ECRICOME 2019 S

Éléments de correction

Premier exercice

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est l'intégrale de la fonction $t \longmapsto (\cos t)^n$, continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Il vient :

$$\mathrm{I}_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{I}_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}t = 1$$

et, par linéarisation,

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ si bien que $0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$ puis, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$.
Ainsi la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, et par suite convergente.

b. Par intégration par parties, il vient pour $n \in \mathbb{N}$, en dérivant $t \longmapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \longmapsto \cos t$:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} t \cos t \,\mathrm{d}t = \left[\cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \,\mathrm{d}t = (n+1)(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+2}).\end{aligned}$$

Il en ressort que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \mathrm{I}_n. \tag{1}$$

c. Les formules proposées peuvent être justifiées par récurrence à partir de (1). Elles sont correctes pour $n = 0$ d'après **1.** et, si elles sont acquises pour un entier n donné, alors

$$\mathrm{I}_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \mathrm{I}_{2n} = \frac{2n+2}{2n+2} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$\mathrm{I}_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} \mathrm{I}_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \frac{2n+2}{2n+2} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui constitue le résultat au rang $n + 1$.

d. Le script ci-dessous s'appuie sur la relation de récurrence établie en **b.**.

Listing 1 : calcul des premiers termes de la suite (I_n)

```
function y=I(n)
  u=zeros(1,2n+2);
  u(0)=%pi/2;
  u(1)=1;
  for k=1:n
    u(2*k)=(2*k-1)/(2*k)*u(2*k-2);
    u(2*k+1)=(2*k)/(2*k+1)*u(2*k-1);
  end
  y=u;
endfunction
```

Remarque. Le sujet ne semble pas prendre en compte le fait que Scilab n'autorise pas la numérotation des éléments d'un vecteur à partir de 0, et il aurait donc fallu gérer un décalage dans la numérotation...

3. a. On a

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}, \quad x \to 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(1+u) \sim u, \quad u \to 0.$$

b. Puisque $\cos\frac{1}{n^{1/4}} \to 1$, il vient (on peut composer à l'intérieur mais pas à l'extérieur) :

$$n\ln\Big(\cos\frac{1}{n^{1/4}}\Big) \sim n\Big(\cos\frac{1}{n^{1/4}}-1\Big) \sim n\Big(-\frac{1}{2n^{1/2}}\Big) = -\frac{1}{2}\sqrt{n} \to -\infty, \quad n\to\infty.$$

Par suite,

$$\Big(\cos\frac{1}{n^{1/4}}\Big)^n = \exp\Big[n\ln\Big(\cos\frac{1}{n^{1/4}}\Big)\Big] \to 0, \quad n\to\infty.$$

c. On obtient de même :

$$n\ln\Big(\cos\frac{1}{n^{2/3}}\Big) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{1/3}} \to 0, \quad n\to\infty$$

puis

$$\Big(\cos\frac{1}{n^{2/3}}\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

4. On note $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{1/4}} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

a. En utilisant l'encadrement $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, il vient directement :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\varepsilon_n}\cos^n t\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon_n.$$

b. Par décroissance et positivité de cos sur $[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \int_{\varepsilon_n}^{\pi/2}\cos^n t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\varepsilon_n}^{\pi/2}\cos^n\varepsilon_n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\cos^n\varepsilon_n.$$

c. D'après **a.**, **b.** et **3.b.**,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad 0\leqslant \mathrm{I}_n = \int_0^{\varepsilon_n}\cos^n t\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon_n}^{\pi/2}\cos^n t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{\pi}{2}\Big(\cos\frac{1}{n^{1/4}}\Big)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

si bien que (I_n) converge vers 0 par encadrement.

5. a. En posant $\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on montre de même, par décroissance et positivité de cos sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, et positivité de l'intégrale, que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n \geqslant \int_0^{\delta_n}\cos^n t\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\delta_n}\cos^n\delta_n\,\mathrm{d}t = \delta_n\cos^n\delta_n \geqslant 0.$$

Puisque $\delta_n\cos^n\delta_n \sim \delta_n$ d'après **3.c.**, la série $\sum\delta_n\cos^n\delta_n$ est divergente par comparaison à la série de Riemann divertente $\sum\frac{1}{n^{2/3}}$ ($\frac{2}{3}\leqslant 1$), et il en ressort que la série $\sum\mathrm{I}_n$ est également divergente.

b. Le script ci-dessous convient :

Listing 2 : calcul des premiers termes de la suite (I_n)

```
function y=SPI(n)
  u=I(n);
  y=sum(u(0:n));
endfunction
```

où le vecteur `u(0:n)` est le sous-vecteur de u composé des éléments d'indices $0,\dots,n$ (avec les mêmes réserves que dans la remarque suivant la question **2.d.**). Pour éviter des calculs inutiles, il suffit de considérer `u=I(floor(n/2))`.

6. a. Il vient :

$$\forall t\in\left]-\pi,\pi\right[, \quad \frac{2}{1+\tan^2\frac{t}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} = 1+\cos t.$$

b. Par changement de variable $u=\tan\frac{t}{2}$, on obtient d'après **a.** :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} = \int_0^{\pi/2}\Big(1+\tan^2\frac{t}{2}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{2} = \int_0^1\mathrm{d}u = 1.$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient par linéarité de l'intégrale et sommation géométrique finie de raison $-\cos t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{I}_k = \int_0^{\pi/2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-\cos t)^k\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\frac{1-(-\cos t)^{n+1}}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} + (-1)^n\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{n+1} t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, en écrivant que $1+\cos t \geqslant 1$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, il vient :

$$0 \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{n+1} t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2}\cos^{n+1} t\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}_{n+1},$$

d'où le résultat.

e. En s'appuyant sur **4.c.**, on déduit par encadrement de **d.** que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{n+1} t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t = 0,$$

si bien que la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n\mathrm{I}_n$ est convergente d'après **c.**. Ceci justifie la convergence de la série $\sum(-1)^n\mathrm{I}_n$, avec :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} = 1$$

d'après **b.**.

Deuxième exercice

1. On obtient immédiatement $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_3$. Ainsi le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1$ est-il annulateur de S, et les valeurs propres de S en sont donc racines. Les réels 1 et -1 sont donc les seules valeurs propres éventuelles de la matrice S. Réciproquement,

$$\mathrm{rg}(\mathrm{M}-\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = 1 < 3 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(\mathrm{M}+\mathrm{I}_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} = 2 < 3,$$

si bien que 1 et -1 sont valeurs propres de S.
En conclusion, les valeurs propres de la matrice S sont 1 et -1.

2. Pour $\mathrm{X} = {}^t\!\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{SX} = \mathrm{X} \iff \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\ y\\ x\end{pmatrix} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{F}$$
$$\iff x = z \iff \mathrm{X} = x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

Il en ressort que le sous-espace propre de S pour la valeur propre 1 est le sous-espace F et qu'il est engendré par les vecteurs ${}^t\!\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et ${}^t\!\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Comme ces derniers sont linéairement indépendants, ils en forment une base.
De même,

$$\mathrm{SX} = -\mathrm{X} \iff \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}z\\ y\\ x\end{pmatrix} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{G}$$
$$\iff \begin{cases} z = -x\\ y = 0\end{cases} \iff \mathrm{X} = x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre de S pour la valeur propre -1 est donc égal à G et admet pour base la famille formée du vecteur ${}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

3. Les sous-espaces F et G, en tant que sous-espaces propres de S pour des valeurs propres distinctes, sont en somme directe. Sachant par ailleurs que $\dim F + \dim G = 3$ d'après **2.**, on en déduit qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: $F \oplus G = \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

4. a. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique réelle donc diagonalisable.

b. En notant $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = SX = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet pour coefficient générique

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}x_j = x_{n+1-i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

En d'autres termes,

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice $T = S^2 = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ admet pour coefficient générique

$$t_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}s_{k,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

car le terme $s_{i,k}s_{k,j}$ est non nul si, et seulement si, $i = n+1-k = j$. Dans la somme précédente, tous les termes sont donc nuls si $i \neq j$ alors que pour $i = j$, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n+1-i$ qui est égal à 1.
Il en ressort que $S^2 = I_n$.

5. Plutôt que de généraliser la démarche déployée en **2.** et **3.**, il est plus simple d'anticiper légèrement sur la question **b.** (par ailleurs évidente...) : d'après **4.b.**, F (resp. G) est le sous-espace propre de S pour la valeur propre 1 (resp. -1). Sachant que S est diagonalisable d'après **4.a.** et que ses valeurs propres se trouvent parmi les racines du polynôme $X^2 - 1$, annulateur de S d'après **4.c.**, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui s'écrit $F \oplus G = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou plus explicitement :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \exists!(Y, Z) \in F \times G, \quad X = Y + Z.$$

6. a. Les matrices AS et SA de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ont respectivement pour coefficients génériques

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}s_{k,j} = a_{i,n+1-j} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}a_{k,j} = a_{n+1-i,j}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

qui sont égaux par hypothèse. Elles sont donc égales.
Remarque. L'endomorphisme canoniquement associé à A en base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est représenté en base $(e_n, \ldots, e_1)$ par la matrice de coefficient générique

$$a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

c'est-à-dire aussi par la matrice A. D'après la formule de changement de base, cela s'écrit $S^{-1}AS = A$ (car S est la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(e_n, \ldots, e_1)$) ou encore $AS = SA$.

b. D'après **a.**, $ASX = SAX = \lambda SX$ où $SX \neq 0$ d'après **4.b.** puisque $X \neq 0$ (l'un de ses coefficients est non nul). Ainsi SX est vecteur propre de A pour la valeur propre λ.

c. On considère plutôt $Y = \frac{1}{2}(X + SX)$, qui appartient au sous-espace propre de A pour la valeur propre λ, comme combinaison linéaire d'éléments de celui-ci d'après **b.** : $AY = \lambda Y$.
Remarque. L'intérêt du vecteur précédent par rapport à celui de l'énoncé est qu'il s'agit de celui de la question **5.a.** intervenant dans la décomposition de X. En effet, la question **4.c.** permet de vérifier sans difficulté que $SY = Y$ alors que le vecteur $Z = X - Y = \frac{1}{2}(X - SX)$ vérifie quant à lui $SZ = -Z$.

d. On ne peut avoir $Y = Z = 0$ dans la décomposition de $X \neq 0$ de la question **5.a.**. D'après la question **c.** et la remarque qui suit, cela met donc en évidence un vecteur symétrique ou antisymétrique non nul dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

Problème

Première partie

1. Avant le deuxième tirage, l'urne contient trois boules, dont 1 ou 2 blanches. La variable X_1 est donc à valeurs dans $\{1, 2\}$.
Par ailleurs, l'événement $[X_1 = 1]$ (resp. $[X_1 = 2]$) se réalise si, et seulement si, le premier tirage a renvoyé une boule blanche (resp. noire). Par suite, $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.
La variable X_1 suit donc la loi uniforme sur $\{1, 2\}$. Elle admet espérance et variance données par $\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{4}$.

2. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, B_k l'événement « le k-ième tirage amène une boule blanche ».
On a $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$ d'où

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

car, sachant B_1 réalisé, l'événement B_2 est réalisé si, et seulement si, le deuxième tirage renvoie la boule blanche parmi les trois boules qui composent l'urne.
De même,

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\,\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}\big((B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)\big) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Après chacun des k premiers tirages, on a ajouté une boule dans l'urne, blanche ou noire. Avant le $k+1$-ième tirage, le nombre de boules blanches présentes dans l'urne est donc un entier quelconque entre 1 et $k+1$: $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$.

