ECRICOME 2015 S

Éléments de correction

Premier exercice

On supposera que $n \geqslant 1$ (sans quoi l'endomorphisme φ est nul).

1. a. Tout d'abord, φ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par linéarité de la dérivation. Puis, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P'' \leqslant \deg P - 2 \leqslant \deg P$ et $\deg 2XP' = 1 + \deg P' \leqslant \deg P$ donc $\deg \varphi(P) \leqslant \deg P$ et $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi φ et un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On calcule $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = -2X$ et

$$\forall j \in [\![2, n]\!], \quad \varphi(X^j) = j(j-1)X^{j-2} - 2jX^j$$

d'où la matrice représentative de φ en base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -4 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -6 & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique (en numérotant les lignes et colonnes de 0 à n)

$$a_{i,j} = \begin{cases} -2j & \text{si } i = j \\ j(j-1) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

c. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $0, -2, -4, \ldots, -2n$. L'endomorphisme φ admet donc, comme sa matrice A, $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres deux-à-deux distinctes ; c'est donc un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a. Soient P et Q deux éléments non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, de degrés p et q et de coefficients dominants a_p et b_q. La fonction $f : t \longmapsto P(t)Q(t)\mathbf{e}^{-t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ avec :

$$t^2 P(t)Q(t)\mathbf{e}^{-t^2} \sim a_p b_q t^{p+q+2}\mathbf{e}^{-t^2} \longrightarrow 0, \quad t \to \pm\infty$$

par croissances comparées. Ainsi $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ lorsque $t \to \pm\infty$, d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison aux intégrales de Riemann convergentes $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

b. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale généralisée convergente et symétrique. De plus, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2 \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

où la fonction $t \longmapsto P(t)^2\mathbf{e}^{-t^2}$ est continue et positive. On a donc égalité ci-dessus si, et seulement si, $P(t)^2\mathbf{e}^{-t^2} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui fait une infinité de racines pour P et équivaut donc à la nullité de ce polynôme.

Toutes les conditions sont donc réunies pour faire de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donnés, une intégration par parties sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ donne :

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(P)(t)Q(t)\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_a^b \big(\mathbf{e}^{-t^2}P''(t) - 2t\mathbf{e}^{-t^2}P'(t)\big)Q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\big(\mathbf{e}^{-t^2}P'(t)\big)Q(t)\Big]_a^b - \int_a^b \big(\mathbf{e}^{-t^2}P'(t)\big)Q'(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$, le crochet tend vers 0 comme en **2.a.** et l'on récupère $\langle\varphi(P), Q\rangle = -\langle P', Q'\rangle$, qui admet donc une expression symétrique en P et Q, ce qui prouve que l'endomorphisme φ est symétrique.

4. a. Certes, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est obtenue par application du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui donne immédiatement le résultat, mais on attend sans doute une justification plus poussée...
On commence par justifier par une récurrence immédiate que P_k est de degré k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
On peut alors montrer par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(P_0, P_1, \dots, P_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$. Le résultat est clair pour $k = 0$ et, s'il est acquis à un rang $k < n$, alors

$$X^{k+1} - P_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\|P_i\|^2} P_i = \sum_{i=0}^{k} \left\langle \frac{P_i}{\|P_i\|}, X^{k+1} \right\rangle \frac{P_i}{\|P_i\|}$$

est le projeté orthogonal de X^{k+1} sur $\mathbb{R}_k[X]$ car les polynômes $\frac{1}{\|P_i\|}P_i$, $0 \leqslant i \leqslant k$, forment une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ par hypothèse de récurrence. Dans ces conditions, $X^{k+1} - p_{\mathbb{R}_k[X]}(X^{k+1}) = P_{k+1}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_k[X]$ donc à $P_0, \dots, P_k$. Ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_k, P_{k+1})$ est une famille orthogonale formée de $k + 2 = \dim \mathbb{R}_{k+1}[X]$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_{k+1}[X]$, c'en est donc une base orthogonale.
Remarque. Si l'on préfère, il est aussi possible de montrer, par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$, que pour tous $j < k \in [\![0, n]\!]$, P_j et P_k sont orthogonaux : le résultat est évident pour $k = 0$ et, s'il est acquis à un rang $k < n$, alors pour $j < k + 1$:

