# ECRICOME 2018 S
Éléments de correction

## Premier exercice

### Première partie

**1.** On vérifie immédiatement que $A^2 = A$ et $B^2 = B$, ce qui donne $u^2 = u$ et $v^2 = v$, d'où l'on déduit que les endomorphismes $u$ et $v$ dont des projecteurs de $\mathbb{R}^2$.

**2. a.** Les colonnes de A engendrent la droite dirigée par ${}^t\begin{pmatrix}1 & a\end{pmatrix}$, celles de B la droite dirigée par ${}^t\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ et celles de

$$AB = \frac{1+a}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & a\end{pmatrix}$$

la droite dirigée par ${}^t\begin{pmatrix}1 & a\end{pmatrix}$ lorsque $a \neq -1$. Les matrices A et B sont donc de rang 1, ainsi que AB lorsque $a \neq -1$, alors qu'elle est de rang 0 pour $a = -1$. Il en va de même des endomorphismes $u$, $v$ et $u \circ v$ qui leur sont canoniquement associés.

**b.** Le calcul donne immédiatement

$$AB\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix} = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix}1\\ a\end{pmatrix},$$

si bien que $u \circ v(x_0) = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}x_0$ : le vecteur $x_0 \neq 0$ est donc propre pour $u \circ v$, associé à la valeur propre $\lambda_a = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}$.

**c.** Puisque $\operatorname{rg} u \circ v < n = 2$ vu **a.**, le réel 0 est valeur propre de $u \circ v$. Par ailleurs, $\lambda_a$ en est une autre d'après **b.** lorsque $a \neq -1$. L'endomorphisme $u \circ v$ admettant au plus $n = 2$ valeurs propres, il en admet dans ce cas exactement deux : 0 et $\lambda_a$. Pour $a = -1$, la matrice AB est nulle si bien que $u \circ v = 0$ admet 0 pour unique valeur propre. Dans tous les cas,

$$\operatorname{Sp} u \circ v = \left\{0, \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\right\}.$$

**3. a.** En développant $(1-a)^2 \geqslant 0$, on met en évidence que $2a \leqslant 1 + a^2$, d'où il ressort que

$$0 \leqslant \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2a}{1+a^2}\right) \leqslant 1.$$

Ainsi les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à $[0, 1]$ d'après **2.c.**.

**b.** Pour que $u \circ v$ soit un projecteur, il est nécessaire que son spectre soit inclus dans $\{0, 1\}$, c'est-à-dire que $\lambda_a$ soit nul ou égal à 1. Le premier cas correspond bien sûr à $a = -1$. Pour le second, on s'aperçoit en remontant le raisonnement mené en **a.** que

$$\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1 \iff \frac{2a}{1+a^2} = 1 \iff (a-1)^2 = 0 \iff a = 1.$$

Réciproquement, AB est nulle pour $a = -1$ et égale à B pour $a = 1$ ; l'endomorphisme $u \circ v$ est donc un projecteur dans les deux cas.
En conclusion, $u \circ v$ est un projecteur si, et seulement si, $a = -1$ ou $a = 1$.

### Deuxième partie

**4.** Par hypothèse, l'endomorphisme $v$ est un projecteur symétrique, ce qui signifie que sa matrice B en base canonique, orthonormale, est symétrique telle que $B^2 = B$. Par conséquent, pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient :

$$\|BX\|^2 = {}^t(BX)(BX) = {}^tX\,{}^tBBX = {}^tXBX = {}^t(BX)X = \langle BX, X\rangle\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que $\|BX\|^2 \leqslant \|BX\|\,\|X\|$ et par suite que $\|BX\| \leqslant \|X\|$ (dans le cas où $\|BX\| > 0$ par simplification, comme dans celui où $\|BX\| = 0$).

**5.** Tout comme B, la matrice A est symétrique. Dans ces conditions, C est symétrique réelle : ${}^tC = {}^tB\,{}^tA\,{}^tB = BAB = C$ donc diagonalisable.

**6. a.** On obtient aisément, en utilisant les propriétés ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$, ${}^t\mathrm{B} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ :

$$\|\mathrm{ABX}\|^2 = {}^t(\mathrm{ABX})(\mathrm{ABX}) = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{B}{}^t\mathrm{AABX} = {}^t\mathrm{X}(\mathrm{CX}) = \lambda{}^t\mathrm{XX} = \lambda\|\mathrm{X}\|^2.$$

**b.** En remarquant que $\|\mathrm{X}\|^2 > 0$ puisque X est non nul en tant que vecteur propre, on déduit de la question précédente que $\lambda = \frac{\|\mathrm{ABX}\|^2}{\|\mathrm{X}\|^2} \geqslant 0$. Les valeurs propres de C sont donc positives ou nulles.

