MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Sujet

Exercice 1

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère aussi les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à l'aide de leurs premiers termes $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et les relations :

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = 2b_n \text{, pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} b_n & a_n \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$, pour tout entier naturel n.

2. Justifier que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite remarquable. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de b_n en fonction de n.
Etablir que pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$.

3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$, pour tout entier naturel n.

a. Justifier que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et donner son premier terme.

b. En déduire une expression de c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

c. Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = n2^{n-1}$.

4. En déduire les quatre coefficients de M^n pour tout entier naturel n.

5. Application au calcul d'une somme

a. Justifier que les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

$$a_k = a_{k+1} - a_k - 2^k \text{, pour tout entier naturel } k$$

b. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1}$.

c. Pour tout entier naturel n, calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

d. Déduire des questions précédentes et de 3.c. que $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Application au calcul des puissances d'une autre matrice

On considère les matrice $A=\begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer en utilisant la méthode du pivot de Gauss que P est inversible et calculer P^{-1}.

b. Vérifier que $P^{-1}AP=M$.

c. Etablir que $P^{-1}A^nP=M^n$, pour tout entier naturel n. En déduire les 4 coefficients de A^n.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\ln(x)-2x+3$, pour tout $x\in]0,+\infty[$.

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe C ?

b. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel $x>0$. Dresser le tableau des variations de f. On fera figurer les limites aux bornes. On déterminera aussi l'expression de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on en donnera une valeur approchée. *On donne* $\ln 2\simeq 0{,}7$.

3. Etablir que f est concave sur $]0,+\infty[$.

4.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.

b. Justifier sans calcul que T est située au dessus de C sur $]0,+\infty[$.

5.a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions α et β dans $]0,+\infty[$ avec $\alpha<\beta$.

b. Justifier que $\beta\in]1,2[$.

6. Tracer l'allure de C et de T. *On donne* $\alpha\simeq 0{,}06$ *et* $\beta\simeq 1{,}79$.

Exercice 3

Une entreprise fabrique en série des balles de ping-pong à l'aide de deux machines A et B. La machine A produit un tiers des éléments, les autres étant produits par la machine B.
Certaines balles fabriquées présentent un défaut. C'est le cas pour 12% des balles fabriquées par la machine A et pour 9% de celles fabriquées par la machine B.
A la sortie des machines les balles arrivent dans le désordre sur un tapis roulant. Ce qui fait que si l'on prend une balle au hasard à la sortie du processus de fabrication, la probabilité qu'elle provienne de A est $\frac{1}{3}$ et celle qu'elle provienne de B est $\frac{2}{3}$.

Partie I

1.a. On prélève sur le tapis roulant une balle au hasard. On définit les événements :

- A : la balle provient de la machine A ;
- B : la balle provient de la machine B ;
- D : la balle prélevée présente un défaut.

Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(D)=\frac{1}{10}$.

b. On constate que la balle prélevée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine A ?

2. On se donne un entier naturel n non nul et on suppose maintenant que l'on prélève n balles au hasard à la sortie du tapis roulant. Les prélèvements successifs sont supposés indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de balles défectueuses prélevées.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres. Donner les valeurs prises par X et pour chacune de ces valeurs k la valeur de $P(X=k)$.

b. Déterminer, en fonction de n, les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $n=30$. On admet que dans ce cas, on peut approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Quelle doit être la valeur du paramètre λ ?

b. Préciser les valeurs prises par Y et pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(Y=k)$.

c. On donne dans le tableau suivant les valeurs de $P(Y=k)$ lorsque Y suit une loi de Poisson pour certains paramètres λ.
Déterminer une valeur approchée de la probabilité d'avoir au moins une balle présentant un défaut parmi les 30 balles prélevées.

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216

2. On suppose dans cette question que $n=3600$. On admet qu'on peut alors approcher la variable aléatoire X par une variable aléatoire Z suivant une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

a. Déterminer les paramètres m et σ de la loi Z pour que X et Z aient la même espérance et la même variance. *On donne* $324=18^2$.

b. On admet qu'alors $\frac{Z-m}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Calculer en utilisant la table ci-dessous la probabilité qu'il y ait au moins 396 balles défectueuses parmi les 3600 balles prélevées.

Valeurs de $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ *pour certaines valeurs de x.*

x	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3
$\Phi(x)$	0,9332	0,9452	0,9554	0,9641	0,9713	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1 \\ 2e^{-2t+2} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$.

1.a. Calculer, pour tout réel $A\geq 1$, $I_A=\int_1^A e^{-2t}dt$. En déduire $\lim\limits_{A\to+\infty} I_A$.

b. Etablir que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant f comme densité de probabilité.

2. Montrer que la fonction de répartition de X est la fonction F définie par :

$$F(x)=0 \text{ si } x<1 \text{ et } F(x)=1-e^{-2x+2} \text{ si } x\geq 1$$

3.a. Calculer les probabilités : $P(X\geq 2)$, $P(X\leq 3)$, $P(2\leq X\leq 3)$.

b. Calculer $P_{(X\geq 2)}(X\leq 3)$.

4. Soit A un réel supérieur ou égal à 1. On pose $J_A=\int_1^A te^{-2t}dt$.

a. Calculer J_A en faisant une intégration par parties.

b. Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} J_A$. *On admettra que* $\lim\limits_{A\to+\infty} Ae^{-2A}=0$.

c. En déduire que X admet une espérance et la calculer.

5. On considère la variable aléatoire $Y=X-1$. On note G sa fonction de répartition.

a. Montrer que pour tout réel y, $G(y)=F(y+1)$.

b. En déduire l'expression de $G(y)$ en distinguant les cas $y<0$ et $y\geq 0$.

Justifier que G est la fonction de répartition d'une loi usuelle que l'on précisera.

c. Calculer $V(Y)$.

d. Déduire des questions précédentes que X admet une variance et la calculer.