) Il devra cependant, au nom de la *polynomiale attitude*, distinguer les trois situations $k{=}0, k{=}n$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

deux à deux distinctes. Et, comme nous le savons bien, cela est aussi un sérieux gage de liberté ! La famille $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$, désormais libre et de longueur $n+1$, est une *genuine* base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ puisque ce dernier est précisément de dimension $n+1$ et que, au risque de radoter, il existe sur le marché une précieuse caractérisation des bases en dimension finie.

Notons pour en terminer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad B_{n,k} = \binom{n}{k} \beta_k,$$

et que les coefficients du binôme que nous avons sous notre nez ne sont absolument pas nuls. En conséquence, le propriétés acquises par la famille (β_k) — la liberté, puis la *basitude* — se transmettent de façon filiale à sa cousine

$$(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$$

et nous pouvons envisager la suite.

b. Soit P appartenant au noyau de T_n, ce qui se traduit par

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = 0.$$

La famille $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ étant depuis peu libre comme l'air, nous nous devons d'en déduire allègrement que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Ainsi et à bien y regarder, le polynôme P vient de s'enticher de $n+1$ racines apparemment deux à deux distinctes et comme il appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, il ne peut s'agir que du polynôme nul. L'endomorphisme T_n est donc désormais injectif et comme l'espace ambiant est de dimension finie, il gagne ses galons d'automorphisme, comme l'affirme la caractérisation des automorphismes en dimension finie.

c. Nous avons tout d'abord

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + 1 - X)^n = 1$$

la mécanique *newtonienne* ayant été fortement mise à contribution. Pour la suite, nous commençons par annoncer $x \in [0, 1]$ et nous observons que

$$T_n(X)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ce qui permet au *physio* de revendiquer, *binomialement*, les égalités

$$T_n(X)(x) = \frac{1}{n} \mathrm{E}\big(\mathcal{B}(n, x)\big) = x.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 186 13/10/2017 11:35

Les deux polynômes $T_n(X)$ et X coïncident donc sur $[0,1]$ et comme ce dernier est un ensemble *infini*, il ne fait plus aucun doute que

$$T_n(X) = X.$$

d. Comme nous n'aimons pas trop admettre les choses nous allons démontrer la grosse égalité en question et c'est l'occasion de ressortir le gentil endomorphisme u et les polynômes β_i mis en place quelques lignes plus haut. Soit donc k appartenant à $[\![0, n-1]\!]$. Nous avons par définition

$$T_n(X^k) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \binom{n}{i} \beta_i$$

L'application de la linéaire u fait alors que

$$u\big(T_n(X^k)\big) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \binom{n}{i} u(\beta_i)$$

et comme nous n'avons pas oublié l'extrême propreté des β_i selon laquelle

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad u(\beta_i) = \frac{i}{n}\,\beta_i,$$

nous atterrissons sur

$$u\big(T_n(X^k)\big) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{k+1} \binom{n}{i} \beta_i = T_n(X^{k+1}),$$

la dernière égalité procédant d'une formelle reconnaissance faciale ! La grosse égalité admise par le texte est donc désormais avérée et c'est bien.

Nous revenons maintenant à nos ovins en traitant à part la situation $k = 0$, puis en procédant par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$.

▷ Vu que depuis peu $T_n(1) = 1$, notre cas singulier est réglé.

▷ Nous avons également vu récemment que $T_n(X) = X$, ce qui initialise parfaitement notre récurrence.

▷ Supposons pour finir que, pour un entier k vérifiant(*)

$$1 \leqslant k < n,$$

nous ayons $\deg T_n(X^k) = k$. Notons a le coefficient dominant de $T_n(X^k)$ et nous faisons valoir que quasi mentalement

$$\frac{1}{n} X(1-X)\big(T_n(X^k)\big)' = -\frac{ak}{n} X^{k+1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\textit{termes de degré} \leqslant k}$$

(*) Ce sont les nécessités inévitables de la récurrence finie !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 187 13/10/2017 11:35

alors que

$$XT_n(X^k) = aX^{k+1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\textit{termes de degré} \leqslant k}$$

Il ressort de ce magma et de la grosse égalité que

$$T_n(X^{k+1}) = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)aX^{k+1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\textit{termes de degré} \leqslant k}$$

et comme nos hypothèses obligent

$$\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)a \neq 0,$$

notre inductive affaire semble bien engagée.

e. Nous venons d'apprendre à l'instant que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \alpha_{k+1} = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)\alpha_k$$

et il se trouve providentiellement que cette égalité reste d'actualité lorsque $k = 0$. Nous avons donc en réalité

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \alpha_{k+1} = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)\alpha_k$$

Il est alors très facile de conjecturer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \alpha_k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{n^k},$$

où A_n^k est l'arrangement bien connu et la preuve de cela s'effectuera par récurrence finie sur $k \in [\![0, n]\!]$, tâche laissée à la charge de notre très dévoué lecteur.

Il reste à causer de diagonalisation. Il résulte de la récente d et du début de la présente, que la matrice H_n de l'endomorphisme T_n dans la base canonique est trigonale supérieure et que les éléments diagonaux de cette matrice sont justement les réels α_k que nous venons de croiser. Seulement voilà, il est très facile de constater qu'en réalité le contexte est le suivant

$$1 = \alpha_0 = \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n,$$

à telle enseigne que les *différentes* valeurs propres de T_n sont au nombre de n et sont exactement

$$1 \quad ; \quad \alpha_2 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \alpha_n.$$

Nous mettons alors en avant deux choses capitales.

▹ Comme depuis le récent 2.c, les deux vecteurs 1 et X appartiennent à $\mathrm{E}_1(T_n)$ et parce que la famille $(1, X)$ est libre, nous arguons déjà que

$$\dim \mathrm{E}_1(T_n) \geqslant 2$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 188 13/10/2017 11:35

▷ Vu que — *never forget !* — un sous-espace propre n'est jamais nul, nous nous arrogeons également

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \qquad \dim \mathsf{E}_{\alpha_k}(T_n) \geqslant 1.$$

Il en résulte sans trembler que

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) \geqslant n+1,$$

ou encore

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) \geqslant \dim \mathbb{R}_n[X], \tag{1}$$

et il est maintenant l'heure de rappeler aux amnésiques le dogme suivant :

LA RÈGLE DU NON-DÉPASSEMENT

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et ϕ un endomorphisme de E. Toute somme de dimensions d'espaces « genre » $\mathsf{E}_\lambda(\phi)$ attachés à des scalaires λ deux à deux distincts ne peut, en aucun cas, dépasser la dimension ambiante, en l'occurrence $\dim E$.

Comme nous avons précisé que $1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$, sont précisément deux à deux distincts, il résulte de cette précieuse règle que

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) \leqslant \dim \mathbb{R}_n[X]. \tag{2}$$

La synthèse des inégalités (1) et (2) est alors élogieuse. Nous avons la superbe

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) = \dim \mathbb{R}_n[X],$$

qui, comme nous le savons bien, est une nécessaire suffisance de diagonalisabilité de T_n appelée parfois « condition du comptable ».

3. Nous commençons par un peu de culture en précisant que les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

sont appelés polynômes de Serge Bernstein attachés à la fonction f. Nous allons bientôt découvrir une propriété qui les relie étroitement à la fonction f.

Un peu de patience donc...

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable $\overline{Z}_n$ étant finie, elle possède des moments de tous les ordres et nous avons en particulier la linéaire

$$\mathsf{E}(\overline{Z}_n) = \frac{\mathsf{E}(Z_n)}{n} = z,$$

puis la quadratique

$$\mathsf{V}(\overline{Z}_n) = \frac{\mathsf{V}(Z_n)}{n^2} = \frac{z(1-z)}{n},$$

le côté $\mathcal{B}(n, z)$ de Z_n ayant éveillé quelques uns de nos souvenirs.

