

# MATHÉMATIQUES

**DURÉE : 4 HEURES.**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## SUJET

### PROBLÈME 1

#### Partie I : Étude d'une fonction $f$ définie par une intégrale

1. Montrer que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$  converge.

On note  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , par :  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ .

2. Montrer :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$ . En déduire :  $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty$ .

3. Montrer :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$ . En déduire :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ .

4. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$  converge et que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt.$$

En déduire :  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

#### Partie II : Une autre expression intégrale de $f$

##### A - Dérivabilité et expression de la dérivée de $f$ sous forme d'une intégrale

5. Soit  $(x, h) \in ]0; +\infty[ \times \mathbb{R}^*$  tel que  $h > -\frac{x}{2}$ .

a. Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$  converge.

b. Établir :  $\forall t \in [0; +\infty[, \left| \frac{1}{h} \left( \frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$ .

c. En déduire :  $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$ .

<https://vertuprepas.com/>

6. En déduire que  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ .

7. Montrer, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  et tout  $(\varepsilon, A) \in ]0; 1] \times ]1; +\infty[$  :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8. En déduire :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$ .

9. Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0; +\infty[$  et que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$ .

**B - Intervention d'une fonction auxiliaire  $g$**

On note  $g : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , par :  $g(x) = e^{-x}f(x)$ .

10. Démontrer que  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$ .

11. Montrer que, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , l'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  converge et que :

$$\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du,$$

puis :  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$

12. Montrer :  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ .

13. Quelle est la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$  ?

**Partie III : Étude d'une densité**

On note  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , par :  $h(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t} & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

14. Montrer que  $h$  est une densité.

15. Soit  $X$  une variable aléatoire réelle admettant  $h$  pour densité. Montrer que  $X$  admet une espérance et calculer  $E(X)$  à l'aide de  $f(1)$ .

**PROBLÈME 2**

Dans tout le problème,  $n$  est un entier tel que  $n \geq 2$ .

On note  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles d'ordre  $n$  et  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles à une colonne et  $n$  lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tA$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

Si  $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors  ${}^tV$  désigne la matrice transposée de  $V$ .

Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et si  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ , alors le coefficient de la ligne numéro  $i$  et de la colonne numéro  $j$  de  $A$  est noté  $a_{i,j}$ , la matrice  $A$  est notée  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Si  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors la matrice colonne  $V$  est notée  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on note  $C_j(A)$  la matrice colonne de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée des coefficients de la colonne numéro  $j$  de  $A$ . Ainsi :  $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$ .

**Partie I : Un exemple**

Soient  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $A_0 = U_0 {}^tV_0$ .

1. Vérifier que 0 est valeur propre de  $A_0$  et déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. a. Calculer  $A_0 U_0$ .  
b. Montrer que  $A_0$  est diagonalisable dans  $M_4(\mathbb{R})$ .  
c. Déterminer une matrice diagonale  $D$  de  $M_4(\mathbb{R})$  et une matrice inversible  $P$  de  $M_4(\mathbb{R})$  telles que  $A_0 = P D P^{-1}$ .

**Partie II : Trace d'une matrice carrée**

Pour toute matrice carrée  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ , on appelle trace de  $A$  et on note  $\text{Tr}(A)$  la somme des coefficients diagonaux de  $A$ , c'est à dire  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

3. Montrer que l'application  $\text{Tr} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{Tr}(A)$ , est linéaire.
4. Montrer :  $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .
5. Vérifier :  $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2$ .

**Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1**

6. Soient  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  deux matrices colonnes non nulles de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$ .  
a. Justifier :  $U {}^tV \in M_n(\mathbb{R})$ . Déterminer les coefficients de  $U {}^tV$  l'aide des coefficients de  $U$  et de  $V$ .  
b. Exprimer  $\text{Tr}(U {}^tV)$  à l'aide des coefficients de  $U$  et de  $V$ .  
c. Quel est le rang de  $U {}^tV$  ?
7. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1.  
a. Montrer qu'il existe  $j_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que, pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , il existe  $\alpha_j \in \mathbb{R}$  vérifiant :  
$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$
  
b. En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles  $U$  et  $V$  de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  telles que  $A = U {}^tV$ .
8. Énoncer une caractérisation des matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  de rang 1.

**Partie IV : Une application en probabilités**

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose de plus :  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ .

On note, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{i,j} = P((X = i) \cap (Y = j))$ , puis  
 $M = (m_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R}), U_X = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $U_Y = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ .

9. On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.  
Calculer  $U_X {}^tU_Y$ . En déduire que la matrice  $M$  est de rang 1.
10. On suppose, dans cette question, que la matrice  $M$  est de rang 1.  
a. Montrer :  $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$ .  
b. En déduire que, pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , il existe  $\beta_j \in \mathbb{R}$  tel que  $C_j(M) = \beta_j U_X$ .  
c. Montrer :  $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(Y = j) = \beta_j$ .  
d. En déduire que les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables**

Soit  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice de rang 1. On note  $U$  et  $V$  deux matrices colonnes non nulles de  $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telles que  $A = U^t V$  et on note  $a = \text{Tr}(A)$ .

11. Montrer que 0 est valeur propre de  $A$  et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
12. Montrer :  ${}^t V U = (a)$ , puis :  $A^2 = aA$ .
13. Montrer que si  $a = 0$ , alors  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .
14. On suppose  $a \neq 0$ . Calculer  $AU$ . Dédurre des questions précédentes que  $A$  est diagonalisable.
15. Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1 soit diagonalisable.

**Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique**

16. Montrer que l'application :  $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$  est un produit scalaire sur  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .

On munit dorénavant  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne  $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  telle que  $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$ . On note  $S = V^t V$ .

17. Montrer que  $S$  est une matrice symétrique de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  et que  $S^2 = S$ .
18.
  - a. Montrer que l'application  $\Phi : M \mapsto SM$  est un endomorphisme symétrique de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - b. Vérifier  $\Phi^2 = \Phi$ . Que peut-on dire des valeurs propres de  $\Phi$  ?
  - c. On note  $e$  l'application identité de  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(\Phi)$  et  $\text{Ker}(\Phi - e)$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ .

