MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

SUJET

Exercice 1

On considère les matrices $N = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \frac{1}{20}N$.

On pose : $A = N - 4I$ et $B = N - 12I$.

1. Vérifier que $AB = BA = 0$. En déduire que : $NA = 12A$ et que $NB = 4B$.
2. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = \frac{1}{8}$, $b_0 = -\frac{1}{8}$ et les relations :

$$a_{n+1} = 12a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 4b_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $N^n = a_nA + b_nB$.

   b) Quel est le type des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   Déterminer, pour tout entier naturel n, des expressions de a_n et de b_n en fonction de n.

   c) Montrer que : $M^n = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^n A - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n B$ pour tout entier naturel n.

3. Un particulier a acheté une poule. La poule pond chaque semaine entre 0 et 3 œufs. Si une semaine donnée, la poule ne pond pas d'œuf, son propriétaire décide de la manger à la fin de la semaine (elle ne pondra donc plus d'œufs les semaines suivantes). On note pour tout entier n non nul,

   - U_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond un œuf » ;
   - D_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond deux œufs » ;
   - T_n l'événement « la poule est vivante lors de la n-ème semaine et pond trois œufs ».

   On note u_n, d_n et t_n leurs probabilités respectives. On suppose que la première semaine la poule pond un œuf puis que pour tout entier n non nul, on a :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7}{20}u_n + \frac{1}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ d_{n+1} = \frac{3}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{1}{20}t_n \\ t_{n+1} = \frac{9}{20}u_n + \frac{3}{10}d_n + \frac{7}{20}t_n \end{cases}$$

On note X_n la matrice $\begin{pmatrix} u_n \\ d_n \\ t_n \end{pmatrix}$.

a) Justifier que : $X_{n+1} = MX_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

b) Montrer que : $X_n = M^{n-1}X_1$, pour tout entier $n \geq 1$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \;;\; d_n = \frac{3}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

d) Que représente le nombre $1 - (u_n + d_n + t_n)$?

e) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $u_n + 2d_n + 3t_n = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + 2d_n + 3t_n)$ converge et calculer sa valeur. Que représente ce nombre ?

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$. On nomme $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une droite asymptote $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 2$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Justifier que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

   On donne $e \simeq 2,7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. *On donne* $\alpha \simeq 1,84$ *et* $\beta \simeq -1,14$.

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - e^{-x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

   a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.

   b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.

   Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

   c) Etablir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.

   d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|$ pour tout entier naturel n.

   e) Montrer par récurrence que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}$ pour tout entier naturel n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3

Un immeuble est constitué de 3 étages. Dans le hall de l'immeuble on peut accéder à un ascenseur qui distribue chaque étage. 5 personnes montent ensemble dans l'ascenseur. On suppose que chacune d'elle souhaite monter à l'un des trois étages de manière équiprobable et indépendamment des 4 autres. On suppose également que l'ascenseur dessert les étages demandés dans l'ordre et qu'il ne revient pas en arrière.

On note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 1, X_2 la variable aléatoire égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 2 et X_3 celle égale au nombre de personnes s'arrêtant à l'étage numéro 3.

1. a) Reconnaître la loi de X_1. Décrire l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1. Donner $P(X_1 = k)$ pour chaque k appartenant à $X_1(\Omega)$.
   b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
   c) Expliquer pourquoi X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.
2. a) Justifier que $X_1 + X_2 + X_3 = 5$.
   b) En déduire la probabilité $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$.
   c) Montrer que la probabilité que l'ascenseur ne s'arrête qu'une fois est $\frac{1}{81}$.
3. On considère la variable aléatoire Z égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur. D'après 2.c) on a $P(Z = 1) = \frac{1}{81}$.
   Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs prises par Z.
4. Soit Y_1 la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si l'ascenseur s'arrête au premier étage et à 0 sinon. On définit de même les variables aléatoires Y_2 et Y_3 pour les étages 2 et 3.
   a) Justifier que $P(Y_1 = 0) = P(X_1 = 0)$.
   b) En déduire $P(Y_1 = 1)$ puis $E(Y_1)$.
   On admet que Y_2 et Y_3 suivent la même loi que Y_1 et qu'elles ont donc la même espérance.
   c) Exprimer Z en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3. Calculer $E(Z)$ et vérifier que $E(Z) = \frac{211}{81}$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = (n+1)(n+2)t^n(1-t) \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } f_n(t) = 0 \text{ sinon}$$

1. a) Vérifier que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

   b) Calculer $\int_0^1 t^n(1-t)dt$.

   c) En déduire que f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on utilisera les fonctions f_n pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

2. Madame A doit se rendre de Paris à Londres en train. Le haut-parleur de la gare annonce pour son train un retard de moins d'une heure. On admet que la variable aléatoire X égale à la durée (en heures) du retard admet pour densité de probabilité la fonction f_1. C'est-à-dire :

$$f_1(t) = 6t(1-t) \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } f_1(t) = 0 \text{ sinon}$$

   Soit F_1 la fonction de répartition de X.

   a) Déterminer l'expression de $F_1(x)$ lorsque $x < 0$ puis lorsque $x > 1$. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$, $F_1(x) = 3x^2 - 2x^3$.

   b) Quelle est la probabilité que le train ait moins d'une demi-heure de retard ?

   c) Quelle est la probabilité que le train ait un retard compris entre un quart d'heure et une demi-heure ?

   d) Le haut-parleur annonce que l'on sait que le retard sera inférieur à une demi-heure. Quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à un quart d'heure ?

3. a) Vérifier que $tf_1(t) = \frac{1}{2}f_2(t)$ pour tout réel t. En déduire l'espérance de X.

   b) Exprimer $t^2 f_1(t)$ en fonction de $f_3(t)$ pour tout réel t. En déduire $E(X^2)$ puis $V(X)$.

4. Une fois que le train arrive à Paris, il continue à prendre du retard sur le chemin entre Paris et Londres. On nomme Y la variable aléatoire égale au retard en heures pris par le train durant ce trajet. On suppose que Y admet pour densité la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} \text{ si } t \in [0,+\infty[\text{ et } g(t) = 0 \text{ sinon}$$

   a) De quelle loi usuelle reconnaissez-vous une densité ? Calculer $E(Y)$.

   b) Soit Z le retard total que cumule le train en arrivant à Londres. Exprimer Z en fonction de X et de Y. En déduire la durée moyenne en heures du retard de Mme A lors de son arrivée à Londres.