**7. a.** De l'hypothèse $\mathrm{ABX} = \mu\mathrm{X}$, on déduit que $\mathrm{C}(\mathrm{BX}) = \mathrm{BAB}^2\mathrm{X} = \mathrm{B}(\mathrm{ABX}) = \mu\mathrm{BX}$. Sachant que $\mu \neq 0$ et $\mathrm{X} \neq 0$, on a par ailleurs $\mathrm{ABX} = \mu\mathrm{X} \neq 0$ si bien que $\mathrm{BX} \neq 0$. Tout cela met en évidence que BX est vecteur propre de C pour la valeur propre $\mu$.
Puisque les valeurs propres de C sont positives ou nulles d'après **6.b.** et que $\mu \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $\mu > 0$.

**b.** On a $\mathrm{ABX} = \mathrm{A}(\mathrm{ABX}) = \mu\mathrm{AX}$ d'où l'on déduit, par comparaison à $\mathrm{ABX} = \mu\mathrm{X}$ et sachant $\mu \neq 0$, que $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$.

**c.** Il vient d'après **b.** :

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{BX}\rangle = \langle \mathrm{AX}, \mathrm{BX}\rangle = {}^t\mathrm{X}(\mathrm{ABX}) = \mu{}^t\mathrm{XX} = \mu\|\mathrm{X}\|^2.$$

**8.** Si $\mu$ désigne une valeur propre non nulle de AB et X un vecteur propre associé, on a vu en **7.a.** que $\mu > 0$ et l'on remarque, en utilisant **4.** et **7.c.**, que :

$$\mu\|\mathrm{X}\|^2 = \langle \mathrm{X}, \mathrm{BX}\rangle \leqslant \|\mathrm{X}\|\,\|\mathrm{BX}\| \leqslant \|\mathrm{X}\|^2,$$

d'où il ressort que $\mu \leqslant 1$. Ainsi le spectre de AB est-il inclus dans $[0, 1]$.

## Deuxième exercice

**1.** On établit pour commencer une relation qui sera utile à plusieurs reprises dans cet exercice :

$$\varphi^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi,$$

si bien que $\varphi$ est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Par suite,

$$\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\varphi}\right) - 1 = \frac{1+\varphi-\varphi^2}{\varphi^2} = 0,$$

et $-\frac{1}{\varphi}$ est donc l'autre solution de cette équation polynomiale du second degré.

**2. a.** La fonction $f$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, avec :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = 6(x^2 - y, -x + y - 1).$$

**b.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit d'après **1.** que $f$ admet deux points critiques :

$$\mathrm{A} = (\varphi, \varphi^2) = (\varphi, \varphi + 1) \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi^2}\right) = \left(-\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\varphi+1}\right).$$

**c.** En un point critique $(x, y)$, on s'intéresse aux valeurs propres de la hessienne

$$\nabla^2 f(x, y) = 6\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit des réels de la forme $6\lambda$ pour lesquels la matrice

$$\nabla^2 f(x, y) - 6\lambda \mathrm{I}_2 = 6\begin{pmatrix} 2x - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, c'est-à-dire qui annulent l'expression

$$(2x - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - (2x+1)\lambda + 2x - 1.$$

Sachant que $(x,y)$ est point critique, on a $x^2 - x - 1 = 0$ d'après **1.**, si bien que le trinôme en $\lambda$ ci-dessus a pour discriminant $(2x+1)^2 - 4(2x-1) = 4(x^2-x)+5 = 9$ et pour racines $\lambda_1 = x-1$ et $\lambda_2 = x+2$.
Au point critique A, les valeurs propres $6\lambda_1$ et $6\lambda_2$ de la hessienne sont donc strictement positives : la fonction $f$ y présente donc un minimum local.
Au point critique B, la hessienne admet deux valeurs propres $6\lambda_1 < 0$ et $6\lambda_2 > 0$, si bien que $f$ y présente un point col.

