ECRICOME 2017 S

Éléments de correction

Premier exercice

1. a. La fonction f admet pour limite 0 en 0 d'après les théorèmes de croissances comparées. Par continuité de la fonction exponentielle, la fonction g admet alors 1 pour limite en 0.

b. On obtient immédiatement le tableau de variations de f en étudiant le signe de sa dérivée. Celui de g s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	0
g	1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}$	$\nearrow$	1

c. La fonction g admettant une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité au segment $[0,1]$, si bien que son intégrale $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t$ converge pour les mêmes raisons qu'en **1.c.**.

b. D'après les variations de f obtenues en **1.b.**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 |t\ln t|^n\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que (u_n) converge vers 0.

c. Le calcul de $u_0 = 1$ est immédiat, celui de u_1 peut être fait par intégration par parties : sachant les intégrales (et le crochet) convergents,

$$u_1 = \int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}.$$

d. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient de même par intégration par parties :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \int_0^1 t^n(\ln t)^k\,\mathrm{d}t = -\frac{k}{n+1}\int_0^1 t^n(\ln t)^{k-1}\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on déduit, par récurrence sur k, que :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^1 t^n(\ln t)^k\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

e. On peut utiliser l'une des trois inégalités ci-dessous (la première a été obtenue en **b.** et les deux suivantes résultent de la formule établie en **d.**)

$$|u_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n!}, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour justifier la convergence absolue de la série $\sum u_n$ par comparaison à une série exponentielle, de Riemann ou géométrique convergente.

f. On peut proposer un code itératif :

Listing 1 : Calcul de S_n, version itérative

```
function S=somme(n)
  S=0;
  for k=0:n
    S=S+(-1)^k/(k+1)^(k+1);
  end
endfunction
```

ou matriciel :

Listing 2 : Calcul de S_n, version matricielle

```
function S=somme(n)
  k=0:n;
  S=sum((-1).^k./(k+1).^(k+1));
endfunction
```

3. a. Pour $x \in [-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0]$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur le segment $[x, 0]$ avec :

$$\forall t \in [x, 0], \quad \left|\exp^{(n+1)} t\right| = \mathrm{e}^t \leqslant 1 = \mathrm{M}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction exp entre 0 et x, on a donc :

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\exp x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)} 0}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

b. En appliquant l'inégalité de la question **a.** à $x = f(t)$, qui appartient à $[-\frac{1}{e}, 0]$ lorsque $t \in]0, 1]$ d'après **1.b.**, on obtient :

$$|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| = \left|\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{t \ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t \ln t)^k}{k!}\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{t \ln t} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t \ln t)^k}{k!}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}.$$

c. Le membre de droite dans l'inégalité de la question **b.** convergeant vers 0, on en déduit par encadrement que (S_n) converge vers I, i.e. d'après **2.d.** et par décalage d'indice que :

$$\mathrm{I} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

d. D'après la question **b.**, pour que S_n soit une valeur approchée de I à une précision $\varepsilon > 0$ donnée, i.e. pour que $|\mathrm{I} - \mathrm{S}_n| \leqslant \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!} \leqslant \varepsilon$. On peut donc propose le code ci-dessous :

Listing 3 : Valeur approchée de I à une précision donnée

```
function I=estimation(eps)
  n=0;
  e=exp(-1);
  x=e;
  while (x>eps)
    n=n+1;
    x=x*e/(n+1);
  end
  I=somme(n);
endfunction
```

On calcule les premiers termes $x_n = \frac{1}{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}$ jusqu'à avoir $x_n \leqslant \varepsilon$ puis on calcule la valeur de S_n correspondante.

Deuxième exercice

1. a. La matrice J étant symétrique réelle, elle ortho-diagonalisable : il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice D diagonale telles que ${}^t\mathrm{PJP} = \mathrm{D}$ i.e. $\mathrm{J} = \mathrm{PD}{}^t\mathrm{P}$.

b. Les colonnes de J étant égales et non nulles, elles engendrent une droite : la matrice J est donc de rang 1. Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme (de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!) canoniquement associé à J assure alors que $\dim \operatorname{Ker} \mathrm{J} = n - \operatorname{rg} \mathrm{J} = n - 1 > 0$. Ainsi 0 est valeur propre de J et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.

c. Les matrices D et J, semblables puisque P est orthogonale, ont même rang et même trace. Ainsi un seul coefficient diagonal de D n'est pas nul, qui constitue la dernière valeur propre λ de J. Celle-ci est donnée par la trace : $\lambda = \operatorname{tr} \mathrm{D} = \operatorname{tr} \mathrm{J} = n$. Quitte à réordonner les colonnes de P, on peut donc supposer que D est la matrice $\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, n)$.

2. a. On a en effet

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j,$$

d'où le résultat.

b. La matrice

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique

$$m_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

convient.

Remarque. La question **c.** montre que la matrice M attendue doit être symétrique, même si ce n'est pas explicite dans l'énoncé de la question **b.**.

c. On a immédiatement $\mathrm{M} = \frac{1}{2}\mathrm{J} - \frac{1}{2}\mathrm{I}$.

d. D'après **1.a.** et **c.**, sachant P orthogonale, il vient :

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\mathrm{PD}{}^t\mathrm{P} - \frac{1}{2}\mathrm{P}{}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}\Delta{}^t\mathrm{P}$$

où

$$\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{D} - \frac{1}{2}\mathrm{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

e. Trois méthodes sont envisageables, la première étant la plus pertinente ici car elle s'appuie sur les questions précédentes.

- *Méthode 1 :* en utilisant la diagonalisation de M
  D'après **b.** et **d.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = {}^t\mathrm{XP}\Delta{}^t\mathrm{PX} = {}^t({}^t\mathrm{PX})\Delta({}^t\mathrm{PX}) = {}^t\mathrm{Y}\Delta\mathrm{Y} = \frac{n}{2}y_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n y_i^2$$

où $\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{PX} = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$. Or, sachant P orthogonale, on a

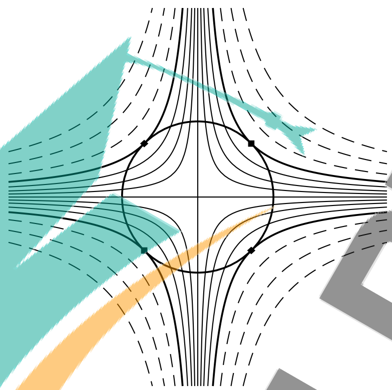
$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = {}^t\mathrm{YY} = {}^t\mathrm{XX} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

si bien que $x \in \mathcal{S}$ équivaut à $y \in \mathcal{S}$. Comme $y_n^2 \leqslant {}^t\mathrm{YY}$ avec égalité lorsque $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$,

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad -\frac{1}{2} \leqslant f(x) = \frac{n}{2}y_n^2 - \frac{1}{2} \leqslant \frac{n-1}{2}$$

avec égalité à gauche (resp. à droite) pour $y_n = 0$ c'est-à-dire lorsque $\mathrm{X} \in \mathcal{S}$ est propre pour M associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$ (resp. pour $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$ c'est-à-dire lorsque $X \in \mathcal{S}$ est propre pour M associé à la valeur propre $\frac{n-1}{2}$). D'où l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur $\mathcal{S}$, respectivement égaux à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

- *Méthode 2 :* en faisant intervenir un problème d'optimisation sous contrainte
  L'ensemble $\mathcal{S}$ est défini comme ligne de niveau 1 de la fonction $\varphi : x \longmapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ continue sur $\mathbb{R}^n$. À ce titre, c'est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Elle est également bornée car incluse dans la boule unité, et non vide. La fonction f, qui y est continue, y admet donc un minimum et un maximum.
  Pour compléter l'analyse précédente, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$ telle que $\nabla\varphi(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{S}$: l'ensemble $\mathcal{S}$ est donc une contrainte non critique.
  Classiquement, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, avec $\nabla f(x) = 2\mathrm{M}X$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Les extremums de f sous la contrainte $\mathcal{S}$ sont donc atteints en des points $x \in \mathcal{S}$ pour lesquels existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) = \lambda\nabla\varphi(x)$, c'est-à-dire $\mathrm{M}X = \lambda X$. Pour un tel vecteur X, unitaire et propre pour M associé à la valeur propre λ, on a $f(x) = \lambda$. L'existence des minimum et maximum de f sous la contrainte $\mathcal{S}$ étant acquise, ils sont respectivement égaux à la plus petite et la plus grande des deux valeurs propres de M : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.
  Remarque. Si cette méthode est inutilement compliquée ici (le calcul de $\nabla f(x)$ n'a pas été détaillé), elle permet de vérifier rapidement sur un dessin les résultats obtenus avec la méthode précédente dans le cas $n = 2$.



  La contrainte (en gras) est tangente aux lignes de f aux niveaux $\pm\frac{1}{2}$(en gras), qui sont les niveaux extremaux correspondant à des lignes de f (en traits pleins) qui intersectent la contrainte.
- *Méthode 3 :* en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz
  En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique aux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$, il vient :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n x_i^2$$
  d'où,
$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2\Big] \leqslant \frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{n-1}{2}$$
  avec égalité à gauche pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \ldots, 0)$ et à droite (en utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1)$. D'où l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur $\mathcal{S}$, respectivement égaux à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

3. a. La matrice A, symétrique réelle, est ortho-diagonalisable : il existe $Q \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$. Les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de D, qui sont aussi les valeurs propres de A, sont strictement positifs par hypothèse. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, on a alors $B^2 = Q\Delta^2Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$.
Par ailleurs, et même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé, cette matrice B est symétrique car Q est orthogonale : ${}^tB = {}^t(Q\Delta{}^tQ) = Q{}^t\Delta{}^tQ = Q\Delta{}^tQ = B$. On note également qu'elle est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

b. Les endomorphismes u et v, représentés en base canonique, orthonormale, par des matrices A et B symétriques, sont symétriques. Ils sont par ailleurs bijectifs car A et B sont inversibles.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc
$$\langle u(x), x\rangle = \big\langle v\big(v(x)\big), x\big\rangle = \langle v(x), v(x)\rangle = \|v(x)\|^2.$$

Par suite, pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $z = u^{-1}(y) = v^{-2}(y)$, on a également

$$\left\langle u^{-1}(y), y\right\rangle = \langle z, u(z)\rangle = \|v(z)\|^2 = \left\|v^{-1}(y)\right\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $v(x)$ et $v^{-1}(y)$ donne alors l'inégalité attendue :

$$\langle x, y\rangle^2 = \left\langle x, v\big(v^{-1}(y)\big)\right\rangle^2 = \left\langle v(x), v^{-1}(y)\right\rangle^2 \leqslant \|v(x)\|^2 \left\|v^{-1}(y)\right\|^2 = \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(y), y\right\rangle.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donné, l'inégalité ci-dessus est une égalité lorsque la famille $\big(v(x), v^{-1}(y)\big)$ est liée. L'endomorphisme v étant bijectif, cela signifie que la famille $\big(u(x), y\big)$ est liée. C'est en particulier le cas pour $y = u(x)$, non nul par injectivité de u.

c. D'après la question **b.** avec $y = x$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad 1 = \|x\|^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle$$

avec égalité lorsque x est vecteur propre de u. Comme u admet des vecteurs propres unitaires, il en ressort que

$$\min_{x \in \mathcal{S}} \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle = 1.$$

4. a. La matrice A, carrée d'ordre 2 de déterminant $1 \neq 0$, est inversible, d'inverse

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels la matrice

$$\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, i.e. pour lesquels $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Il s'agit donc des réels $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, tous deux strictement positifs.

c. D'après la question **b.**, la matrice A satisfait les hypothèses de la question **3.**. En conservant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) &= (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \\ &= ({}^t\mathrm{XAX})({}^t\mathrm{XA}^{-1}\mathrm{X}) = \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle. \end{aligned}$$

D'après la question **3.c.** (plus précisément, d'après la réponse apportée, plus précise que ce qui était demandé : la borne inférieure est atteinte), la fonction g admet donc sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$, équivalente à $\|x\| = 1$, un minimum égal à 1.

Problème

Première partie

1. La fonction g_a est positive sur $\mathbb{R}$, continue sauf peut-être en 0 avec, pour $y < 0 < z$,

$$\int_y^z g_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^z \frac{x}{a^2}\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\right]_0^z = 1 - \mathbf{e}^{-z^2/(2a^2)} \xrightarrow[\substack{y \to -\infty \\ z \to +\infty}]{} 1,$$

d'où l'on déduit la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ce qui achève de prouver que g_a est une densité de probabilité.

