MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Exercice 1

Partie I : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) En Scilab, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M.

On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,'r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1  =
     1.
r2  =
     2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2 Id)$.

2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f-\lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$- espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D-\lambda_1 I_n)(D-\lambda_2 I_n)\ldots(D-\lambda_p I_n)=0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p} \dfrac{X-\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4) a) En distinguant les cas $i=k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P=\sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$

d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.

5) a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f-\lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n=3$, $E=\mathbb{R}^3$ et $p=2$.

Exercice 2

Partie 1 : question préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\text{Arctan}'(x)$.

b) Donner la valeur de $\text{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\text{Arctan}(x)\underset{0}{\sim}x$$

2) a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x)=\dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x} & \text{si } x>0\\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n=\max(X_1,\dots,X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n=\dfrac{\pi}{n}M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ G_n(x)=\left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right)+\frac{1}{2}\right)^n$$

5) a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$G_n(x)=\left(1-\frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E.
Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

1) a) Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y \rangle e_i$$

b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.

2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1a) est effectivement un endomorphisme de E.
b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux.
On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité :

$$u \circ u^* = u^* \circ u$$

3) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4) a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \| u(x) \| = \| u^*(x) \|$.
b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^*)$.

5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.
a) Montrer que E_λ est stable par u^*.
b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Problème

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) t^k$$

1) Calculer $G(1)$.

2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3) Établir la relation : $V(X) = G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2$.

Partie 2

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4) a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

b) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$.

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$.
Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables `A(j)` et `A(p)`.

```
(1)   n=input('entrez une valeur pour n :')
(2)   A=1:n
(3)   p=n
(4)   for k=1:n
(5)        j=grand(1,1,'uin',1,p)
(6)        aux=----
(7)        A(j)=----
(8)        A(p)=----
(9)        p=p-1
(10)  end
(11)  disp(A)
```

7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1, n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables.
On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
   if A(k)>m then m=A(k)
                  c=k
   end
end
disp(c)
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Quel est le contenu de la variable `c` affiché à la fin de ces commandes ?

c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.
Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(---)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique c effectuées au cours du script présenté au début de la question 7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n.
On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

8) Donner la loi de X_1.

9) a) Montrer que $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

b) Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $((A_n = n), (A_n < n))$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall j \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = j) = \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j)$$

d) Donner la loi de X_4.

10) a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9c) reste valable pour $j = 1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{t+n-1}{n} G_{n-1}(t) \qquad (*)$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R},\ G_n(t) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (t+j)$$

11) En dérivant la relation $(*)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E_n = u_n$$

12) Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(*)$, montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ V_n - V_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.