Corrigé

Par Francis Raccaglia, professeur au lycée Thiers à Marseille.

Partie I. Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

1.a) Par définition : $X^{<2>} = X(X+1)$ et $X^{<1>} = X$, d'où $\boxed{X^{<2>} - X^{<1>} = X^2.}$

De même, $X^{<3>} = X(X+1)(X+2)$, ce qui donne :

$$\boxed{X^{<3>} - 3X^{<2>} + X^{<1>} = X(X+1)(X+2) - 3X(X+1) + X = X^3 + 3X^2 + 2X - 3(X^2+X) + X = X^3}$$

---

b) Par définition : $X^{<4>} = X(X+1)(X+2)(X+3)$.

D'où $X^{<4>} = (X^2+X)(X^2+5X+6) = X^4 + 5X^3 + 6X^2 + X^3 + 5X^2 + 6X = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$. On peut donc écrire, $X^4 = X^{<4>} - 6X^3 - 11X^2 - 6X$. Or X^3 et X^2 s'expriment comme combinaison linéaire de $X^{<3>}$, $X^{<2>}$ et $X^{<1>}$ d'après les égalités de la question 1.a).

Ainsi, $X^4 = X^{<4>} - 6\left(X^{<3>} - 3X^{<2>} + X^{<1>}\right) - 11\left(X^{<2>} - X^{<1>}\right) - 6X^{<1>}$. Après simplification :

$$\boxed{X^4 = X^{<4>} - 6X^{<3>} + 7X^{<2>} - X^{<1>}}$$

---

c) $X^{<n>}$ est un polynôme de degré n. Donc, pour tout n, la famille $(X^{<0>}, X^{<1>}, ..., X^{<n>})$ est une famille de polynômes non nuls de degré distincts de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puisqu'elle est de cardinal $n+1$. En particulier,

$$\boxed{X^n \text{ s'écrit comme combinaison linéaire de polynômes factoriels ascendants.}}$$

2.a) Par définition : $r^{<n+1>} = \prod_{k=1}^{n+1}(r+k-1) = (r+(n+1)-1) \times \prod_{k=1}^{n}(r+k-1)$, donc, $\boxed{r^{<n+1>} = (r+n)r^{<n>}.}$

---

b) On remarque que : $r+s+n = (r+k) + (s-k+n)$, d'où

$$(r+s+n)r^{<k>}s^{<n-k>} = (r+k)r^{<k>}s^{<n-k>} + (s-k+n)s^{<n-k>}r^k.$$

Mais, d'après la question 2.a), $(r+k)r^{<k>} = r^{<k+1>}$ et $(s-k+n)s^{<n-k>} = s^{<n-k+1>}$. D'où finalement :

$$\boxed{(r+s+n)r^{<k>}s^{<n-k>} = r^{<k+1>}s^{<n-k>} + r^k s^{<n-k+1>}.}$$

---

c) Rédigeons la récurrence :

- Initialisation : si $n = 0$, les deux membres de l'égalité à démontrer valent 1, d'où l'égalité est vraie.

- Hérédité : soit n un entier naturel pour lequel la propriété est vérifiée.
  On a de plus : $(r+s)^{<n+1>} = (r+s+n)(r+s)^{<n>}$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$(r+s)^{<n+1>} = (r+s+n)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{<k>}s^{<n-k>}\right)$$

d'où

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(r+s+n)r^{<k>}s^{<n-k>} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(r^{<k+1>}s^{<n-k>} + r^{k}s^{<n-k+1>}\right)$$

c'est à dire :

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{<k+1>}s^{<n-k>} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{k}s^{<n-k+1>}$$

Effectuons un changement d'indice dans la première somme, en prenant $k+1$ comme nouvel indice :

$$(r+s)^{<n+1>} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}r^{<k>}s^{<n-k+1>} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}r^{k}s^{<n-k+1>}$$

d'où

$$\begin{aligned}(r+s)^{<n+1>} &= r^{<n+1>}s^{<0>} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}r^{<k>}s^{<n-k+1>} + r^{<0>}s^{<n+1>} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}r^{k}s^{<n-k+1>}\\ &= r^{<0>}s^{<n+1>} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)r^{<k>}s^{<n-k+1>} + r^{<n+1>}s^{<0>}\end{aligned}$$