2. a. La variable N a pour densité $x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}$, pour moments $\mathbb{E}(\mathrm{N}) = 0$ et $\mathbb{E}(\mathrm{N}^2) = \mathbb{V}(\mathrm{N}) = a^2$.

b. Par parité,

$$a^2 = \mathbb{E}(\mathrm{N}^2) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x$$

d'où la convergence et la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x^2 \mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
La variable Z_a admet donc une espérance égale à $\mathbb{E}(Z_a) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

c. Par changement de variable $y \longmapsto x = a\sqrt{2y}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $]0,+\infty[$ sur lui-même, on justifie la convergence absolue et on calcule la valeur de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a^2}\mathbf{e}^{-x^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}x = 2a^2\int_0^{+\infty} y\mathbf{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 2a^2\Gamma(2) = 2a^2.$$
Ceci établit l'existence de $\mathbb{E}(Z_a^2) = 2a^2$, d'où l'on déduit que Z_a admet pour variance
$$\mathbb{V}(Z_a) = \mathbb{E}(Z_a^2) - \mathbb{E}(Z_a)^2 = \frac{(4-\pi)a^2}{2}.$$

Deuxième partie

1. L'instruction `floor(n*rand())+1` simule la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Listing 4 : Simulation de X_n

```
function X=tirage(n)
  urnes=zeros(1,n);
  X=1;
  choix=floor(n*rand())+1; // choix d'une urne
  while (urnes(choix)<1)
     // on continue si l'urne choisie ne contient aucune boule
    urnes(choix)=urnes(choix)+1;
    choix=floor(n*rand())+1; // choix d'une urne
    X=X+1; // on incrémente le nombre de boules réparties
  end
endfunction
```

2. Pour $n=1$, toutes les boules sont placées dans l'unique urne. La variable X_1 est donc certaine égale à 2. Elle admet pour espérance $\mathbb{E}(X_1) = 2$ et pour variance $\mathbb{V}(X_1) = 0$.

3. Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules, parmi les deux premières, placées dans l'urne 1. Cette variable compte le nombre de succès (choisir l'urne 1) dans une suite de 2 épreuves de Bernoulli (choisir une urne) indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(2,\frac{1}{2})$.
La variable X_2 prend deux valeurs : 2 si les deux premières boules sont placées dans la même urne et 3 sinon. Dans ces conditions,
$$\mathbb{P}(X_2=2) = \mathbb{P}(Y\in\{0,2\}) = \mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2=3) = \mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}.$$
La variable X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{2,3\}$: elle s'écrit $X_2 = 2+Z$ où Z suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Elle admet donc pour espérance $\mathbb{E}(X_2) = 2+\mathbb{E}(Z) = \frac{5}{2}$ et pour variance $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}$.

4. a. Il faut placer au moins deux boules pour qu'une urne soit susceptible de contenir deux boules... Par ailleurs, une fois réparties $n+1$ boules parmi les n urnes, l'une au moins des urnes contient au moins deux boules. Ceci justifie l'inclusion $X_n(\Omega) \subset [\![2,n+1]\!]$. Réciproquement, pour un entier $k\in[\![2,n+1]\!]$, l'événement $[X_n = k]$ est réalisé en plaçant successivement une boule dans chacune des urnes $1,2,\ldots,k-1$ puis en plaçant la k-ième boule dans l'urne $k-1$. On a donc $X_n(\Omega) = [\![2,n+1]\!]$.

b. Soient $N_1,N_2,\ldots,N_{n+1}$ les variables aléatoires donnant respectivement les numéros des urnes dans lesquelles sont successivement placées les $n+1$ premières boules.
Pour $k\in[\![2,n+1]\!]$, le vecteur $V_k = (N_1,N_2,\ldots,N_k)$ prend ses valeurs uniformément dans l'ensemble $[\![1,n]\!]^k$: par indépendance des variables $N_1,\ldots,N_k$, la loi conjointe du vecteur V_k est le produit des lois marginales des N_i, toutes uniformes sur $[\![1,n]\!]$. En d'autres termes,
$$\forall v = (n_1,\ldots,n_k)\in[\![1,n]\!]^k, \quad \mathbb{P}(V_k = v) = \frac{1}{n^k}.$$

L'événement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k-1$ premières boules sont dans des urnes distinctes et la k-ième dans l'une de ces $k-1$ premières urnes. Ainsi $[X_n = k] = [V_k \in \mathcal{V}_k^n]$ où $\mathcal{V}_k^n$ est l'ensemble des k-uplets $v = (n_1, \dots, n_k) \in [\![1, n]\!]^k$ tels que $n_1, \dots, n_{k-1}$ sont deux-à-deux distincts et $n_k \in \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$. Cet ensemble est de cardinal $n(n-1)\cdots(n-k+2)(k-1) = \frac{n!}{(n-k+1)!}(k-1)$. Par suite,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(V_k \in \mathcal{V}_k^n) = \sum_{v \in \mathcal{V}_k^n} \mathbb{P}(V = v) = \frac{1}{n^k}\#\mathcal{V}_k^n = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

c. La variable X_n étant finie, elle admet pour espérance

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} k\,\mathbb{P}(X_n = k) = n! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

d. Le code ci-dessous permet un calcul itératif de la somme ci-dessus.

Listing 5 : Calcul de $\mathbb{E}(X_n)$

```
function E=esparance(n)
  facto=prod(1:n);
  fac=facto;
  somme=0;
  puissance=n;
  for k=2:(n+1)
    puissance=puissance*n;
    fac=fac/(n-k+2);
    somme=somme+k*(k-1)/(puissance*fac);
  end
  E=facto*somme;
endfunction
```

Troisième partie

1. L'inégalité de droite peut être justifiée classiquement par un argument de convexité et celle de gauche par l'étude de la fonction $x \longmapsto \ln(1-x) + x + x^2$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.
On peut ici justifier les deux en observant que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad -\ln(1-x) - x = \left[-\ln(1-t) - t\right]_0^x = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right) dt = \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt$$

d'où :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad 0 \leqslant -\ln(1-x) - x \leqslant 2\int_0^x t\,dt = x^2,$$

ce qui conduit immédiatement au résultat.

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$. Pour $k \in [\![0, m]\!]$, on a $0 \leqslant \frac{k}{n} \leqslant \frac{k}{2m} \leqslant \frac{1}{2}$ d'où, d'après **1.**,

$$\forall k \in [\![0, m]\!], \quad -\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} \leqslant \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant -\frac{k}{n}$$

puis :

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^m k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^m k^2 \leqslant \sum_{k=0}^m \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^m k$$

c'est-à-dire

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n, m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. Sachant que $X > 0$, on a

$$\forall x \leqslant 0, \quad \sqrt{n}\,\mathbb{P}\left(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\right) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

4. a. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{n}x - 1 \leqslant \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leqslant \sqrt{n}x$$

d'où l'on déduit que $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$. Plus précisément, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{nx}} \leqslant \frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\sqrt{nx}} \leqslant 1$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor}{\sqrt{nx}} = 1$$

c'est-à-dire $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor \sim \sqrt{nx}$ lorsque $n \to \infty$.

b. Puisque $\lfloor\sqrt{nx}\rfloor \sim \sqrt{nx} = o(n)$ lorsque $n \to \infty$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad \lfloor\sqrt{nx}\rfloor \leqslant \frac{n}{2}.$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![2, n+1]\!]$, le produit ci-dessous comporte $(k-2)+1 = k-1$ facteurs si bien que :

$$\frac{k-1}{n}\prod_{i=0}^{k-2}\Big(1-\frac{i}{n}\Big) = \frac{k-1}{n^k}\prod_{i=0}^{k-2}(n-i) = \frac{k-1}{n^k}\,\frac{n!}{(n-k+1)!} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k)$$

d'après **II.4.b.**.

d. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$ tel que $\sqrt{nx} \geqslant 2$ (on peut supposer que cette condition supplémentaire est réalisée, quitte à augmenter N), on a d'après **b.** et **c.** :

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{X}_n = \lfloor\sqrt{nx}\rfloor\big) = \frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor - 1}{n}\exp\Big(\sum_{i=0}^{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor-2}\ln\Big(1-\frac{i}{n}\Big)\Big) = \frac{\lfloor\sqrt{nx}\rfloor - 1}{n}\exp\big(\alpha(n, \lfloor\sqrt{nx}\rfloor - 2)\big).$$

e. La question **b.** permet d'appliquer la question **2.** pour obtenir un encadrement de $\alpha(n,m)$ avec $m = \lfloor\sqrt{nx}\rfloor - 2$. En utilisant l'équivalent $m \sim \sqrt{nx}$ lorsque $n \to \infty$, on montre facilement que les deux membres extrémaux de cet encadrement convergent vers $-\frac{x^2}{2}$. Par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha(n, \lfloor\sqrt{nx}\rfloor - 2) = -\frac{x^2}{2}$$

d'où, par continuité de la fonction exponentielle et d'après la question **a.**,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\big(\mathrm{X}_n = \lfloor\sqrt{nx}\rfloor\big) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Quatrième partie