$$\langle P_j, P_{k+1}\rangle = \langle P_j, X^{k+1}\rangle - \sum_{i=0}^{k} \frac{\langle P_i, X^{k+1}\rangle}{\|P_i\|^2} \langle P_j, P_i\rangle = \langle P_j, X^{k+1}\rangle - \frac{\langle P_j, X^{k+1}\rangle}{\|P_j\|^2} \langle P_j, P_j\rangle = 0$$

car, dans la somme, tous les termes d'indice $i \neq j$ sont nuls par hypothèse de récurrence.

b. Le cas de P_0 est immédiat : $\varphi(P_0) = 0$ et $P_0 \neq 0$ est donc propre pour la valeur propre $\lambda_0 = 0$.
Pour $k \geqslant 1$, le polynôme P_k appartient à $\mathbb{R}_k[X]$ mais aussi à $\mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$ d'après **a.**, deux sous-espaces stables par φ : le premier d'après l'argument développé en **1.a.**, le second car $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ est stable par l'endomorphisme symétrique φ. Dans ces conditions, le polynôme $\varphi(P_k)$ appartient aussi à $\mathbb{R}_k[X]$ en étant orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$; il est donc colinéaire à P_k, ce qui signifie que $P_k \neq 0$ est vecteur propre de φ. En comparant les monômes dominants de P_k et $\varphi(P_k)$, on justifie facilement que P_k est associé à la valeur propre $\lambda_k = -2k$ (ce qu'on peut justifier géométriquement aussi).

Deuxième exercice

1. a. On observe que 1 est racine évidente de P, ce qui conduit à $P = (X-1)(2X^2-X-1) = (X-1)^2(2X+1)$.

b. La fonction u est dérivable sur I par opérations sur les fonctions dérivables, avec :

$$\forall x \in I, \quad u'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) - 1 = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{3\cos^2 x} = \frac{P(\cos x)}{3\cos^2 x}.$$

c. D'après **a.** et **b.**, $u'(x)$ est du signe de $2\cos x + 1 \geqslant 1 > 0$ pour $x \in I$. La fonction u est donc strictement croissante sur I.

d. La fonction v est dérivable sur I avec :

$$\forall x \in I, \quad v'(x) = 1 - \frac{3\cos x(2+\cos x) + 3(1-\cos^2 x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{Q(\cos x)}{(2+\cos x)^2}$$

pour $Q = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.

e. Il apparaît sur l'expression obtenue en **d.** que $v'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ et la fonction v est donc strictement croissante sur I.

f. Les fonctions u et v étant strictement croissantes sur I, elles prennent des valeurs strictement supérieures à leurs limites à droite en 0, toutes deux nulles. Ainsi $u(x) = f(x) - x > 0$ et $v(x) = x - g(x) > 0$ i.e. $g(x) < x < f(x)$ pour tout $x \in I$.

2. a. On obtient :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

puis
$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
et
$$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

b. L'encadrement de la question **1.f.** pour $x = \frac{\pi}{12}$ donne :
$$\frac{9\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} < \pi < 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{3}$$
i.e., après quelques simplifications (on n'attend sans doute pas forcément une telle précision pour le minorant...),
$$\frac{-504 - 792\sqrt{2} - 36\sqrt{3} + 936\sqrt{6}}{193} < \pi < 8 - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}.$$

3. a. On linéarise :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}{4} = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$
pour obtenir la relation demandée.
En notant, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $\theta_n = \frac{\pi}{3\cdot 2^n}$, on a donc :
$$b_{n+1}^2 = \cos^2\theta_{n+1} = \frac{1+\cos(2\theta_{n+1})}{2} = \frac{1+\cos\theta_n}{2} = \frac{1+b_n}{2}$$
d'où, puisque $b_{n+1} = \cos\theta_{n+1} \geqslant 0$ sachant que $\theta_{n+1} \in [0, \frac{\pi}{3}]$,
$$b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}.$$
De même,
$$a_{n+1}^2 = \sin^2\theta_{n+1} = 1 - \cos^2\theta_{n+1} = 1 - \frac{1+\cos\theta_n}{2} = \frac{1-b_n}{2}$$
avec $a_{n+1} \geqslant 0$ d'où
$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}.$$