D'près la formule du triangle de Pascal, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, d'où :

$$\begin{aligned}(r+s)^{<n+1>} &= r^{<0>}s^{<n+1>} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n+1}{k}+\binom{n}{k}\right)r^{<k>}s^{<n-k+1>} + r^{<n+1>}s^{<0>}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}r^{<k>}s^{<n+1-k>}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La propriété est donc vraie pour } n+1 \text{, ce qui achève la récurrence.}}$

3.a) Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{r^{<n+2>}x^{n+2}}{(n+1)!(1-x)^{r+1}} \times \dfrac{n!(1-x)^{r+1}}{r^{<n+1>}x^{n+1}} = \dfrac{r^{<n+2>}}{r^{<n+1>}} \times \dfrac{x}{n+1}$. En utilisant la relation établie dans la question 2.a), on obtient : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1+r}{n+1}x$. D'où, on peut conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = x.}$

---

b) Montrons qu'il existe un entier N, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$, $0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1+x}{2}$.

La positivité du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est immédiate. De plus, $\dfrac{1+x}{2} - x = \dfrac{1+x-2x}{2} = \dfrac{1-x}{2}$.

On a donc, $x < \dfrac{1+x}{2}$, d'où, à partir d'un certain rang N, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = x$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1+x}{2}$. En raisonnant par récurrence sur n, on établit l'inégalité demandée sans difficulté.

---

c) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{N+n} \leq u_N\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n$. Or, x étant élément de $]0,1[$, $\left|\dfrac{1+x}{2}\right| < 1$, d'où :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_N\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^n = 0$ et grâce au théorème dit « des gendarmes », on en déduit que $\boxed{\lim u_n = 0}$.

---

d) Rappelons l'énoncé de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

> Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$. On a :
> $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

On peut appliquer ce théorème à la fonction $f : t \mapsto (1-t)^{-r}$, sur l'intervalle $[0,1[$, pour $a = 0$ et $b = x$. $\forall t \in [0,1[$, $f(t) = \exp(-r\ln(1-t))$, d'où on voit bien que f est de classe C^{n+1} sur $[0,1[$, pour tout n.

Montrons, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que, $\forall t \in [0,1[$, $f^{(k)}(t) = \dfrac{r^{<k>}}{(1-t)^{r+k}}$.

- Initialisation : $k = 0$. Pas de difficulté.
- Hérédité : soit k un entier naturel pour lequel la propriété est vraie.

  On a donc : $\forall t \in [0,1[$, $f^{(k)}(t) = \dfrac{r^{<k>}}{(1-t)^{r+k}} = r^{<k>}(1-t)^{-r-k}$, d'où, $(f^{(k)})'(t) = r^{<k>}(-r-k)(-1)(1-t)^{-r-k-1}$
  i.e.
  $$f^{(k+1)}(t) = r^{<k>}(r+k)(1-t)^{-r-k-1} = \frac{r^{<k>}(r+k)}{(1-x)^{r+k+1}} = \frac{r^{<k+1>}}{(1-x)^{r+k+1}}$$

ce qui achève la récurrence.

Ainsi : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}(0) = r^{<k>}$. D'où :

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{<k>}}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{r^{<n+1>}}{(1-t)^{r+n+1}}dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{<k>}}{k!}x^k + \frac{r^{<n+1>}}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}dt$$

ce qui, avec les notations de l'énoncé, s'écrit : $\boxed{(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{<k>}}{k!}x^k + R_n.}$

---

e) Pour $t \in [0,x]$, $1-t > 0$ et $x - t \geq 0$, d'où $\dfrac{x-t}{1-t} \geq 0$. Et, $x - \dfrac{x-t}{1-t} = \dfrac{x - xt - x + t}{1-t} = \dfrac{t(1-x)}{1-t}$. Cette différence est positive, d'où l'on bien démontré que : $\boxed{0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x}$.

Soit $t \in [0,x]$, de l'encadrement précédent on déduit l'encadrement suivant : $0 \leq \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \leq x^n$, et on a aussi : $0 \leq \dfrac{1}{(1-t)^{r+1}} \leq \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$. D'où, $0 \leq \left(\dfrac{x-t}{1-t}\right)^n \dfrac{1}{(1-t)^{r+1}} \leq \dfrac{x^n}{(1-x)^{r+1}}$.
Utilisons la propriété de croissance de l'intégrale puisque $0 \leq x$:

$$0 \leq \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}dt \leq x \times \frac{x^n}{(1-x)^{r+1}} \quad \text{d'où} \quad \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}}dt \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{r+1}}$$

et en multipliant par $\dfrac{r^{<n+1>}}{n!}$, on obtient $\boxed{0 \leq R_n \leq u_n}$.

---

f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r^{<k>}}{k!}x^k = (1-x)^{-r} - R_n$. On sait que, $\lim u_n = 0$, d'où $\lim R_n = 0$. On peut donc en conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{r^{<k>}}{k!}x^k$ existe et vaut $(1-x)^{-r}$, autrement dit,

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{r^{<n>}}{n!}x^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{r^{<n>}}{n!}x^n=(1-x)^{-r}}$$

---

4. En utilisant le résultat que l'on vient de démontrer pour $x=1-p$, $(1-p\in]0,1[)$, on peut affirmer que la série de terme général $\frac{r^{<k>}}{k!}(1-p)^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{<k>}}{k!}(1-p)^k=(1-(1-p))^{-r}=p^{-r}$. D'où par linéarité de la convergence et de la somme des séries, on peut conclure :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k=p^rp^{-r}=1}$$

5.a) On peut remarquer que :$\forall k\in\mathbb{N}$, $\prod_{i=1}^{n}(k-i+1)=\begin{cases}(k-n+1)^{<n>} & \text{si } k\geq n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Essayons d'appliquer le théorème de transfert : si la série de terme général $(k-n+1)^{<n>}\frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k$ est absolument convergente alors X_n admet une espérance qui vaut la somme de cette série.

Simplifions le terme général : $\forall k\geq n$,

$$(k-n+1)^{<n>}\frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k=\frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{k!}r^{<k>}p^r(1-p)^k=\frac{r^{<k>}}{(k-n)!}p^r(1-p)^k$$

Mais, pour $k\geq n$, $r^{<k>}=\left(\prod_{i=n+1}^{k}(r+i-1)\right)\times\left(\prod_{i=1}^{n}(r+i-1)\right)=\left(\prod_{i=1}^{k-n}(r+n+i-1)\right)r^{<n>}=(r+n)^{<k-n>}r^{<n>}$.

Cela nous permet d'écrire une nouvelle expression du terme général pour $k\geq n$:

$$r^{<n>}\frac{(r+n)^{<k-n>}}{(k-n)!}p^r(1-p)^k=\underbrace{\left(r^{<n>}p^{-n}(1-p)^n\right)}_{\text{constante}}\left(\frac{(r+n)^{<k-n>}}{(k-n)!}p^{r+n}(1-p)^{k-n}\right).$$

Montrons que la série de terme général $\frac{(r+n)^{<k-n>}}{(k-n)!}p^{r+n}(1-p)^{k-n}$ pour $k\geq n$ converge et que sa somme vaut 1. Il suffit pour cela de procéder à une réindexation, $k-n\to k$ et d'appliquer la question 4 en remplaçant r par $r+n$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(r+n)^{<k>}}{k!}p^{r+n}(1-p)^k=1$$

. $$\boxed{\text{Finalement, } X_n \text{ possède bien une espérance égale à } r^{<n>}p^{-n}(1-p)^n \text{ i.e. } r^{<n>}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n.}$$

---

b) Soit n un entier strictement positif fixé. Le théorème de transfert montre que $E(X^n)$ existe si et seulement si la série de terme général $k^n\frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k$ est absolument convergente. Or $\prod_{i=1}^{n}(k-i+1)\underset{k\to+\infty}{\sim}k^n$, puisque chaque terme du produit est équivalent à k en $+\infty$.

D'après la question précédente, la série de terme général $\left[\prod_{i=1}^{n}(k-i+1)\right]\frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k$ converge, d'où le théorème de convergence par comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général $k^n\frac{r^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k$ est aussi convergente, ce qui prouve $\boxed{\text{l'existence du moment d'ordre } n \text{ de } X}$.