4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1, k+1]\!]$. Sachant l'événement $[X_k = j]$ réalisé, les seules valeurs possibles pour X_{k+1} sont j et $j+1$: la première (resp. seconde) sera prise par X_{k+1} si, et seulement si, le $k+1$-ième tirage amène l'une des j boules blanches (resp. $k+2-j$ boules noires) parmi les $k+2$ boules que compte l'urne. Ainsi,

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = \begin{cases} \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j \\ 1 - \frac{j}{k+2} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable X_k et la question **4.**,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1} = i) &= \sum_{j \in X_k(\Omega)} \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)\,\mathbb{P}(X_k = j) = \sum_{\substack{j \in X_k(\Omega)\\ j \in \{i-1, i\}}} \mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)\,\mathbb{P}(X_k = j) \\ &= \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{k+2}\right)\mathbb{P}(X_k = i-1),\end{aligned}$$

d'où le résultat.
Remarque. Le passage d'une somme à l'autre (y compris la somme en extension de la deuxième ligne) dans le calcul ci-dessus se justifie par l'ajout ou le retrait de termes nuls.

6. On obtient :

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{24}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{11}{24}, \quad \mathbb{P}(X_3 = 3) = \frac{11}{24} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_3 = 4) = \frac{1}{24}.$$

7. a. D'après la formule de la question **5.** appliquée à $i = 1$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = 1)$$

d'où l'on déduit, par récurrence immédiate, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Remarque. On peut également donner une justification probabiliste directe du résultat : avec les notations introduites en **2.**, on a $[X_k = 1] = B_1 \cap \cdots \cap B_k$ d'où, d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \cdots \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4} \cdots \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$$

car, sachant l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}$ réalisé pour $2 \leqslant j \leqslant k$, la réalisation de l'événement B_j correspond au tirage de l'unique boule blanche parmi les $j+1$ que contient l'urne, si bien que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{j-1}}(B_j) = \frac{1}{j+1}$.

b. Vu les rôles symétriques des boules blanches et noires dans l'expérience, la variable $Y_k = k + 2 - X_k$ donnant le nombre de boules noires présentes dans l'urne avant le $k+1$-ième tirage suit la même loi que X_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par suite, d'après **a.**,

$$\mathbb{P}(X_k = k+1) = \mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in [\![1, k+1]\!], \quad \mathbb{P}(X_k = i) = \mathbb{P}(X_k = k+2-i).$$

c. Il vient d'après **5.** et **a.** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = 2) + \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = 1)\right) = 2a_k + k + 1.$$

Par suite,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_{k+1} = a_{k+1} + k + 3 = 2(a_k + k + 2) = 2b_k,$$

si bien que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = 2^k b_0 = 2^{k+1}.$$

Il en ressort que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{b_k - k - 2}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

Deuxième partie

8. Les variables `n` et `b` contiennent respectivement, à tout instant, le nombre de boules noires et blanches présentes dans l'urne. Chaque passage dans la boucle correspond à un tirage. La ligne 5 affecte à la variable `r` la réalisation d'une variable aléatoire R de loi uniforme sur $[\![1, n+b]\!]$. On peut donc considérer que l'événement $[R \leqslant n]$ correspond au tirage d'une boule noire, alors que l'événement $[R > n]$ correspond au tirage d'une boule blanche. L'alternative des lignes 6-10 consiste donc à mettre à jour la composition de l'urne après le i-ième tirage. L'instruction `mystere(k)` renvoie donc une simulation de la loi de X_k.

Est-il attendu qu'on justifie la simulation de la loi uniforme sur $[\![1, n+b]\!]$? Il suffit pour cela de remarquer que si U désigne une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $\lfloor (n+b)U + 1 \rfloor = j$ équivaut à $\frac{j-1}{n+b} \leqslant U < \frac{j}{n+b}$, or les $n+b$ événements $\left[\frac{j-1}{n+b} \leqslant U < \frac{j}{n+b}\right]$, $1 \leqslant j \leqslant n+b$, forment un système complet et ont tous pour probabilité $\frac{1}{n+b}$.

9. À présent que le mystère est levé, on notera `simulX` la fonction de la question **8.**.