Soit alors $\epsilon > 0$. Vu ce que nous venons de narrer, l'inégalité de Jules Bienaymé et Pafnouti Tchebychev, appliquée ici à la variable $\overline{Z}_n$, s'écrit sur-le-champ

$$\mathrm{p}\big(|\overline{Z}_n - z| > \epsilon\big) \leqslant \frac{z(1-z)}{n\epsilon^2},$$

et il en résulte *by squeeze* que

$$\mathrm{p}\big(|\overline{Z}_n - z| > \epsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

chronique d'une convergence en probabilité annoncée...

b. La fonction $|f|$ est, comme sa consœur f, *continue* sur le *segment* $[0,1]$. Un important théorème d'optimisation de Karl Weierstrass stipule alors qu'elle y possède un maximum.

↱ Nous rassurons notre lecteur en indiquant qu'elle y possède également un minimum, mais que celui-ci ne doit pas passionner les foules à cet endroit...

c. Au vu et au su de son côté binomial, les valeurs de la variable Z_n appartiennent au segment $[0, n]$ et celles de sa dulcinée $\overline{Z}_n$ se situent, quant à elles, dans $[0,1]$ qui se trouve être précisément le domaine de définition de f. La composition $f(\overline{Z}_n)$ est donc parfaitement définie et c'est une bonne chose.

Cependant l'histoire ne dit pas vraiment pourquoi U_n est véritablement un événement mais, pour ne pas perturber le déroulement des opérations, nous le prendrons pour argent comptant. Procédons au baptême

$$h = 2M\mathbf{1}_{U_n} + \epsilon\,\mathbf{1}_{\overline{U}_n}$$

et annonçons $\omega \in \Omega$. Il nous faut tout d'abord observer que, très *triangulairement*, nous pouvons avancer que

$$\big|f(\overline{Z}_n(\omega)) - f(z)\big| \leqslant \big|f(\overline{Z}_n(\omega))\big| + |f(z)| \leqslant 2M$$

On passe alors à la phase organisationnelle.

▷ Si ω appartient à U_n, nos *indics* nous informent que

$$\mathbf{1}_{U_n}(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\overline{U}_n}(\omega) = 0,$$

à telle enseigne que

$$h(\omega) = 2M.$$

Vu un certain triangle *supra*, l'inégalité

$$\big|f(\overline{Z}_n(\omega)) - f(z)\big| \leqslant h(\omega)$$

est d'actualité dans ce premier cas.

▷ Si ω appartient à $\overline{U}_n$, nous avons *a contrario*

$$\big|f(\overline{Z}_n(\omega)) - f(z)\big| \leqslant \epsilon,$$

et comme nous sommes cette fois informés que $h(\omega) = \epsilon$, nous pouvons envisager la suite.

d. Nous conservons les dispositions de la question précédente en y apportant l' évidente amélioration selon laquelle

$$\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right| \leqslant 2M\mathbf{1}_{U_n} + \epsilon,$$

les indicatrices ayant rarement l'occasion de dépaser 1 ! La finitude de nos variables nous donnant toute raison d'espérer, la précieuse *linéacroissance* du *green operator* amène tranquillement et dans un premier temps à

$$\mathsf{E}\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right| \leqslant 2M\mathrm{p}(U_n) + \epsilon.$$

L'officielle inégalité triangulaire de l'espérance se charge, quant à elle, de nous rappeler que

$$\left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n) - f(z)\big)\right| \leqslant \mathsf{E}\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right|$$

inégalité qui, profitant d'une gentille linéarisation à gauche, se métamorphose en

$$\left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) - f(z)\right| \leqslant \mathsf{E}\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right|,$$

ce qui, transitivement, nous amène *in fine* à

$$\left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) - f(z)\right| \leqslant 2M\mathrm{p}(U_n) + \epsilon. \tag{3}$$

La question 3.a nous a permis d'apprendre que

$$\overline{Z}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} z,$$

et le fantastique théorème de la fonction continue(*) assure alors que

$$f(\overline{Z}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} f(z),$$

Il en émane tout naturellement que

$$2M\mathrm{p}(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui, de manière *epsilontik*, produit un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 2M\mathrm{p}(U_n) \leqslant \epsilon.$$

Il résulte alors de l'inégalité (3) *supra* que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) - f(z)\right| \leqslant 2\epsilon,$$

(*) Il eut cependant officiellement fallu que f soit continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais comme elle l'est sur le *segment* $[0,1]$, il ne doit pas être insurmontable de la prolonger à $\mathbb{R}$, en toute continuité, s'entend…

et même si l'honneur n'est pas sauf — on termine sur 2ϵ et non sur ϵ ! —, nous avons bel et bien fini par établir que

$$\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z).$$

Il reste alors à ne pas avoir égaré le théorème de transfert qui rend compte de l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) = f_n(z),$$

qui n'est pas vraiment pour nous déplaire.

↱ Nous avons finalement démontré que, lorsque f est continue sur $[0,1]$, la suite des polynômes de Bernstein converge *simplement* vers f sur $[0,1]$, ce qui signifie tout bêtement que

$$\forall z \in [0,1], \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$$

Ce résultat a été obtenu à la fin du récent d.

Ainsi, pour *toute* fonction f continue sur $[0,1]$, il existe une suite de *polynômes* qui converge *simplement* vers f sur $[0,1]$. Ce résultat pourrait être appelé « théorème d'approximation de Weierstrass » du pauvre, car le vrai, le beau, le grand théorème de Karl assure qu'en réalité, il existe une suite de *polynômes* qui converge *uniformément*(*) vers f sur $[0,1]$, ce qui est *more amazing !*

4.a. C'est dans un « *grand* » élan *scylabic* que nous proposons

```
function Z = binom(n, z)
    Z = grand(1, 1,'bin', n, z)
endfunction
```

b. Signalons, et pas que pour le *fun*, que la fonction f ici choisie, est bien continue sur le segment $[0,1]$, la raison essentielle étant que, selon une très classique prépondérance, nous avons

$$x \ln x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0.$$

Cela étant, pour chaque entier $k \in [\![1, N]\!]$, le $k^{\text{ième}}$ passage dans notre boucle **for** ajoute à S une simulation d'une variable aléatoire, mettons $f(\overline{Z}_{n,k})$ de même loi que $f(\overline{Z}_n)$ à telle enseigne que le *display* final simulera

$$\frac{f(\overline{Z}_{n,1}) + f(\overline{Z}_{n,2}) + \cdots + f(\overline{Z}_{n,N})}{N}.$$

En outre, les différents appels à **binom**(n,z) sont *informatiquement* indépendants, et grâce au lemme des coalitions, nous pouvons espérer l'indépendance des $f(\overline{Z}_{n,k})$. La sempiternelle finitude ambiante faisant que $f(\overline{Z}_n)$ possède une variance, la loi faible des grands nombre répond à l'appel en stipulant que

$$\frac{f(\overline{Z}_{n,1}) + f(\overline{Z}_{n,2}) + \cdots + f(\overline{Z}_{n,N})}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big).$$

(*) Le lecteur curieux désirant savoir ce qu'est une telle convergence pourra avantageusement saisir la locution « convergence uniforme » dans son *favorite search engine* et essayer d'en décrypter toute la nuance !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 192 13/10/2017 11:35

Le code en question affiche donc une valeur approchée de l'espérance de $f(\overline{Z}_n)$, et la méthode employée ici a de sérieuses origines monégasques !

Partie 2

$5.a$. Nous nous organisons en trois temps.