Pour $E(X)$ il suffit de remarquer que $X = X_1$, d'où $E(X) = r\dfrac{1-p}{p}$. On a aussi $X_2 = X(X-1)$ i.e. $X^2 = X_2 + X$ et en appliquant la formule de Köenig-Huyghens et la linéarité de l'espérance, $V(X) = E(X_2) + E(X) - (E(X))^2$ i.e.

$$V(X) = r(r+1)\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + r\frac{1-p}{p} - r^2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = r\left(\frac{1-p}{p}\right)\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)+1\right]$$

d'où $\boxed{V(X) = r\dfrac{1-p}{p^2}}$.

---

6. D'une part, X et Y étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, il en est de même de $X+Y$.

D'autre part, on sait que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P([Z=k]) = \sum_{i=0}^{k} P([X=i]\cap[Y=k-i]) = \sum_{i=0}^{k} P([X=i])P([Y=k-i])$ puisque X et Y sont indépendantes. D'où,

$$P([Z=k]) = \sum_{i=0}^{k} \frac{r^{<i>}}{i!}p^r(1-p)^i\frac{s^{<k-i>}}{(k-i)!}p^s(1-p)^{k-i} = p^{r+s}(1-p)^k\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}r^{<i>}s^{<k-i>}$$

puis en remarquant que $\dfrac{1}{i!(k-i)!} = \dfrac{1}{k!}\binom{k}{i}$, on aboutit à la relation : $P(Z=k) = p^{r+s}(1-p)^k\dfrac{1}{k!}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}r^{<i>}s^{<k-i>}\right)}_{=(r+s)^{<k>}}$.

En résumé, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{P(Z=k) = \frac{(r+s)^{<k>}}{k!}p^r(1-p)^k.\ \text{CQFD}}$$

Partie II. Inégalités stochastiques

On notera $X \preccurlyeq Y$ pour X est stochastiquement inférieure à Y

7. Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) \geq x$ alors $Y(\omega) \leq X(\omega) \leq x$. D'où en terme d'événements, $[X \geq x] \subset [Y \geq x]$. Par croissance de la probabilité pour l'inclusion : $P([X \geq x]) \leq P([Y \geq x])$. On peut donc affirmer que : $\boxed{X \preccurlyeq Y}$.

8.a) Les événements $[X \geq 0]$ et $[Y < 0]$ sont indépendants, d'où, $P([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = P([X \geq 0])P([Y < 0])$.

De plus, $P([X \geq 0]) = 1 - P([X < 0])$. Mais X suivant la loi $\mathcal{N}(-1,1)$, d'où $P([X < 0]) = \Phi\left(\dfrac{0-(-1)}{1}\right) = \Phi(1)$ et, de même, $P([Y < 0]) = \Phi\left(\dfrac{0-1}{1}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$. Finalement $\boxed{P([X \geq 0] \cap [Y > 0]) = (1-\Phi(1))^2.}$

---

b) Comparons $P([X \geq x])$ à $P([Y \geq x])$. On a $P([X \geq x]) = 1 - P([X < x]) = 1 - \Phi(x+1)$ et $P([Y \geq x]) = 1 - P([Y < x]) = 1 - \Phi(x-1)$. Ainsi,

$$P([Y \geq x]) - P([X \geq x]) = (1 - \Phi(x-1)) - (1 - \Phi(x+1)) = \Phi(x+1) - \Phi(x-1)$$

Φ étant croissante sur $\mathbb{R}$, on peut en conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P([X \geq x]) \leq P([Y \geq x])$. On a donc $\boxed{X \preccurlyeq Y\ .}$

c) $\boxed{\text{La réponse est « non»}}$ puisque si c'était le cas on aurait $P([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = 0$, ce qui est faux.

9. Puisque X et Y sont à valeurs des $\mathbb{N}$, pour tout x réel négatif, $P([X \geq x])$ et $P([Y \geq x])$ sont égales à 1, donc égales.

Et pour tout x strictement positif, $P([X \geq x]) = \begin{cases} P([X \geq \lfloor x \rfloor]) & \text{si } x \in \mathbb{N}^* \\ P([X \geq \lfloor x \rfloor + 1]) & \text{sinon} \end{cases}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

D'où l'on peut écrire que : $X \preccurlyeq Y$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P([X \geq k]) \leq P([Y \geq k])$.