b. En appliquant l'encadrement de la question **1.f.** à $x = \theta_n \in \mathrm{I}$, on obtient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3\cdot 2^n g(\theta_n) < \pi < 3\cdot 2^n f(\theta_n)$$
i.e.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 9\cdot 2^n\frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

c. Lorsque $x \to 0$,
$$f(x) = \frac{2\big(x+o(x)\big) + \big(x+o(x)\big)}{3} = x + o(x) \sim x \quad \text{et} \quad g(x) \sim x$$
d'où, puisque $\theta_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$:
$$3\cdot 2^n f(\theta_n) \sim 3\cdot 2^n\theta_n = \pi \to \pi \quad \text{et} \quad 3\cdot 2^n g(\theta_n) \sim 3\cdot 2^n\theta_n \to \pi,$$
d'où le résultat.

d. La fonction donnée ci-dessous calcule les termes des suites (a_k) et (b_k) jusqu'à ce que le segment
$$[\alpha_k, \beta_k] = \left[9\cdot 2^k\frac{a_k}{2+b_k}, 2^k\left(2a_k + \frac{a_k}{b_k}\right)\right]$$
soit de longueur inférieure à $2e$. Le réel π, qui appartient à l'intervalle $]\alpha_k, \beta_k[$, est alors à distance inférieure à e du milieu $m = \frac{\alpha_k+\beta_k}{2}$ de l'intervalle ; le milieu m constitue donc une valeur approchée de π à la précision e.

Listing 1 : code de la fonction h

```
function [x,k]=h(e)
  k=0;
  a=sqrt(3)/2;  // on initialise a à a0
  b=1/2;   // on initialise b à b0
  while (2^k*(2*a+a/b) - 9*2^k*a/(2+b) > 2*e)
    a=sqrt((1-b)/2);
    b=sqrt((1+b)/2);
    k=k+1;
  end
  x=(9*2^k*a/(2+b) + 2^k*(2*a+a/b))/2;
endfunction
```

e. Bien entendu, il est possible d'utiliser directement la fonction h (c'est sans doute ce qui est attendu) :

Listing 2 : nombre d'itérations, version naïve

```
function Y=nb_iterations_naif(p)
  Y=zeros(1,p);
  for j=1:p
    [x,k]=h(10^(-j));
    Y(j)=k;
  end
endfunction
```

mais en procédant ainsi, on refait plusieurs fois les mêmes calculs, ce qui n'est pas très efficace ! Ci-dessous une version plus pertinente.

Listing 3 : nombre d'itérations

```
function Y=nb_iterations(p)
  Y=zeros(1,p);
  k=0;
  a=sqrt(3)/2;  // on initialise a à a0
  b=1/2;   // on initialise b à b0
  for j=1:p
    while (2^k*(2*a+a/b) - 9*2^k*a/(2+b) > 2*10^(-j))
      a=sqrt((1-b)/2);
      b=sqrt((1+b)/2);
      k=k+1;
    end
    Y(j)=k;
  end
endfunction
```

f. Les premières valeurs laissent penser que la précision apportée par chaque passage dans la boucle est d'environ une décimale. Le changement de comportement observé à partir de $k = 16$ s'explique par le fait que Scilab travaille avec 16 chiffres significatifs : à partir du moment où $\beta_k - \alpha_k \leqslant 10^{-16}$ (alors que α_k et β_k sont de l'ordre de 1), Scilab considère que $\beta_k - \alpha_k$ est nul et la condition de sortie de boucle est donc satisfaite quelque soit la précision $e \leqslant 10^{-16}$.

Problème

En guise d'introduction, on peut remarquer que pour $p \leqslant q$, on a $0 \leqslant Y_q \leqslant Y_p$ d'où, par domination :

- si Y_p admet une espérance, alors Y_q aussi ;
- si Y_q n'admet pas d'espérance, alors Y_p non plus.

Il en ressort que X est implosive d'indice $m \geqslant 2$ donné si, et seulement si, Y_m admet une espérance alors que Y_{m-1} n'en admet pas, en convenant que $Y_1 = X$.