▷ Quand on sait bien compter, il est clair que Φ applique bien $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, une des raisons essentielles étant que les fonctions polynômes sont définies *partout, partout !*

▷ La linéarité de Φ n'est qu'une formalité s'appuyant uniquement sur les *définitions* des opérations sur les polynômes et sur les listes.

▷ Soit P appartenant à $\operatorname{Ker}\Phi$. Autant dire alors que

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0,$$

ce qui, au vu et au su de nos hypothèses, procure au polynôme P pas moins de $n+1$ racines différentes. Vu sa situation géographique — au cœur de $\mathbb{R}_n[X]$ — son avenir est plutôt sombre et nous avons donc

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}.$$

L'application linéaire Φ est donc désormais injective, mais comme $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont deux espaces vectoriels réels ayant, officiellement, la *même* dimension finie, en l'occurrence l'entier $n+1$, la conclusion passe par la rocambolesque caractérisation des isomorphismes en *même* dimension finie.

b. Soit i appartenant à $[\![0,n]\!]$, grâce au lumineux « *delta* » de Leopold Kronecker, nous avons

$$e_i = (\delta_{ik})_{0\leqslant k\leqslant n}$$

et la désormais bijectivité de Φ cautionne l'existence — et aussi l'unicité ! — de ce polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ qui, vérifie en fin de compte

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad L_i(x_k) = \delta_{ik}. \tag{δ}$$

Il en résulte, en particulier, que les x_k pour lesquels $k \neq i$ sont des racines *différentes* du polynôme L_i, et comme ce dernier est situé dans $\mathbb{R}_n[X]$ et que nous savons bien compter, il doit exister une constante $c \in \mathbb{R}$, telle que

$$L_i = c\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X - x_k).$$

Comme nous avons également $L_i(x_i) = 1$, on a obligatoirement

$$c = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i - x_k)},$$

à telle enseigne qu'effectivement

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

↱ Les polynômes L_i sont les fameux polynômes de Joseph-Louis Lagrange attachés à la liste *sans répétition* $(x_0, \ldots, x_n)$. La propriété selon laquelle

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \qquad L_i(x_k) = \delta_{ik},$$

est à n'en pas douter, le plus important attribut de ce genre de polynômes. Nous nous y référerons sous le nom de δ-*property*.

c. Nous attaquons l'affaire en cinq points.

▷ Les fonctions polynomiales étant définies *partout, partout*, il est manifeste que Ψ applique bien $\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.

▷ La symétrie de Ψ se passe de tout commentaire.

▷ On fixe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. La linéarité de l'application

$$P \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

repose essentiellement sur celle de la sommation épaulée au passage par la *définition* des opérations sur les polynômes et par un *nanochouia* de distributivité.

▷ La positivité de Ψ est « genre » le nez au milieu de la figure.

▷ Soit pour finir $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\Psi(P, P) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} P^2(x_k) = 0.$$

Le sempiternel argument des sommes nulles de réels positifs ou nuls obligeant inéluctablement

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0,$$

nous concluons que $P = 0$ puisqu'il appartient au noyau de l'injection Φ rencontrée, chemin faisant(*), quelques lignes plus haut.

↱ Ce produit scalaire a également son lot de célébrité. C'est celui de Joseph-Louis attaché à la liste

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Il nous faut maintenant causer d'orthonormalité. Nous nous y prenons en deux temps.

(*) *Pan, pan !*

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 194 13/10/2017 11:35

▹ Soit i et j deux entiers appartenant à $[\![0, n]\!]$, Grâce à l'incontournable δ-*property* lagrangienne, nous avons tour à tour

$$\Psi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk},$$

ce qui, après la toujours aussi délicieuse gestion des symboles de Leopold — tout particulièrement le second — se réduit comme peau de chagrin à

$$\Psi(L_i, L_j) = \delta_{ij}.$$

La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est donc dorénavant orthonormale et c'est une excellente nouvelle.

▹ *Everybody knows* que les familles orthonormales sont libres et notre famille est donc bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puisqu'elle est de surcroît — et ouvertement ! — de longueur *ad hoc* et que nous avons déjà cité l'efficace caractérisation des bases en dimension finie.

↱ Le texte aurait pu caser ici un précieux complément, à savoir l'écriture d'un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}_n[X]$ sur cette prodigieuse base. Nous décidons donc de combler ce manque.

L'officielle propriété « coordonnées dans une base orthonormale » précise qu'ici

$$P = \sum_{i=0}^{n} \Psi(P, L_i)L_i.$$

Seulement voilà, pour chaque entier $i \in [\![0, n]\!]$, nous avons successivement

$$\Psi(P, L_i) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_i(x_k) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\delta_{ik} = P(x_i),$$

la δ-*property* et les délicieuses gestions ayant eu, en core une fois, leur pesant d'arachide. Bref, la réponse à notre préoccupation est

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i, \tag{IDL}$$

relation fondamentale appelée parfois « formule d'interpolation de Lagrange ».

d. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. D'après la magnifique formule (IDL) que nous venons, à l'instant, de mettre sur le marché, nous avons

$$X^j = \sum_{i=0}^{n} x_i^j L_i,$$

et le protocole « passage » qu'il faut impérativement maîtriser, stipule que

$$A = \left[\, x_i^j \,\right]_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}.$$

↱ Cette dernière matrice s'appelle matrice d'Alexandre Théophile Vandermonde attachée à la liste $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et on la trouve dans la littérature sous le *look*

$$\mathbb{V}(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

e. Nous pouvons avantageusement reformuler notre problématique par le biais de l'application Φ du début de cette partie. À bien y regarder, on désire tout simplement l'existence et l'unicité d'un certain polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie

$$\Phi(P_f) = \big(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\big),$$

et comme depuis une fort belle lurette, Φ est bijective...

Pour finir, nous profitons de notre dernière pépite (IDL), car elle témoigne déjà de l'égalité

$$P_f = \sum_{i=0}^{n} P_f(x_i) L_i,$$

qui, au travers de la *mission interpol* de P_f, se transfigure *in fine* en

$$P_f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i.$$

6.a. Les dispositions prises font, entre autres, que

$$P_f \in \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad Q_f \in \mathbb{R}_{n+1}[X],$$

et également

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P_f(x_i) = Q_f(x_i) = f(x_i).$$

Il en résulte que les $n+1$ réels *distincts* $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $Q_f - P_f$ qui, depuis peu, semble appartenir à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Nous sommes donc dans l'obligation d'exiger un réel δ tel que

$$Q_f - P_f = \delta(X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_n),$$

et vu la définition du polynôme w...

↱ On observera qu'en dépit de la timidité du texte, on a en réalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Q_f(t) - P_f(t) = \delta\, w(t).$$

b. Le tout début de la question procède uniquement de la raison d'être du polynôme interpolateur Q_f. La suite repose sur le classique résultat d'analyse que voilà, qui, même s'il n'est pas totalement officiel, est souvent traité en classe par le professeur !

LE LEMME DE ROLLE

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et m un entier naturel non nul. Soit également f une application de I dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 196 13/10/2017 11:35

▷ *f est continue sur I ;*

▷ *f est dérivable m fois sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I.*

On suppose que la fonction f s'annule en $m+1$ points distincts de I. Alors,

$$\exists\, c \in \mathring{I}, \qquad f^{(m)}(c) = 0.$$

PREUVE

Nous allons établir par récurrence finie sur i que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, la fonction $f^{(i)}$ s'annule au moins $m - i + 1$ fois dans $\mathring{I}$, ce qui, en y choisissant $i = m$, ne pourra que nous combler définitivement.