Or $P([X \geq k]) = P\left(\overline{[X < k]}\right) = P(\overline{[X \leq k-1]}) = 1 - P([X \leq k-1])$. On peut donc bien affirmer que,

$X \preccurlyeq Y$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1 - P([X \leq k-1]) \leq 1 - P([Y \leq k-1])$, i.e.

$$\boxed{X \preccurlyeq Y \text{ si et seulement si pour tout } k \in \mathbb{N},\ P([X \leq k]) \geq P([Y \leq k])}$$

10.a) Le résultat du cours est le suivant :

> Si U et V sont deux variables aléatoires réelles, sur le même espace probabilisé, indépendantes, suivant respectivement les lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors $U + V$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

On peut donc affirmer que : $\boxed{X + Z \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda}$

b) Montrer que $X \preccurlyeq Y$, cela revient à montrer que $X \preccurlyeq X + Z$ puisque $X + Z$ et Y suivent la même loi. Or Z suivant une loi de Poisson, on peut considérer que, $\forall \omega \in \Omega$, $Z(\omega) \geq 0$. D'où $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) + Z(\omega) \geq X(\omega)$. On sait alors, grâce à la question 7 que $X \preccurlyeq X + Z$ d'où $\boxed{X \preccurlyeq Y\ .}$

11.a) On utilise une boucle for dans laquelle on calcule à la fois les $\frac{t^j}{j!}$ et leur somme. Il ne reste plus qu'à multiplier la somme par e^{-t} pour obtenir le résultat demandé :

```
function suite(k :integer;t : real) :real;

        var j :integer; s,p :real;

                begin
                s :=1;p :=1;
                for j :=1 to k do
                        begin
                        p :=p*t/j; s :=s+p
                        end;
                suite :=s*exp(-t)
                end;
```

b) Fixons k. La fonction $f_k : t \mapsto F(t,k)$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f_k'(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} i\frac{t^{i-1}}{i!}\right)e^{-t} - \left(\sum_{i=0}^{k}\frac{t^i}{i!}\right)e^{-t} = \left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!}\right)e^{-t} - \left(\sum_{i=0}^{k}\frac{t^i}{i!}\right)e^{-t}$, soit finalement, $f_k'(t) = -\left(\frac{t^k}{k!}\right)e^{-t}$.

D'où f_k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $f_k(0) = 1$. Par ailleurs $\lim_{t\to+\infty} f_k(t) = 0$ car f_k est le produit d'une fonction polynômiale et de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ (croissances comparées).

Appliquons le théorème de la bijection : f_k réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}^+$ sur $]0,1]$, donc de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$.

Ainsi, pour tout réel $\beta \in]0,1[$, il existe un unique réel strictement positif, que l'on peut noter $M(\beta,k)$ vérifiant :

$f_k(M(\beta,k)) = \beta$ i.e. tel que $\boxed{F(M(\beta,k),k) = \beta.}$

12.a) Pour justifier cette existence, il s'agit de prouver que $\{k \in \mathbb{N}; G(k) \geq \alpha\}$ est non vide, puisque que c'est un sous ensemble de $\mathbb{N}$. Or on sait que $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 1$, d'où $\lim_{k\to+\infty} G(k) = 1$.

α étant strictement inférieur à 1, il existe donc $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G(k_0) \geq \alpha$. $\boxed{L_\alpha \text{ existe bien pour tout } \alpha \in]0,1[\ .}$

Par définition de L_α, on a : $\boxed{G(L_\alpha - 1) < \alpha \leq G(L_\alpha).}$

---

b) Par définition de l'ensemble $[W < \alpha]$: $\omega \in [W < \alpha]$ si et seulement si $W(\omega) < \alpha$ i.e. $G(X(\omega)) < \alpha$, ce qui équivaut à $X(\omega) \leq L_\alpha - 1$, par définition de L_α, croissance de G et sachant que X est à valeurs entières.

On a donc l'égalité : $[W < \alpha] = [X \leq L_\alpha - 1]$ et $[X \leq L_\alpha - 1]$ est un événement puisque X est une variable aléatoire réelle. De même, $[V \geq \alpha] = [X \geq L_\alpha + 1]$, d'où c'est un événement.

$$\boxed{[W < \alpha] \text{ et } [V \geq \alpha] \text{ sont bien des événements.}}$$

De plus, si $\alpha < 0$, $[W \leq \alpha] = \emptyset$, si $\alpha \geq 1$, $[W \leq \alpha] = \Omega$ et si $\alpha \in [0,1[$, $[W \leq \alpha] = \bigcap_{n\geq 2}[W < \alpha + \frac{1-\alpha}{n}]$, d'où $[W \leq \alpha]$ est un événement pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

On peut raisonner de même pour V en passant d'abord au complémentaire.

Nous pouvons alors affirmer que $\boxed{V \text{ et } W \text{ sont des variables aléatoires réelles.}}$

---

c) D'après ce que l'on vient de rédiger, $\boxed{P([W < \alpha]) = P([X \leq L_\alpha - 1]) = G(L_\alpha - 1)}$ et

$$\boxed{P([V \geq \alpha]) = P([X \geq L_\alpha + 1]) = 1 - P([X \leq L_\alpha]) = 1 - G(L_\alpha)}$$

---

d) D'après les questions précédentes : $P([V \geq \alpha]) = 1 - G(L_\alpha)$ et $G(L_\alpha) \geq \alpha$, d'où $P([V \geq \alpha]) \leq 1 - \alpha$.

Or $P(U \geq \alpha) = 1 - \alpha$ puisque U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, d'où $P([V \geq \alpha]) \leq P([U \geq \alpha])$.

De même, $P([W \geq \alpha]) = 1 - P([W < \alpha]) = 1 - G(L_\alpha - 1)$ et $G(L_\alpha - 1) < \alpha$, d'où $P([W \geq \alpha]) \geq 1 - \alpha$.

- Ainsi pour tout $\alpha \in]0,1[$, $P([V \geq \alpha]) \leq P([U \geq \alpha]) \leq P([W \geq \alpha])$.
- Regardons ce qui se passe lorsque $\alpha \leq 0$ puis lorsque $\alpha \geq 1$. Si $\alpha \leq 0$, $P([V \geq \alpha]) = P([U \geq \alpha]) = P([W \geq \alpha]) = 1$ car U, V, W sont à valeurs positives.
- De même U, V, W sont majorées par 1, d'où pour tout $\alpha \geq 1$, $P([U \geq \alpha]) = 0$ d'où $P([W \geq \alpha]) \geq P([U \geq \alpha])$ et si $\alpha > 1$, $P([V \geq \alpha]) = 0$.
- Pour finir, montrons que, $P([V \geq 1]) = 0$. Si G ne prend pas la valeur 1, c'est trivial. Sinon, soit $L_1 = \min\{k \in \mathbb{N}; G(k) = 1\}$. Alors :

$$P([V \geq 1]) = P([G(X-1) \geq 1]) = P([X \geq L_1 + 1]) = 1 - P([X \leq L_1]) = 1 - G(L_1) = 0$$

En résumé, on a donc établi que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $P([V \geq \alpha]) \leq P([U \geq \alpha]) \leq P([W \geq \alpha])$, i.e. $\boxed{V \preccurlyeq U \preccurlyeq W}$.

13.a) Il est bien connu que la moyenne arithmétique de l'échantillon d'une loi est un estimateur sans biais de l'espérance de cette loi. Donc $\boxed{\dfrac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta}$.

---

b) D'après le cours S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\theta$. Notons G_n la fonction de répartition de S_n.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_n(k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{(n\theta)^j}{j!} \mathrm{e}^{-n\theta} = F(n\theta, k)$. D'où en utilisant les notations de la question avec $X = S_n$, $W = G(S_n) = F(n\theta, S_n)$.

Ainsi, d'après les résultats établis dans la question 12, $P\left(\left[F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right]\right) = P\left(\left[W \leq \frac{\alpha}{2}\right]\right) = G(L_{\alpha/2} - 1)$ et $G(L_{\alpha/2} - 1) \leq \frac{\alpha}{2}$. Donc $\boxed{P\left(\left[F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leq \frac{\alpha}{2}}$.