Listing 3 : calcul empirique de la loi de X_k

```
function LE=loi_exp(k,N)
  LE=zeros(1,k+1);
  for j=1:N
    s=simulX(k);
    LE(s)=LE(s)+1;
  end
  LE=LE/N;
endfunction
```

10. Il s'agit de calculer récursivement la loi de X_n en utilisant la formule de la question **5.**.

Listing 4 : calcul de la loi de X_n

```
function LT=loi_th(n)
  M=zeros(n,n+1);   // M(k,i) est destiné à contenir P(X_k=i)
  M(1,1)=1/2;
  M(1,2)=1/2;
  for k=1:(n-1)
    M(k+1,1)=1/(k+2)*M(k,1);
    for i=2:(k+1)
      M(k+1,i)=i/(k+2)*M(k,i)+(3+k-i)/(k+2)*M(k,i-1);
    end
    M(k+1,k+2)=1/(k+2)*M(k,k+1);
  end
  LT=M(n,:);    // on renvoie la dernière ligne de M
endfunction
```

11. Les résultats obtenus ne satisfont pas la propriété de symétrie $\mathbb{P}(X_5 = k) = \mathbb{P}(X_5 = 7 - k)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$ justifiée en **7.b.** ; il ne peut donc s'agir que d'une approximation : ils ont été obtenus avec la fonction `loi_exp`.

Troisième partie

12. a. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, la variable X_k est finie donc admet une espérance. La formule de la question **5.** donne :

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+2} i\,\mathbb{P}(X_{k+1} = i) = \sum_{i=1}^{k+2} \frac{i^2}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i) + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{j+1}{k+2}(k+2-j)\,\mathbb{P}(X_k = j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k+1} \left(\frac{k+1}{k+2} j + 1\right) \mathbb{P}(X_k = j) = \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{E}(X_k) + 1.$$

b. On justifie la formule par récurrence. Elle est évidente pour $k = 0$ puisque $X_0 = 1$ et, si elle est acquise à un rang $k \in \mathbb{N}$ donné, alors

$$\mathbb{E}(X_{k+1}) = \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{E}(X_k) + 1 = \frac{k+1}{2} + 1 = \frac{k+3}{2}$$

d'après la question **a.**.

c. On a déjà expliqué en **7.b.** que les variables X_k et Y_k ont même loi ; elles ont donc même espérance. Sachant par ailleurs que $X_k + Y_k = k + 2$, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\big(\mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}(Y_k)\big) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X_k + Y_k) = \frac{k+2}{2}.$$

13. a. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique à la variable finie X_k :

$$\mathbb{P}\big(|X_k - \mathbb{E}(X_k)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_k)}{\varepsilon^2},$$

ce qui donne par passage au complémentaire, d'après **12.** et le résultat admis :

$$\mathbb{P}\left(\left|X_k - \frac{k+2}{2}\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{k+2}{12\varepsilon^2}.$$

En appliquant cette inégalité à $\varepsilon = \alpha(k+2)$, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) \geqslant 1 - \frac{1}{12\alpha^2(k+2)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_k}{k+2} - \frac{1}{2}\right| < \alpha\right) = 1.$$

b. Le résultat précédent signifie (en passant de nouveau au complémentaire si besoin) que la suite $\left(\frac{X_k}{k+2}\right)_k$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à $\frac{1}{2}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, la variable $\frac{X_k}{k+2}$ représente la proportion de boules blanches présentes dans l'urne avant le $k+1$-ième tirage. Or plus il y a de boules blanches, et plus on aura tendance à rajouter une boule noire, et inversement, ce qui peut illustrer intuitivement la convergence précédente : on a tendance à se rapprocher d'une composition équilibrée au fil des tirages.