▷ Nous trions en croissant les $m+1$ annulations de f et nous obtenons ainsi $m+1$ zéros $a_0, \ldots, a_m$ de f dans I tels que

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_m.$$

Nos lumineuses hypothèses font que, pour chaque entier $k \in [\![0, m-1]\!]$, la fonction f satisfait aux quatre nécessités du théorème *originel* de Rolle entre a_k et a_{k+1}, à savoir

$$a_k \neq a_{k+1} \quad ; \quad f(a_k) = f(a_{k+1}),$$

continuité sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$; *dérivabilité sur l'ouvert* $]a_k, a_{k+1}[$.

Il existe donc un réel $c_k \in\,]a_k, a_{k+1}[$ tel que

$$f'(c_k) = 0,$$

et comme nous avons l'interlacement

$$a_0 < c_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < c_{m-1} < a_m,$$

nous sommes bien à la tête de m annulations de f', ouvertement situées dans $\mathring{I}$, et l'initialisation est *in the pocket*.

▷ Supposons maintenant que, pour un entier i vérifiant $1 \leqslant i < m$, la fonction $f^{(i)}$ s'annule en au moins $m - i + 1$ points de l'intérieur de I. Comme *supra* nous les trions en croissant, mettons

$$b_0 < \cdots < b_{m-i},$$

et, pour chaque $k \in [\![0, m-i-1]\!]$, les lumineuses permettent d'appliquer cette fois l'originel à $f^{(i)}$ entre b_k et b_{k+1}.

À bien y regarder, cela devrait nous procurer pas moins de $m - i$ annulations de $f^{(i+1)}$, ce qui nous permet de revenir à nos ovins.

La fonction h possède dorénavant $n+2$ zéros distincts situés dans l'intervalle $[a, b]$ et vu l'immense classe des fonctions poynomiales, elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ ce qui est beacoup plus qu'il n'en faut pour lui appliquer le précédent lemme en ayant fait les choix judicieux

$$I = [a, b] \quad \text{et} \quad m = n + 1.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 197 13/10/2017 11:35

En conséquence, il existe bel et bien un réel — pourquoi ne pas le nommer θ ! — situé dans l'intérieur de $[a, b]$, à savoir

$$\mathring{I} =]a, b[,$$

qui est tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$, *and Bob's your uncle !*

c. The tricky guy writes

$$\forall t \in [a, b], \qquad f(t) - P_f(t) = h(t) + Q_f(t) - P_f(t) = h(t) + \delta\, w(t),$$

la dernière égalité procédant du délicieux mais récent a, et après une légale dérivation à l'ordre $n+1$, il apparaît *linéairement* que

$$\forall t \in [a, b], \qquad f^{(n+1)}(t) = h^{(n+1)}(t) + (n+1)!\delta,$$

puisque d'une part, nulle est la dérivée $(n+1)^{ième}$ d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que, d'autre part, celle du *monic polynomial* w, de degré $n+1$, vaut exactement $(n+1)!$ parce que nous le savons bien. L'évaluation au point θ du récent b amène alors sur un plateau la très précieuse égalité

$$\delta = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

qui en révèle un petit peu plus sur le mystérieux δ apparu quelques lignes plus haut.

Il nous revient maintenant qu'il y a une des textuelles dispositions qui n'a pas encore eu son mot à dire ; nous parlons de l'interpolation de f par Q_f au point $\bar{x}$ grâce à laquelle

$$f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = Q_f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \delta\, w(\bar{x}),$$

le *famous and recent a* ayant, encore une fois, été mis à contribution. Le levé de voile concernant δ nous permet alors de clôturer en beauté cette question.

d. Nous commençons par une mise au point qui n'est pas vraiment un *scoop*.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, la fonction $|f^{(n+1)}|$ est continue sur ce segment et selon le théorème d'optimisation de KARL déjà cité plus haut elle y possède carrément un *maximum*(*). Soit t appartenant à $[a, b]$ et organisons-nous en deux temps.

▷ Si t est l'un des x_k, *l'interpolitude* fait que

$$f(t) - P_f(t) = 0,$$

et nous pouvons, *positivement*, passer à la suite.

▷ Si t est différent de $x_0, \ldots, x_n$, nous avons le loisir de choisir $\bar{x} = t$ et il existe donc depuis peu un réel $\theta \in]a, b[$ tel que

$$|f(t) - P_f(t)| = \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times |f^{(n+1)}(\theta)|$$

(*) Au risque de radoter, nous rappelons qu'il est très vexant pour un $\max$, de se faire bassement appeler $\sup$. Nous avons à chaque fois une pensée émue pour Hervé Christiani et sa liberté…

et quand on maîtrise la notion de maximum…

En bref et compte tenu de notre nostalgique rectification, nous revendiquons

$$\forall t \in [a,b], \qquad |f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Partie 3

7. Le texte précise que, dorénavant, l'entier n sera autorisé à bouger.

Il il est dès lors très louable d'afficher la dépendance à n des uns et des autres et cela nous amène, par exemple, aux notations « genre » $x_{k,n}$. Comme nous trouvons lourdes ces dispositions *truffées* de n, et si cela ne dérange personne, nous ne les utiliserons pas systématiquement.

Cependant, lorsque n se décidera à jouer véritablement les filles de l'air, nous serons vigilants et nous aviserons !

a. Puisque ρ n'est pas nul, la fonction polynomiale

$$x \mapsto x^2 + \rho^2$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule jamais. Il ne reste donc plus qu'à *culbuter* l'affaire !

b. La fonction f_ρ est nouvellement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à bien y regarder elle semble y manifester une certaine parité. Nul ne peut alors ignorer ignorer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_\rho^{(n)}$ a la même parité que l'entier n et quand la valeur absolue passe par là…

c. Soit x un réel vérifiant $|x| < \rho$ et profitons-en pour définir l'allégé

$$a = -\frac{x^2}{\rho^2}.$$

Puisqu'à l'évidence $|a| < 1$, le *serial geometer* peut exiger avec force la convergence de la série $\sum a^k$, ainsi que l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Le remplacement de a par son vrai visage et quelques minuscules aménagements conduisent alors dans la douceur à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{\rho^{2k}} = \frac{\rho^2}{x^2 + \rho^2},$$

et le salut passe enfin par une gentille division par le non nul ρ^2.

8. Le théorème que le texte admet à cet endroit est un des fondamentaux d'une très belle théorie analytique appelée « étude des *séries entières* ». Nous sommes nombreux à avoir souvent demandé que cette *artillerie lourde* soit au programme de nos classes,

mais malheureusement sans succès et nous sommes donc bel et bien obligés de nous sousmettre…

À côté de cela, et autant le mettre en place tout de suite, le même *serial geometer* justifiera comme au précédent 7.c que l'on a également

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \qquad v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{\rho^{2k}},$$

égalité que nous gardons sur le feu pour l'instant.

a. Le texte est catégorique. Il a bien dit déterminer « *les* » réels et non déterminer « *des* » réels et il s'agit donc d'une *genuine* problématique d'existence et d'unicité que nous allons gérer par analyse-synthèse.

Analyse

Supposons que le couple (p, q) soit convenable. Après une tranquille réduction au même dénominateur il apparaît que

$$\forall x \in \,]-\rho, \rho[, \qquad (p-q)x + \rho(p+q) = \rho^2.$$

Comme l'ouvert $]-\rho, \rho[$ est un ensemble infini, les deux polynômes

$$(p-q)X + \rho(p+q) \quad \text{et} \quad \rho^2,$$

are infinitely matching et sont donc fatalement égaux. Ils ont ainsi les mêmes coefficients et voilà désormais que

$$p - q = 0 \quad \text{et} \quad p + q = \rho,$$

puisqu'il est précisé depuis une belle lurette que ρ n'est pas nul. Il s'ensuit obligatoirement que

$$p = q = \frac{\rho}{2},$$

et nous sommes supposés savoir qu'une telle conclusion d'analyse règle inéluctablement la question de l'unicité.

