MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

SUJET

Exercice 1

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$.
2. a) Exprimer A en fonction de D, P et P^{-1}.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
   c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.
   d) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n \\ 2+(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}$.

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës A, B et C. A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce B. On suppose que les déplacements qui suivent se font selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce A ou dans la pièce C alors elle revient dans la pièce B à l'instant $n+1$;
- si à un instant n donné la mouche est dans la pièce B alors elle y reste à l'instant $n+1$ avec la probabilité $\frac{1}{2}$, sinon elle va de façon équiprobable dans A ou dans C.

Pour tout entier naturel n, on définit l'événement A_n : « la mouche est dans la pièce A à l'instant n ». On définit de même les événements B_n et C_n. Enfin, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces événements.

3. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n \ ; \ b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$.

5. a) Justifier que $U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier naturel n.
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n = A^n U_0$.
   c) Déduire de la question 2.d) que pour tout entier naturel n on a : $b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
   d) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des expressions de a_n et c_n en fonction de n.

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe de f.
   c) Montrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $[1, +\infty[$ et en dessous de $\mathcal{D}$ sur $]0, 1]$.
2. a) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$.
   b) Montrer que $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2)$. En déduire que $g(x)$ est positif strictement sur $]0, +\infty[$.
   c) Montrer que la dérivée de f vérifie pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
   d) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites trouvées en 1.a)
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé d'unité 2cm.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

4. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geq n + 1$.
   b) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Coralie est étudiante en classe préparatoire. Chaque matin, elle se lève en retard avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle se lève en retard elle est obligée de prendre le bus pour se rendre au lycée. Par contre, lorsque elle est à l'heure, elle choisit avec deux chances sur cinq d'aller à pied et avec trois chances sur cinq de prendre le bus.

Partie I

On considère un matin donné et on définit les événements R : « Coralie se lève en retard » et B : « Coralie prend le bus ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(B) = \frac{11}{15}$.

2. On remarque qu'un matin donné Coralie prend le bus. Quelle est la probabilité qu'elle se soit levée à l'heure ?

3. On étudie maintenant les trajets pendant les 180 jours de cours d'une année scolaire. On suppose que chaque jour les choix de Coralie sont indépendants des choix des jours précédents.

   On nomme X la variable aléatoire égale au nombre de fois ou Coralie prend le bus.

   a) Reconnaître la loi de X. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque entier k, une expression de $P(X = k)$ en fonction de k.

   b) Donner $E(X)$ et $V(X)$.

   c) En moyenne combien de matins dans l'année Coralie peut-elle espérer aller au lycée à pied ?

Partie II

La société de bus annonce pour la semaine prochaine un préavis de grève reconductible. On suppose que durant la grève aucun bus ne circule.

Cette fois-ci, bien entendu, Coralie est obligée de se rendre au lycée à pied. Mais si elle se lève en retard, elle arrivera en retard au lycée. Chaque jour de grève, elle arrive donc en retard au lycée avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

On admet que la durée de la grève en nombre de jours suit une variable aléatoire N dont la loi est donnée dans le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(N = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de jours où Coralie est en retard au lycée pendant la période de grève.

1. Calculer $E(N)$.

2. Décrire $Y(\Omega)$, ensemble des valeurs prises par Y.

3. a) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{(N=1)}(Y = 0)$ et $P_{(N=1)}(Y = 1)$.

   b) En déduire que $P((N = 1) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{3}$ et que $P((N = 1) \cap (Y = 1)) = \frac{1}{6}$.

   Que valent $P((N = 1) \cap (Y = 2))$ et $P((N = 1) \cap (Y = 3))$?

4. On admet que la loi conjointe du couple (N, Y) est donnée dans le tableau suivant :

N \ Y	0	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0
2	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{72}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{72}$

a) Déterminer la loi de Y. Justifier que $E(Y) = \frac{5}{8}$.

b) Quelle est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève ?

c) Les variables aléatoires Y et N sont-elles indépendantes ?

d) Calculer $E(YN)$. En déduire $\text{cov}(Y, N)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\ln(2)(t+1)} \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt$.

   b) Montrer que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f. On nomme F la fonction de répartition de X.

2. a) Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$ et pour tout réel $x > 1$.

   b) Montrer que si $x \in [0,1]$ alors $F(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln(2)}$.

   c) On donne $\ln(3) \simeq 1,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer que $P(X \leq \frac{1}{2}) \simeq \frac{4}{7}$.

3. a) Justifier que pour tout réel t de $[0,1]$ on a : $\dfrac{t}{t+1} = 1 - \dfrac{1}{t+1}$.

   b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1} dt$.

   c) Justifier que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}$.