Quatrième partie

14. a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_{i,j}(\lambda P + Q) &= j\big(\lambda P(X+1) + Q(X+1)\big) - i\big(\lambda P(X) + Q(X)\big)\\ &= \lambda\big(jP(X+1) - iP(X)\big) + \big(jQ(X+1) - iQ(X)\big) = \lambda\varphi_{i,j}(P) + \varphi_{i,j}(Q),\end{aligned}$$

ce qui établit la linéarité de $\varphi_{i,j}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{i,j}(X^k) = j(X+1)^k - iX^k = j\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}X^\ell - iX^k = (j-i)X^k + \sum_{\ell<k} j\binom{k}{\ell}X^\ell$$

est de degré k car $j \neq i$ par hypothèse. Pour $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré d, on a alors

$$\varphi_{i,j}(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k\varphi_{i,j}(X^k) = a_d\varphi_{i,j}(X^d) + \sum_{k<d} a_k\varphi_{i,j}(X^k)$$

où le premier terme est de degré d car $a_d \neq 0$ en tant que coefficient dominant du polynôme P de degré d, alors que les suivants sont de degrés strictement inférieurs à d. Le polynôme $\varphi_{i,j}(P)$ est donc de degré d.

c. D'après la question **b.**, $P \neq 0$ implique $\varphi_{i,j}(P) \neq 0$. En d'autres termes, $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j} = \{0\}$ et l'application linéaire $\varphi_{i,j}$ est donc injective.

d. Le résultat étant évident pour $P = 0$, il suffit de considérer un polynôme P non nul, dont on note n le degré. D'après les questions **b.** et **c.**, l'application linéaire $\varphi_{i,j}$ induit sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie un endomorphisme injectif, qui est automatiquement surjectif. Puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \varphi_{i,j}(Q)$.

15. a. Il suffit de vérifier que $\varphi_{2,1}(-X-2) = X+1 = (X+1)P_{1,1}$. On a alors $P_{2,2} = -P_{2,1}(0) = 2$.

b. Il suffit de vérifier que $\varphi_{3,2}(-2X-4) = 2X = XP_{2,2}$.

16. a. Pour $i = 1$, la somme au membre de droite se réduit au seul terme $P_{1,1}(k) = 1$ et $\mathcal{H}_1$ n'est donc qu'une reformulation de **7.a.**.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a d'après **5.** et $\mathcal{H}_{i-1}$:

$$\begin{aligned}\alpha_{k+1} &= (k+1)!\Big(i\,\mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)\Big) - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\\ &= i(k+1)!\,\mathbb{P}(X_k = i) + (3+k-i)\sum_{j=1}^{i-1} P_{i-1,j}(k)j^k - \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k+1)j^{k+1}\\ &= i\alpha_k + \sum_{j=1}^{i-1}\big((3+k-i)P_{i-1,j}(k) - jP_{i,j}(k+1) + iP_{i,j}(k)\big)j^k = i\alpha_k\end{aligned}$$

car, par définition,

$$\forall j \in [\![1, i-1]\!]\,, \quad jP_{i,j}(k+1) - iP_{i,j}(k) = \varphi_{i,j}(P_{i,j})(k) = (3+k-i)P_{i-1,j}(k).$$

La suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi géométrique de raison i :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (k+1)!\,\mathbb{P}(X_k = i) = i^k\alpha_0 + \sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(k)j^k = \sum_{j=1}^{i} P_{i,j}(k)j^k$$

car $\alpha_0 = -\sum_{j=1}^{i-1} P_{i,j}(0) = P_{i,i}(k)$ par définition, d'où le résultat.

c. Il ne reste qu'à invoquer le principe de récurrence : l'initialisation a été établie en **a.** et l'hérédité en **b.**.

17. a. Il vient d'après **15.a.** et **16.** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{1}{(k+1)!}\big(P_{2,2}(k)2^k + P_{2,1}(k)\big) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

b. D'après **15.b.** et **16.**,

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_k = 3) &= \frac{1}{(k+1)!}\big(P_{3,3}(k)3^k + P_{3,2}(k)2^k + P_{3,1}(k)\big)\\ &= \frac{3^{k+1} - (k+2)2^{k+1} + \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1}{(k+1)!}.\end{aligned}$$