Synthèse

Ce n'est maintenant qu'une formalité que de contrôler l'*idoinitude* du couple

$$\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$$

et nous la laissons, *as usual*, à la charge de notre dévoué lecteur.

b. L'intervalle $]-\rho, \rho[$ est symétrique par rapport à 0 et notre fonction v y est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et paire. C'est alors exactement comme au récent 7.b, que nous assénons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \,]-\rho, \rho[, \qquad |v^{(n)}(x)| = |v^{(n)}(-x)|.$$

c. Soit x appartenant à l'ouvert $]-\rho, \rho[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce au théorème de dérivation des séries entières — le *bazooka* que nous avons admis ! — la série

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)} \qquad \text{(BAZOO)}$$

est convergente et nous avons

$$f_\rho^{(n)}(x) = \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)},$$

où, une fois n'est pas coutume, nous nous sommes autorisés une notation, certes un peu exotique — mais ô combien pratique parfois ! — des dérivées successives.

Nous ressortons maintenant l'égalité qui mijote plus haut au début du 8 et la même *rockette antichar*, nous apprend cette fois que la nouvelle série

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)}, \qquad \text{(ANTICHAR)}$$

converge à son tour et que

$$v^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)}.$$

La situation pourrait sembler mal engagée, car nous avons visiblement de méchants problèmes de signe, mais fort heureusement, les questions 7.b et 8.b sont là pour nous persuader que, pour tirer notre épingle du jeu, il suffit à coup sûr de traiter le cas $x \geqslant 0$, ce que nous supposons sur le champ.

Cette désormais positivité de x a une conséquence énorme pour ne pas dire *maous costaud*. Elle révèle en effet que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left(x^{2k}\right)^{(n)} \geqslant 0,$$

puisque le dérivateur compulsif ne peut ignorer l'*arrangement* selon lequel

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left(x^{2k}\right)^{(n)} = \begin{cases} \mathrm{A}_{2k}^{n}\, x^{2k-n} & \text{si} \quad 2k \geqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces précieuses informations révèlent alors que la série *valuée* de la série (BAZOO) n'est autre que sa voisine (ANTICHAR) et nous en déduisons que la série (BAZOO) est *absolument* convergente. Elle est dorénavant tout à fait favorable à l'inégalité triangulaire(*) et voilà donc au bout du compte que

$$\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)},$$

(*) On rappelle qu'il est totalement interdit de « trianguler » les séries semi-convergentes et pour cause !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 201 13/10/2017 11:35

ce qui, parce que $v^{(n)}(x)$ est ici positif, s'écrit éxactement

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{\rho^2}|v^{(n)}(x)|.$$

Disons pour finir, que nous avons déjà indiqué que les questions 7.b et 8.b se chargeraient de régler en douceur le cas de la négativité de x, et nous envigeasons maintenant de changer de question.

↱ Indépendamment des *bazookas* et autres *rockettes*, la question est loin d'être anodine. Le *crux* de l'affaire est la légalisation de la « triangulation » de la série définissant $f_\rho^{(n)}(x)$!

Nous pensons qu'il y a sûrement d'autres façons de parvenir à la convergence *absolue* de cette série — arguments « genre » binôme négatif, par exemple — mais nous avons finalement opté pour l'artillerie lourde.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est très facile — et très classique — de justifier que les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\rho - x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{\rho + x}$$

ont pour dérivées $n^{\text{ièmes}}$ respectives

$$x \mapsto \frac{n!}{(\rho - x)^{n+1}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(\rho + x)^{n+1}}$$

Nous laissons au lecteur dubitatif le soin de s'en assurer inductivement. Il résulte alors de la toute proche question 8.a, délicatement triangulée, que

$$\forall x \in]-\rho, \rho[, \qquad |v^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\rho n!}{2}\Big(\frac{1}{(\rho - x)^{n+1}} + \frac{1}{(\rho + x)^{n+1}}\Big),$$

puisque, *as usual*, les quantités déjà positives, sont dispensées de valuation. Supposons désormais que x soit un élément du segment $[-1, 1]$. La nouvelle situation géographique de ρ obligeant maintenant les *strictement* providentielles

$$0 < \rho - 1 \leqslant \rho - x \quad \text{et} \quad 0 < \rho - 1 \leqslant \rho + x,$$

ce n'est qu'une affaire de *puissante* élévation et de *culbute* que de parvenir à

$$|v^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\rho n!}{(\rho - 1)^{n+1}},$$

une gentille simplification par 2 s'étant glissée dans les rouages. La précédente question et une autre aimable simplification conduisent alors aisément au résultat souhaité.

9. Nous rappelons que, au tout début de cette partie **3** et pour des raisons de légèreté, nous avons demandé l'autorisation de noter simplement et sporadiquement x_k le *heavy* $x_{k,n}$. Cela étant et à très bien y regarder, le réel x appartient à la réunion

$$\bigcup_{i=0}^{n-1}]x_i, x_{i+1}[$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 202 13/10/2017 11:35

et comme il s'agit d'une réunion ouvertement « *disjointe* », il existe effectivement un unique entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que x appartienne à $]x_k, x_{k+1}[$. *Everything is therefore under control !*

a. Soit i appartenant à $[\![0, n]\!]$. Nous devons faire la part des choses.

▷ Si $i \leqslant k$, vu la position idyllique de x et la définition des x_i nous avons tour à tour

$$|x - x_i| = x - x_i \leqslant x_{k+1} - x_i = \frac{2}{n}(k - i + 1).$$

▷ Si $i \geqslant k+1$, au su de la même paradisiaque situation, nous avons cette fois

$$|x - x_i| = x_i - x \leqslant x_i - x_k \leqslant \frac{2}{n}(i - k).$$

Étant maintenant entendu que

$$|w_n(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| = \prod_{i=0}^{k} |x - x_i| \times \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i|,$$

c'est dans une douce ambiance de positivité qu'une multiplication membre à membre nous conduit tranquillement à

$$|w_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \prod_{i=0}^{k}(k - i + 1) \times \prod_{i=k+1}^{n} (i - k).$$

Seulement voilà, la *factorielle attitude* est formelle. Nous avons sans conteste

$$\prod_{i=0}^{k}(k - i + 1) = (k+1)! \quad \text{et} \quad \prod_{i=k+1}^{n} (i - k) = (n-k)!,$$

et nous avons déjà fait un bon bout de chemin.

Il nous reste maintenant établir la majoration

$$(k+1)!(n-k)! \leqslant n!,$$

ou, ce qui revient au même,

$$k + 1 \leqslant \binom{n}{k},$$

comme l'affirme une certaine et importante formule dite des « trois factorielles ». Mais profitant également d'une incontestable symétrie binomiale, nous allons plutôt établir que

$$k + 1 \leqslant \binom{n}{n-k}.$$

Here we go !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 203 13/10/2017 11:35

Nous remarquons tout bêtement que les ensembles

$$[\![1, n-k]\!] \quad ; \quad [\![2, n-k+1]\!] \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad [\![k+1, n]\!],$$

sont de *genuine* parties à $n-k$ éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ et comme k est providentiellement différent de n, elles ont le bon goût d'être distinctes. En conséquence et parce que nous savons bien compter, nous disposons déjà de $k+1$ parties différentes de $[\![1, n]\!]$ ayant, chacune, le cardinal $n-k$ et les zélés dénombreurs savent bien que $[\![1, n]\!]$ a exactement et au total

$$\binom{n}{n-k}$$

sous-ensembles de cardinal $n-k$. *So*...