En raisonnant de même, on voit que :

$$P\left(\left[F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) = P\left(\left[V \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) = 1 - G(L_{1-\alpha/2}) \text{ et } G(L_{1-\alpha/2}) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

d'où $\boxed{P\left(\left[F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leq \frac{\alpha}{2}}$.

---

c) Pour alléger les notations, on écrira J_n pour $J(X_1, ..., X_n)$ et I_n pour $I(X_1, ..., X_n)$.
Montrons que $P(I_n \leq \theta \leq J_n]) \geq 1 - \alpha$ i.e. que $P([I_n > \theta] \cup [J_n < \theta]) \leq \alpha$.
Or, on sait que, $P([I_n > \theta] \cup [J_n < \theta]) \leq P([I_n > \theta]) + P([J_n < \theta])$.
De plus, $P([J_n < \theta]) = P([M(\alpha/2, S_n) < n\theta]) = P[F(M(\alpha/2, S_n), S_n) > F(n\theta, S_n)]$, la dernière égalité découlant de la stricte décroissance de l'application $t \mapsto F(t, k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par définition de $M(\alpha/2, S_n)$, $P[F(M(\alpha/2, S_n), S_n) > F(n\theta, S_n)] = P\left(\left[\frac{\alpha}{2} > F(n\theta, S_n)\right]\right)$, d'où, $\boxed{P([J_n < \theta]) \leq \frac{\alpha}{2}.}$

De même : $P([I_n > \theta]) = P\left(\left[M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1\right) > n\theta\right]\right) = P\left(\left[F\left(M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1\right), S_n - 1\right) < F(n\theta, S_n - 1)\right]\right)$.

Or $F\left(M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1\right)\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, ce qui donne : $P([I_n > \theta]) = P\left(\left[1 - \frac{\alpha}{2} < F(n\theta, S_n - 1)\right]\right)$, d'où $\boxed{P([I_n > \theta]) \leq \frac{\alpha}{2}.}$

Ainsi, on a bien $P([J_n < \theta]) + P([I_n > \theta]) \leq \alpha$, d'où $\boxed{P(I_n \leq \theta \leq J_n]) \geq 1 - \alpha.}$ ce qui prouve que :

I_n et J_n sont les bornes d'un intervalle de confiance d'estimation de θ au niveau de risque inférieur à α.

Partie III. Lois de Poisson mélangées

14. La fonction $\varphi : t \mapsto t^n e^{-t} f(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc il y a un problème de convergence en 0 et en $+\infty$. Cette fonction est à valeurs positives.

En utilisant la loi de Poisson de paramètre $t > 0$, on en déduit que $\dfrac{t^n}{n!}e^{-t} \leq 1$, d'où $t^n e^{-t} \leq n!$.

Ainsi $t^n e^{-t} f(t) \leq n! f(t)$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, d'où d'après le théorème de convergence par comparaison,

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t)dt}$ converge.

15.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right) e^{-t} f(t)dt$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$, d'où :

$$1 - v_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right) e^{-t} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}\right) f(t)dt$$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}$ est égal $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([X = k]) = P([X \leq n])$ si X est une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Poisson de paramètre t. D'où en particulier $0 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \leq 1$, ainsi,

$$0 \leq \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}\right) f(t) \leq f(t)$$

ce qui donne, par intégration sur $[A, +\infty[$, $\displaystyle\int_A^{+\infty} \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}\right) f(t)dt \leq \int_A^{+\infty} f(t)dt$.

La fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $\forall t \in [0, A]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} e^{-A}$ i.e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t} \geq P([X_A \leq n])$.
On obtient alors l'inégalité :

$$\forall t \in [0, A],\ 0 \leq \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}\right) f(t) \leq P([X_A > n]) f(t)$$

d'où par intégration :

$$0 \leq \int_0^A \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} e^{-t}\right) f(t)dt \leq P([X_A > n]) \int_0^A f(t)dt \leq P([X_A > n])$$

La relation de Chasles permet de conclure :

$$\boxed{0 \leq 1 - v_n \leq P([X_A > n]) + \int_A^{+\infty} f(t)dt}$$