Première partie

1. Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$, les variables $X_1, \dots, X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}\big(\min(X_1, \dots, X_n) \leqslant x\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\Big)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\Big) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > x) = 1 - \big(1 - F(x)\big)^n.$$

2. Puisque la variable X est à densité, sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ avec pour dérivée f sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini Δ de points. Dans ces conditions, la fonction de répartition obtenue pour Y_n à la question **1.** est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ avec pour dérivée $x \longmapsto nf(x)\big(1 - F(x)\big)^{n-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \Delta$. La variable Y_n est donc à densité et admet (par exemple) pour densité

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto nf(x)\big(1 - F(x)\big)^{n-1}.$$

3. Sachant que V est positive, sa densité est nulle sur $\mathbb{R}_-$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

et, sous réserve d'existence,

$$\mathbb{E}(V) = \int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}_+$ par hypothèse, la fonction Φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier, de dérivée $\Phi' = \varphi$.

a. Pour $x \geqslant 0$, une intégration par parties sur le segment $[0, x]$ donne, en primitivant φ en $\Phi - 1$:

$$\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\big(\Phi(t) - 1\big)\Big]_0^x - \int_0^x \big(\Phi(t) - 1\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t - x\big(1 - \Phi(x)\big).$$

b. On a tout d'abord :

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x\big(1 - \Phi(x)\big) = x\,\mathbb{P}(V > x) = x\int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

où le membre de droite tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$ comme queue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, convergente puisque V admet une espérance.

Il en ressort par encadrement que $x\big(1 - \Phi(x)\big)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$, et donc d'après **a.** que

$$\int_0^x \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t + x\big(1 - \Phi(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(V).$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et égale à $\mathbb{E}(V)$.

c. Puisque $1 - \Phi$ est positive et d'intégrale convergente, il vient d'après **a.** :

$$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \big(1 - \Phi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi les intégrales partielles de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ sont majorées et, comme la fonction $t \longmapsto t\varphi(t)$ est positive, cela entraîne la convergence (absolue) de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui signifie que V admet une espérance.

d. L'équivalence résulte de **b.** (avec la valeur de l'intégrale précisée ci-dessus) et **c.**

Deuxième partie

4. a. Puisque f est une densité,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \alpha\frac{\pi}{2},$$

d'où l'on déduit la valeur de $\alpha = \frac{2}{\pi}$.

b. Le calcul donne immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\arctan x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

c. D'après **1.**,

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{F}_2(x) = 1 - \big(1-\mathrm{F}(x)\big)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan x\right)^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Comme X est à densité, on a vu en **2.** que Y_2 est à densité donnée par

$$f_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto 2f(x)\big(1-\mathrm{F}(x)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan x\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

d. Plusieurs méthodes sont possibles, parmi lesquelles :

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition,

$$y = \arctan\frac{1}{x} \iff \begin{cases} y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Or $\arctan x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque $x > 0$, si bien que $\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et par ailleurs

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{1}{\tan(\arctan x)} = \frac{1}{x},$$

d'où le résultat :

$$\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

- Une autre possibilité consiste à travailler sur la fonction $\varphi : x \longmapsto \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$$\forall x > 0,\quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale à sa limite en $+\infty$: $\frac{\pi}{2}$, d'où le résultat.

e. Lorsque $x \to +\infty$,

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{1+x^2}\arctan\frac{1}{x} \sim \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{x^3}.$$

f. On vient de voir que $xf_2(x) \sim \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{x^2} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui assure la convergence (absolue) de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_2(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison aux intégrales de Riemann. Par ailleurs, $xf(x) \sim \frac{2}{\pi}\frac{1}{x} \geqslant 0$ lorsque $x \to +\infty$, d'où l'on déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Ainsi Y_2 admet une espérance alors que X n'en admet pas : la variable X est donc implosive d'indice 2.

5. a. La série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$, $k \geqslant 0$, est télescopique convergente :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) = 1.$$

b. En majorant $k+1$ par $k+2$ au dénominateur, il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad k\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=k) = k\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}} = \frac{k}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})}$$
$$\geqslant \frac{k}{2(k+2)^{3/2}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 0,\quad k \to \infty,$$

de sorte que la série $\sum_k k\,\mathbb{P}(\mathrm{X}=k)$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}$. La variable X n'admet donc pas d'espérance.

c. Par télescopage,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{j+1}} - \frac{1}{\sqrt{j+2}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

d. D'après **1.**,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_2 \leqslant k) = 1 - \big(1 - F(k)\big)^2 = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Dès lors,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_2 = k) = \mathbb{P}(Y_2 \leqslant k) - \mathbb{P}(Y_2 \leqslant k-1) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

puis

$$k\,\mathbb{P}(Y_2 = k) = \frac{k}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k} \geqslant 0, \quad k \to \infty$$

est le terme général d'une série divergente et Y_2 n'admet donc pas d'espérance.

e. Sur le même principe,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_3 \leqslant k) = 1 - \big(1 - F(k)\big)^3 = 1 - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$$

puis

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}}$$

et cette fois-ci

$$\begin{aligned} k\,\mathbb{P}(Y_3 = k) &= k\frac{(k+2)^{3/2} - (k+1)^{3/2}}{(k+1)^{3/2}(k+2)^{3/2}} \sim k\frac{k^{3/2}}{k^3}\left[\left(1 + \frac{2}{k}\right)^{3/2} - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{3/2}\right] \\ &= \frac{1}{k^{1/2}}\left[\frac{3}{2}\frac{2}{k} - \frac{3}{2}\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right] \sim \frac{3}{2k^{3/2}} \geqslant 0 \end{aligned}$$

est le terme général d'une série absolument convergente par comparaison aux séries de Riemann car $\frac{3}{2} > 1$. La variable Y_3 admet donc une espérance.

f. D'après les réponses aux questions **b.**, **d.** et **e.**, la variable X est implosive d'indice 3.

Troisième partie

6. a. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, positive pour $a \geqslant 0$ et d'intégrale convergente puisque $\alpha > 1$, c'est une densité de probabilité si, et seulement si,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = a \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} = \frac{a}{\alpha - 1}.$$

Ainsi pour que f soit une densité, il faut et il suffit que $a = \alpha - 1$.

b. La fonction de répartition F de X est donnée par

$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

c. La variable X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale de Riemann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = (\alpha - 1) \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha-1}}$$

converge absolument i.e. si, et seulement si, $\alpha > 2$.

d. Pour $n \geqslant 1$, la fonction de répartition de Y_n est donnée par

$$F_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \big(1 - F(x)\big)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{n(\alpha-1)}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

Pour gagner un peu de temps, on utilise le critère établi en **3.** : la variable positive Y_n admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \big(1 - F_n(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n(\alpha-1)}}$$

converge i.e. si, et seulement si, $n(\alpha - 1) > 1$ ou encore $\alpha > 1 + \frac{1}{n}$.

e. Pour $m \geqslant 2$ donné, on a vu en introduction que X est implosive d'indice m si, et seulement si, Y_m admet une espérance mais pas Y_{m-1} c'est-à-dire d'après **d.** si, et seulement si, $1+\frac{1}{m} < \alpha \leqslant 1+\frac{1}{m-1}$. Comme $1+\frac{1}{m} < 1+\frac{1}{m-1}$, il possible de choisir $\alpha > 1$ satisfaisant la condition précédente, et la variable X correspondante est donc implosive d'indice m.

Quatrième partie

7. a. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Elle est positive si, et seulement si, $a \geqslant 0$. Elle admet pour primitive sur $]2,+\infty[$ la fonction $x \longmapsto -\frac{a}{\ln x}$ qui admet une limite finie en $+\infty$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et vaut $\frac{a}{\ln 2}$. Ainsi, pour que f soit une densité de probabilité, il faut et il suffit que $a = \ln 2$.

b. La variable X admet pour répartition

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1-\frac{\ln 2}{\ln x} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

c. On observe que $0 \leqslant \frac{1}{x} = o\big(xf(x)\big)$ lorsque $x \to +\infty$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est donc divergente par comparaison à l'intégrale divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et la variable X n'admet pas d'espérance.

d. Pour $n \geqslant 2$, la variable Y_n admet pour répartition

$$\mathrm{F}_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1-\frac{\ln^n 2}{\ln^n x} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}.$$

Par le même argument qu'en **c.**, on montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1-\mathrm{F}_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$ diverge. La variable positive Y_n n'admet donc pas d'espérance d'après **3.**.

e. Aucune des variables Y_n, $n \geqslant 2$, n'admettant d'espérance d'après **d.**, la variable X n'est pas implosive, bien qu'elle n'ait pas d'espérance d'après **c.**.

Cinquième partie

8. La fonction de répartition F_Y de Y étant à valeurs dans $[0,1]$, celle de X est donnée d'après **1.** par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = 1-\big(1-\mathrm{F}_Y(x)\big)^{1/n}.$$

9. On note $q = 1-p$. La fonction de répartition F_Y d'une variable de loi géométrique de paramètre p vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{F}_Y(k) = \sum_{j=1}^{k} q^{j-1}p = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1-q^k.$$

Plus précisément, puisque Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, elle est donnée par

$$\mathrm{F}_Y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-q^{\lfloor x\rfloor} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

D'après la question **8.**, si X est une variable implosive d'indice m implosant sur Y, alors elle admet pour fonction de répartition

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1-\big(1-\mathrm{F}_Y(x)\big)^{1/m} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-q^{\lfloor x\rfloor/m} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$

La fonction de répartition étant caractéristique de la loi, la variable X devrait donc suivre la loi géométrique de paramètre $1-q^{1/m}$, mais une telle variable admet une espérance et n'est donc pas implosive. Bref, il n'existe donc aucune variable implosant sur une variable de loi géométrique.

10. Il suffit de considérer une variable X implosive d'indice m (il en existe d'après la question **6.**) et de poser $Y = X_m$.

11. *L'énoncé original contient une erreur : il faut lire $k \leqslant m$ et non $k \geqslant m$...*
Soit donc un entier $k \leqslant m$. Une variable implosant à l'indice k sur Y a nécessairement pour fonction de répartition $\mathrm{F}^* : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1-\big(1-\mathrm{G}(x)\big)^{1/k}$. Cette fonction étant (comme G) croissante, continue à droite et de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, c'est la fonction de répartition d'une variable X^*.

D'après la question **1.**, les fonctions de répartition des variables $Y_n^* = \min(X_1^*, \dots, X_n^*)$, $n \in \mathbb{N}^*$, associées à X^* sont données par $F_n^* : x \longmapsto 1 - \big(1 - F^*(x)\big)^n = 1 - \big(1 - G(x)\big)^{n/k}$. En particulier, $F_k^* = G$ si bien que Y_k^* a même loi que Y ; elle admet donc une espérance car X implose sur Y.
En revanche, on déduit de l'inégalité $k \leqslant m$ que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant 1 - F_{m-1}(x) = \big(1 - G(x)\big)^{1-1/m} \leqslant \big(1 - G(x)\big)^{1-1/k} = 1 - F_{k-1}^*(x)$$

où, comme la variable positive Y_{m-1} n'admet pas d'espérance, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{m-1}(t)\big)\, dt$ est divergente d'après **3.**. Il en résulte par comparaison que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F_{k-1}^*(t)\big)\, dt$ diverge également, ce qui signifie que la variable Y_{k-1}^* n'admet pas d'espérance.
Ainsi (d'après l'introduction) X^* est implosive d'indice k et implose sur Y.

Sixième partie

12. Deux cas peuvent se présenter :
- Si X admet une espérance, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1 + \cdots + X_n$ en admet une aussi, ainsi que Z_n par domination puisque $0 \leqslant Z_n \leqslant X_1 + \cdots + X_n$. La variable X n'est donc pas explosive.
- Si X n'admet pas d'espérance, alors Z_2 n'en admet pas non plus car $Z_2 \geqslant X_1 \geqslant 0$. La variable X est donc explosive d'indice 2.

En conclusion, la variable X est explosive si, et seulement si, elle n'admet pas d'espérance, et son indice d'explosion est alors égal à 2.

13. D'après la question **12.**, n'importe quelle variable X admettant une espérance fournit un exemple de variable non explosive : c'est donc le cas des variables de lois binomiale, géométrique, de Poisson, exponentielle et γ...