↱ Nous faisons remarquer que l'hypothèse $k < n$ est loin d'être anodine dans cette affaire. C'est absolument grâce à elle que les ensembles

$$[\![1, n-k]\!] \quad ; \quad [\![2, n-k+1]\!] \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad [\![k+1, n]\!],$$

sont différents et qu'il y en a donc $k+1$. Le lecteur insensible au *vertigo* pourra noter qu'en revanche, si $k = n$, nos ensembles sont tous égaux à l'ensemble vide et il n'y en a donc qu'un seul ! Enfin et histoire d'enfoncer le clou, il pourra également observer que dans ce cas douteux l'inégalité nous avons

$$\binom{n}{n-k} = 1 < k+1 = n+1.$$

b. Notons momentanément (a_n) et (b_n) les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times n! \quad \text{et} \quad b_n = \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.$$

La suite (b_n) est nettement à valeurs strictement positives et grâce à l'équivalence de Stirling-de Moivre puis à de spectaculaires simplifications, on trouve très facilement que

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit naturellement que

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et il existe alors un entier $n_0 \geqslant 1$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \frac{a_n}{b_n} \leqslant 1 \quad \textit{i.e.} \quad a_n \leqslant b_n.$$

Soit maintenant $n \geqslant n_0$ et $x \in [-1, 1]$ et organisons-nous gentiment.

▷ Si x est l'un des réels $x_{i,n}$, nous avons $w_n(x) = 0$ et les palmipèdes échappent à la *wooden leg !*

▷ Si x n'est pas l'un des $x_{i,n}$, la récente question a s'est chargée de mettre en avant

$$|w_n(x)| \leqslant a_n,$$

ce qui, transitivement, et parce que n est plus grand que n_0, débouche sur

$$|w_n(x)| \leqslant b_n,$$

à notre plus grande satisfaction.

↱ Cette question $9.b$ a une formulation *hyper précise*. Sa quantification ressemble à quelque chose du genre

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall x \in [-1,1], \qquad \ldots$$

et un tel ordre dans l'empilement des quantificateurs interdit de proposer un entier n_0 dépendant d'un éventuel réel x et c'est fort heureusement le cas de notre n_0 dévoilé *supra*. Le lecteur curieux ayant pris le temps de creuser l'*uniforme* remarque suivant la question $3.d$ rapprochera ses tergiversations de cette non dépendance…

c. Soit à nouveau $n \geqslant n_0$, $x \in [-1,1]$ et supposons *suffisamment* que

$$\rho > 1 + \frac{2}{e}. \tag{S}$$

D'après la question $6.d$, dans laquelle nous faisons les choix légitimes et judicieux

$$a = -1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad f = f_\rho,$$

nous avons déjà

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w_n(x)| \times \max_{[-1,1]} |f_\rho^{(n+1)}|.$$

Les questions $8.d$ et $9.b$ ont, quant à elles, apporté les précieuses informations suivantes

$$|w_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad \max_{[-1,1]} |f_\rho^{(n+1)}| \leqslant \frac{1}{\rho} \times \frac{(n+1)!}{(\rho-1)^{n+2}},$$

la $8.d$ étant tout à fait opérationnelle car la *suffisance* (S) oblige $\rho > 1$. On place tout cela dans le *shaker*, on agite bien, et il devrait en ressortir une chose du genre

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leqslant \frac{1}{\rho(\rho-1)} \times \left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1}.$$

La fameuse *sufficiency* qui nous accompagne réalisant la miraculeuse situation

$$0 \leqslant \frac{2}{e(\rho-1)} < 1,$$

tout individu ayant assidûment suivi la classe de première scientifique pourra conclure par *squeeze* que

$$f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

ce qui n'est pas pour nous défriser !

↱ Nous relançons encore une fois le lecteur avide en lui faisant remarquer, qu'ici, la suite de polynômes $(P_{f_\rho,n})$ converge *uniformément* vers f_ρ sur $[-1,1]$.

10. Nous faisons valoir que, lorsque ρ n'est pas nul, la fonction

$$t \mapsto \ln(t^2+\rho^2)$$

est carrément de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le *segment* $[-1,1]$. Elle y est donc assurément continue et notre intégrale est d'une netteté impeccable ce qui est, pour le moins, une excellente nouvelle.

En outre, et parce que l'intégrande est lumineusement paire, nous n'ignorons pas que

$$H(\rho) = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)dt.$$

a. En partie grâce à ce que nous venons de narrer, les deux fonctions

$$u : t \mapsto \ln(t^2+\rho^2) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto t$$

sont ouvertement de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ et nous avons

$$\forall t \in [0,1], \qquad u'(t) = \frac{2t}{t^2+\rho^2} \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

L'officiel théorème d'intégration par parties stipule alors que

$$\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)dt = \ln(1+\rho^2) - 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+\rho^2}dt,$$

et en vertu de la *tricky* du siècle selon laquelle

$$\forall t \in [0,1], \qquad \frac{t^2}{t^2+\rho^2} = 1 - \frac{\rho^2}{t^2+\rho^2},$$

c'est très linéairement que nous revendiquons

$$\int_0^1 \ln(t^2+\rho^2)dt = \ln(1+\rho^2) - 2 + 2\rho^2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+\rho^2}.$$

Comme il se fait tard, nous demandons à notre lecteur compréhensif d'accepter docilement la facile intégration(*)

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+\rho^2} = \left[\frac{1}{\rho}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\rho}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

(*) Il peut être bon de connaître par cœur les primitives de $t \mapsto (t^2+a^2)^{-1}$ lorsque a est non nul.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 206 13/10/2017 11:35

à telle enseigne que le résultat des courses devrait finalement être

$$H(\rho) = \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \rho\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\cdot$$

Si nous ajoutons à cela que sans l'ombre d'un doute

$$\ln(1+\rho^2) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}]{} \frac{\pi}{2},$$

il est assez difficile de s'opposer à

$$H(\rho) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}]{} -1,$$

et nous réussissons effectivement le prolongement par continuité souhaité en décrétant que $H(0) = -1$.

b. Vu les propriétés de classe des logarithmes et autres arctangentes, la fonction H est ouvertement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on trouve aisément

$$\forall \rho > 0, \qquad H'(\rho) = \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) > 0.$$

En outre, et maintenant qu'elle a été joliment prolongée, la fonction H est également continue sur $\mathbb{R}_+$. Nous rappelons alors simplement le fin théorème de Lagrange que voici.

CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ, STRICTE MONOTONIE

Soit I un intervalle *de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

i. f est continue sur I ;

ii. f est dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I ;

iii. on a

$$\forall x \in \overset{\circ}{I}, \qquad f'(x) > 0.$$

Alors, l'application f est strictement croissante sur I.

Grâce à ce très fonctionnel théorème — il devrait figurer dans tous les cours de première année ! — la fonction H est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme il est *positivement* incontestable que

$$\forall \rho > 0, \qquad H(\rho) \geqslant \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1,$$

nous avons sans l'aide d'aucun antalgique

$$H(\rho) \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} +\infty.$$

Toutes ces précieuses informations et le grand théorème de la bijection font alors, inéluctablement, que H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 207 13/10/2017 11:35

↱ Il se trouve, en réalité, que H est ici dérivable en zéro et que $H'(0) > 0$. Nous aurions donc pu nous dispenser des finesses du théorème de Lagrange évoqué plus haut, mais pourquoi se priver d'un outil qui se moque, comme de sa première chemise, des faiblesses de dérivabilité aux bornes de l'intervalle I ?

c. Le réel $-1 + \ln 2$ appartient à l'*ouvert* $]-1, +\infty[$ et, bijection oblige, il existe effectivement un unique réel ρ_0 dans l'*ouvert* $\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$H(\rho_0) = -1 + \ln 2.$$

Nous allons alors, en avant-première, utiliser la fonction G qui pointera son bout de nez à la prochaine question 11, en l'occurence la différence

$$G : x \mapsto H(x) - (\ln 2 - 1),$$

dont le tableau de signe devrait facilement ressembler à

x	0		ρ_0		$+\infty$
G		$-$	0	$+$	

Comme $\operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$, nous avons ensuite

$$G(1) = \frac{\pi - 2\ln 2}{4} > 0,$$

cette stricte positivité provenant, mentalement, des deux évidences

$$\pi > 3 \quad ; \quad 2\ln 2 < 2\ln e = 2,$$

la première étant carrément connue de l'homme de la rue ! Un simple coup d'œil à notre tabeau de signe fait alors qu'il est indubitable que $\rho_0 < 1$.