1. a. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor\sqrt{n}x\rfloor = k \iff k \leqslant \sqrt{n}x < k+1 \iff x \in \Big[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}}\Big[.$$

b. D'après la question **a.** et sachant que X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$, la fonction f_n est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, \frac{2}{\sqrt{n}}[$ (où elle est nulle), $[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{3}{\sqrt{n}}[, \ldots, [\frac{n+1}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$ et $[\frac{n+2}{\sqrt{n}}, +\infty[$ (sur lequel elle est nulle). Elle est donc positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être aux points $\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{3}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{n+2}{\sqrt{n}}$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n+1}\int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}}\sqrt{n}\,\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n+1}\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = k) = 1.$$

Toutes les conditions sont réunies pour que f_n soit une densité de probabilité.

2. a. Sur l'encadrement

$$\lfloor\sqrt{n}x\rfloor - k \leqslant \sqrt{n}x - k < \lfloor\sqrt{n}x\rfloor - k + 1,$$

on observe que :

- si $k = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$, alors $0 \leqslant \sqrt{n}x - k < 1$;
- si $k > \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ i.e. $k \geqslant \lfloor\sqrt{n}x\rfloor + 1$, alors $\sqrt{n}x - k < 0$;
- si $k < \lfloor\sqrt{n}x\rfloor$ i.e. $k \leqslant \lfloor\sqrt{n}x\rfloor - 1$, alors $\sqrt{n}x - k \geqslant 1$.

Puisque U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{U} \leqslant \sqrt{n}x - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \\ \sqrt{n}x - \lfloor\sqrt{n}x\rfloor & \text{si } k = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \\ 0 & \text{si } k > \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \end{cases}.$$

b. La variable Y_n est à valeurs dans $[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable X_n garantit que :

$$\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k)\, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(Y_n \leqslant x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k)\, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(U \leqslant \sqrt{n}x - k)$$

que l'on peut simplifier vu **a.** compte-tenu de l'indépendance de U et X_k pour tout k. Lorsque $x \in [\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$ c'est-à-dire $2 \leqslant \lfloor\sqrt{n}x\rfloor \leqslant n+1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n \leqslant x) &= \sum_{\substack{2\leqslant k\leqslant n+1\\ k<\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}\big(X_n = \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\big)\big(\sqrt{n}x - \lfloor\sqrt{n}x\rfloor\big)\\ &= \sum_{\substack{2\leqslant k\leqslant n+1\\ k\leqslant\lfloor\sqrt{n}x\rfloor-1}} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor/\sqrt{n}}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{2/\sqrt{n}}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $x \in [\frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor}{\sqrt{n}}, \frac{\lfloor\sqrt{n}x\rfloor+1}{\sqrt{n}}]$. La vérification de la formule étant immédiate lorsque $x \notin [\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. D'après la question **1.b.**, le cours assure que $x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est la fonction de répartition de toute variable de densité f_n. La variable Y_n a donc même loi qu'une variable de densité f_n d'après **b.** : elle admet pour densité f_n.

d. D'après **III.3.** et **III.4.e.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases} = g_1(x).$$

D'après **c.** et le résultat admis au début de la partie, cela assure la convergence en loi de la suite (Y_n) vers la variable Z_1 de la deuxième partie, à densité g_1.

3. a. Soient (A_n) et (B_n) deux suites de variables aléatoires, A une variable aléatoire et b une constante. Si (A_n) converge en loi vers A et (B_n) converge en probabilité vers b, alors $(A_n + B_n)$ converge en loi vers $A + b$.

b. Pour $\varepsilon > 0$ donné,

$$\forall n \geqslant \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{U}{\sqrt{n}}\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = \mathbb{P}(U \geqslant \sqrt{n}\varepsilon) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi la suite $\big(\frac{U}{\sqrt{n}}\big)$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle. D'après la question **2.d.** et le lemme de Slutsky, la suite de terme général

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} = Y_n - \frac{U}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1,$$

converge alors en loi vers la variable Z_1, de densité g_1.