↱ Notons que nous n'avons pas eu la nécessité d'utiliser l'approximation de $\ln 2$ fournie par le texte qui avait pourtant mis le paquet avec pas moins de trois décimales !

d. Les racines du polynôme w_n sont visibles à l'oeil nu. Il s'agit des fameux *réels* $x_{k,n}$. Seulement voilà, vu que ρ n'est pas nul, $i\rho$ n'est pas réel et par conséquent $w_n(i\rho)$ n'est pas nul et l'on a fatalement

$$|w_n(i\rho)| > 0.$$

Remarquons pour la suite que

$$w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{n} (i\rho - x_{k,n}),$$

et que par conjugaison de ce produit, nous avons également

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n} (-i\rho - x_{k,n}),$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 208 13/10/2017 11:35

les quantités déjà réelles étant, *as usual*, dispensées de conjugaison. Il en résulte mécaniquement que

$$|w_n(i\rho)|^2 = w_n(i\rho)\times\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n})(-i\rho - x_{k,n}),$$

ce qu'une identité remarquable du *teenager* transforme magnifiquement en

$$|w_n(i\rho)|^2 = \prod_{k=0}^{n}(\rho^2 + x_{k,n}^2).$$

↱ Notons, au passage, que cette égalité fournit une nouvelle preuve de la première partie de la question. La prise de logarithme, doublement légitimée, et une division par le non nul n, conduisent alors facilement à

$$\frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\ln(\rho^2 + x_{k,n}^2) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{l}\Big(-1 + 2\frac{k}{n}\Big),$$

où, histoire de mettre un peu de beurre dans les épinards, nous nous sommes autorisés la notation $\mathfrak{l}$ pour une fonction qui nous hante depuis quelques lignes, en l'occurrence

$$\mathfrak{l} : t \mapsto \frac{1}{4}\ln(\rho^2 + t^2).$$

Il y a maintenant de la somme de Riemann dans l'air ! En effet, et depuis la nuit des temps, le partage

$$(x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n})$$

est la subdivion régulière du segment $[-1,1]$ en n parts et comme $\mathfrak{l}$ est providentiellement continue sur ce segment, l'important théorème de Darboux-Riemann stipule sans sourciller que

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{l}(x_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(\rho),$$

et puisque

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{l}(x_{k,n}) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{l}(x_{k,n}) + \frac{2\mathfrak{l}(1)}{n},$$

nous avons à l'avenant

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{l}(x_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(\rho),$$

et il nous semble urgent de changer de question.

↱ Nous nous devons d'insister sur un point de cours particulièrement important. Le professeur a dû préciser en classe qu'il y a, *grosso modo*, deux types de sommes de Riemann de rang n et qui ont les *looks* respectifs

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big)$$

et ce sont elles qui sont concernées par le théorème de Darboux-Riemann. Une somme de genre

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\Big(a+\frac{k}{n}(b-a)\Big)$$

n'est pas, au sens académique du terme, une somme de Riemann, et c'est ce qui explique nos petits ajustements *supra*.

11.a. Juste pour le *fun* nous vous suggérons de la jouer en *qcm* avec les trois réponses possibles que voici :

i. la méthode rose ;

ii. la méthode Coué ;

iii. la méthode de dichotomie.

Cela étant, on décrypte sur la première ligne de code que, mettons pour un $x > 0$, on a

$$G(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x^2}{4}\Big) + x\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{x}\Big) = H(x) + 1 - \ln 2,$$

la dernière égalité reposant sur une intervension musclée du *physio*.

Comme le rôle de la *méthode*, forcément sélectionnée par nos gagnants de *qcm*, est de donner des valeurs approchées de certains zéros fonctionnels, le programme en question est *a priori* chargé d'approximer à 10^{-3} près une solution de l'équation $G(x) = 0$ mais qui, vu la deuxième ligne de code, devrait se situer entre 0.25 et 1. Depuis notre avant-première de la question 10.c nous connaissons un zéro de G, en la personne de ρ_0, pour l'instant situé dans l'ouvert $]0, 1[$, et le dénouement de l'affaire doit passer par la recherche de la position de ρ_0 par rapport à 0.25.

Comme, à l'époque, nous avons mis en place un très précieux tableau de signe, c'est tout naturellement que notre regard se porte sur $G(0.25)$ et un calcul moins fatiguant que poétique révèle que

$$G\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(1+\frac{1}{16}\Big) - \ln 2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}\,4.$$

Everybody knows the classical

$$\forall u > -1, \qquad \ln(1+u) \leqslant u.$$

On sait également qu'un arctangente est toujours inférieur à $\pi/2$ et selon l'approximation de $\ln 2$ textuellement fournie, on peut espérer que $\ln 2 \geqslant 0.6$. Comme enfin, l'homme de la rue sait que $\pi \leqslant 3.2$, il devrait émerger de ce cruel magma que

$$G\Big(\frac{1}{4}\Big) \leqslant -\frac{27}{160} < 0,$$

et notre ρ_0 est définitivement situé entre 0.25 et 1.

En conclusion notre code donne une valeur approchée à 10^{-3} près du fameux ρ_0 *alias* s_0.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 210 13/10/2017 11:35

↱ Il se trouve que $1/3$ pouvait également faire l'affaire en lieu et place de 0.25 et les calculs à virgules auraient été un petit peu plus simples, mais à peine…

b. Nous pensons avoir déjà répondu à cette question !

12. Remarquons avant tout que S_n est un polynôme et aux dernières nouvelles il devrait même appartenir à $\mathbb{R}_{n+2}[X]$. Nous saurons nous en souvenir…

a. Soit k appartenant à $[\![0, n]\!]$. Interpolation oblige, nous avons

$$P_{f_\rho,n}(x_k) = f_\rho(x_k) = \frac{1}{x_k^2 + \rho^2},$$

et il s'ensuit dans la foulée que

$$S_n(x_k) = 0.$$

Les x_k sont donc désormais des zéros de S_n, et comme ils sont différents…

b. Il y a une chose que nous n'avons pas eu l'occasion d'utiliser jusqu'ici et qui, par la suite, va avoir énormément de poids. Il s'agit de la remarque, judicieuse et facile, selon laquelle

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad -x_k = x_{n-k}, \tag{SYM}$$

que nous avons baptisée (SYM) parce qu'elle signifie que les réels x_k et x_{n-k} sont symétriques par rapport à 0. Il est alors assez facile — le lecteur habile en changements d'indices et autres classiques manipulations s'en sortira très bien — d'en déduire que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_{k,n}(-x) = L_{n-k,n}(x),$$

précieuse propriété qui va bientôt avoir son pesant d'arachide. Soit alors x un nombre réel. Nous avons

$$P_{f_\rho,n}(-x) = \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_k) L_{k,n}(-x),$$

que la toute récente et précieuse métamorphose en

$$P_{f_\rho,n}(-x) = \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_k) L_{n-k,n}(x).$$

L'éternel changement d'indice de lecture à rebours, *say* $k := n - k$, la propriété (SYM) et la parité de f_ρ font alors qu'au bout du compte

$$P_{f_\rho,n}(-x) = P_{f_\rho,n}(x),$$

chronique d'une parité annoncée…

c. On trouve très facilement

$$|w_n(y_n)| = \frac{1}{n^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} (2k-1),$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 211 13/10/2017 11:35

le sempiternel changement d'indice *countdown* ayant encore une fois été mis à contribution, et comme nul ne peut ignorer les formules dites des doubles factorielles rappelées *infra*, on obtient déjà

$$|w_n(y_n)| = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n^{n+1}}.$$

Il suffit alors de déterrer l'équivalence de James et Abraham pour voir apparaître en beauté

$$|w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

quelques spectaculaires simplifications ayant, deci delà, jalonné le parcours. Les réels strictement positifs

$$\tau = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{2}{e},$$

sont donc assurément les bienvenus !

↱ Cette présentation d'équivalence demandée par le texte n'est pas du tout opérationnelle. Étant entendu que

$$\ln\frac{2}{e} = \ln 2 - 1 = H(\rho_0),$$

nous préférons et de loin la nouvelle version

$$|w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n} e^{nH(\rho_0)}.$$

Nous la ressortirons en temps utiles.

Voici maintenant comme promis une petite piqûre de rappel.

LA DOUBLE FACTORIELLE

Soit n un entier naturel. La classique factorielle descend les marches une par une alors que la double factorielle les descend deux par deux. Elle est notée avec deux points d'exclamation. Ainsi

$$n!! = n\times(n-2)\times\cdots\times *$$

où l'étoile finale « $*$ » est égale à 1 si n est un naturel impair et à 2 si n est un entier pair supérieur ou égal à 2.

On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les archiclassiques factorialisations

$$(2p)!! = 2\times4\times\cdots\times(2p) = 2^p p! \quad \text{et} \quad (2p-1)!! = 1\times3\times\cdots\times(2p-1) = \frac{(2p)!}{2^p\, p!},$$

que le lecteur, s'il ne les a jamais pratiquées, retrouvera sans peine muni d'un crayon à papier et d'un confetti

d. Attention, le résultat admis est faux ! On a en réalité

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)\big) = \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2),$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 212 13/10/2017 11:35

mais, fort heureusement, cela ne va pas chambouler le cours de l'histoire. La sempiternelle continuité de la fonction exponentielle et notre légendaire habileté en *expologmania* doivent normalement nous conduire à

$$\frac{|w_n(i\rho)|}{e^{nH(\rho)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+\rho^2},$$

et comme les « flèches » vers des limites *non nulles*(*) peuvent se transformer allègrement en équivalence, nous nous permettons de revendiquer

$$|w_n(i\rho)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\rho^2}\; e^{nH(\rho)},$$

et le nouvel aspect de l'équivalence du récent c nous dépose en douceur sur

$$\frac{|w_n(y_n)|}{|w_n(i\rho)|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1+\rho^2}} \times \frac{e^{n(H(\rho_0)-H(\rho))}}{n}.$$

13.a. Comme nous l'avons déjà découvert lors de la question 10.d nous avons

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(-i\rho - x_{k,n}),$$

égalité qui, lorsque l'on sait compter de 0 à n pourrait se décliner en

$$\overline{w_n(i\rho)} = (-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(i\rho + x_{k,n}) = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{n-k,n}),$$

la dernière version reposant sur la toute nouvelle *imparité* de n et sur la savoureuse propriété (SYM) de nos amis $x_{k,n}$. C'est alors *via* l'inévitable changement d'indice *cuenta atrás* et à la pertinence du *physio* que nous débouchons sur

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n}) = w_n(i\rho).$$

Étant égal à son conjugué, le complexe $w_n(i\rho)$ est profondément réel et comme il est non nul depuis une fort belle lurette, nous avons bien l'appartenance

$$w_n(i\rho) \in \mathbb{R}^*,$$

et c'est déjà un bon début.

Depuis les conclusions de la question 12.a, le poynôme w_n divise le polynôme S_n et nous nous rappelons que

$$\deg w_n = n+1 \quad \text{et} \quad \deg S_n \leqslant n+2,$$

(*) Limites nulles s'abstenir ! !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 213 13/10/2017 11:35

à telle enseigne qu'il doit indéniablement exister deux réels a et b tels que

$$S_n = (aX + b)w_n.$$

Comme il est patent que $S_n(i\rho) = 1$, de sorte que

$$ai\rho + b = \frac{1}{w_n(i\rho)},$$

puisque, au risque de battre la breloque, notre ami $w_n(i\rho)$ n'est pas nul. Comme notre camarade est depuis peu foncièrement réel et, comme depuis beaucoup plus longtemps, le réel ρ n'est pas nul, il s'avère que

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{w_n(i\rho)},$$

à telle enseigne que

$$S_n = \frac{w_n}{w_n(i\rho)}.$$

b. Soit x appartenant au segment $[-1, 1]$. Nous avons sans détour

$$f_\rho(x)\, S_n(x) = f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x),$$

égalité que le récent *a* renouvelle en

$$f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) = f_\rho(x) \times \frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}.$$

Il ne reste plus qu'à valuer l'affaire sans omettre la positivité d'un certain $f_\rho(x)$.

↱ À bien y regarder le domaine de validité de la précédente égalité n'est pas seulement le segment $[-1, 1]$, c'est en réalité la totalité de $\mathbb{R}$!

14. Dans ce qui suit et sans que nous en fassions tout un *pataques*, lorsque nous écrirons des limites ou des équivalences sur n, il sera entendu qu'elles porteront sur des sous-suites tacitement impaires. Nous noterons ainsi tout simplement $\lim\limits_{n\to+\infty}$ ce que nous devrions noter

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ impair}}},$$

et nous ferons de même pour l'équivalence, tout cela, bien sûr, dans l'unique but louable de ne pas surcharger les écritures.

a. D'après la fin de la question 13, nous avons

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| = f_\rho(y_n) \times \frac{|w_n(y_n)|}{|w_n(i\rho)|},$$

et comme il semble bien que

$$f_\rho(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+\rho^2},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 214 13/10/2017 11:35

nous sommes en droit d'espérer que

$$f_\rho(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\rho^2},$$

puisque les « flèches vers les non nuls »…

Mezalor, en rapprochant cela de l'équivalence de la $13.d$, nous proclamons haut et fort

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \kappa \times \frac{e^{n(H(\rho_0)-H(\rho))}}{n},$$

où κ est une constante strictement positive que, pour des raisons purement esthétiques, nous ne jugeons pas nécessaire d'étaler. Seulement voilà, il est ici précisé que $0 < \rho < \rho_0$, et si l'on en croit une certaine croissance stricte, il devrait se révéler que

$$H(\rho_0) - H(\rho) > 0.$$

Comme il existe sur le marché un arsenal de prépondérances classiques appelé parfois catalogue des « croissances comparées », nous nous devons d'asséner que

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

b. La fonction $|f_\rho - P_{f_\rho,n}|$ est, depuis belle lurette, continue sur le *segment* $[-1, 1]$. Selon l'important théorème d'optimisation de Weierstrass déjà cité plusieurs fois, elle y possède carrément un *maximum* et nous avons déjà eu l'occasion de signaler que…

Cela étant, et parce que y_n appartient au segment $[-1, 1]$, une vraie lapalissade précise que

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \leqslant \max_{[-1,1]} |f_\rho - P_{f_\rho,n}|.$$

Le récent a et un somptueux *squeeze* à l'infini amènent définitivement à

$$\max_{[-1,1]} |f_\rho - P_{f_\rho,n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

↱ Cette pathologie, découverte en 1901 par le mathématicien Carl David Tolmé Runge, a mis un sacré coup de pied dans la fourmilière, confirmant que nos inspirations ont parfois leurs limites.

Qui pourrait en effet imaginer perdre de la précision en démultipliant le nombre de points d'une interpolation ? *And yet…*

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 215 13/10/2017 11:35