**3.** On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ : on calcule $u_2 = 1$ pour vérifier que la formule est vérifiée au rang $n = 0$ et, si elle est satisfaite pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) - u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) \\ &= u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

**4. a.** Le code ci-dessous convient (par exemple) :

**Listing 1** : calcul de $u_n$

```
function u=suite(n)
    // v est destiné à contenir u(k-1) et w u(k)
    // pour k variant de 1 à n
    v=0;  // initialisation aux deux premiers rangs
    w=1;  // correspondant à k=1
    for k=2:n
        t=v;  // on retient la valeur de v
        v=w;  // avant de l'écraser
        w=t+v;
    end
    u=w;
endfunction
```

**b.** Par définition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire du second ordre à coefficients constants, dont l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions distinctes $\varphi$ et $-\frac{1}{\varphi}$ d'après **1.**. Dans ces conditions, il existe par théorème un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\varphi^n + \mu\Big(-\frac{1}{\varphi}\Big)^n.$$

Les réels $\lambda$ et $\mu$ sont alors déterminés par les deux premiers termes de la suite : en écrivant la formule précédente pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 = 0 \\ \lambda\varphi - \frac{\mu}{\varphi} = u_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} \end{cases}.$$

On peut enfin remarquer que :

$$\lambda = \frac{1}{\varphi + \frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi}{\varphi^2+1} = \frac{\varphi}{2+\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

pour conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-\frac{1}{\varphi}\Big)^n.$$

**c.** Puisque $\left|-\frac{1}{\varphi}\right| < 1 < \varphi$ d'après **1.**, on a $\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n = o(\varphi^n)$ lorsque $n \to \infty$, si bien que $u_n \sim \lambda\varphi^n$ lorsque $n \to \infty$ d'après **b.**. Dès lors,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \frac{\lambda\varphi^{n+1}}{\lambda\varphi^n} = \varphi \to \varphi, \quad n \to \infty.$$

**5. a.** En utilisant l'équivalent établi en **4.c.**, il vient :

$$\frac{1}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{1}{\lambda^2 \varphi}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n \geqslant 0, \quad n \to \infty$$

d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum \frac{1}{u_n u_{n+1}}$ par comparaison à la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n$, convergente puisque $0 \leqslant \frac{1}{\varphi^2} < 1$.

**b.** D'après la question **a.**, la série $\sum \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$ converge absolument. Elle est donc convergente, ce qui signifie que la suite $(\mathrm{S}_n)$ de ses sommes partielles est elle-même convergente.

**c.** D'après **3.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}u_{n+2}} = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1}u_{n+2}} = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

**d.** En utilisant des télescopages à partir de la relation établie en **c.**, il vient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{S}_{k+1} - \mathrm{S}_k) = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{u_k}{u_{k+1}} - \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}\right) = -\frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

En passant aux limites (qui existent d'après **4.c.** et **b.**), on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} = -\frac{1}{\varphi} = -2\frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi,$$

d'où le résultat :

$$\varphi = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}.$$

## Problème

### Première partie

**1. a.** On justifie la formule par une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ (à détailler sur la copie !).

**b.** À partir de la formule établie en **a.**, il vient :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{N}=k) = \mathbb{P}(\mathrm{N}=0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{k!} = \mathbb{P}(\mathrm{N}=0)\mathbf{e}^b.$$

Sachant que cette somme vaut 1 puisque N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ par hypothèse, on en déduit que $\mathbb{P}(\mathrm{N}=0) = \mathbf{e}^{-b}$, et la formule de la question **a.** devient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\mathrm{N}=k) = \mathbf{e}^{-b}\frac{b^k}{k!},$$

si bien que N suit la loi de Poisson de paramètre $b$. Elle admet à ce titre espérance et variance données par $\mathbb{E}(\mathrm{N}) = \mathbb{V}(\mathrm{N}) = b$.

*Remarque.* Il n'est pas utile de supposer $b > 0$ (et on n'a pas utilisé cette hypothèse avant d'identifier une loi de Poisson) : c'est une conséquence de la formule $\mathbf{e}^{-b} = \mathbb{P}(\mathrm{N}=0)$ et de l'hypothèse $\mathbb{P}(\mathrm{N}=0) < 1$.

**2. a.** La relation de Panjer donne $\mathbb{P}(\mathrm{N}=2) = 0$, ce qui constitue l'initialisation d'une récurrence immédiate conduisant à la conclusion que $\mathbb{P}(\mathrm{N}=k) = 0$ pour tout $k \geqslant 2$.

**b.** Par hypothèse, $\mathbb{P}(\mathrm{N}=1) = -a\,\mathbb{P}(\mathrm{N}=0)$ d'où l'on déduit, sachant par ailleurs que $\mathbb{P}(\mathrm{N}=0) + \mathbb{P}(\mathrm{N}=1) = 1$ d'après **a.**, que $\mathbb{P}(\mathrm{N}=1) = \frac{a}{a-1}$. Prenant presque sûrement ses valeurs dans $\{0,1\}$, la variable N suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a-1}$.

**3. a.** C'est évident (détailler l'expression de $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k-1)$) à partir de la définition :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{Z}=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

**b.** La relation de la question **a.** s'écrit encore :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(Z = k) = \frac{p}{1-p}\Big(-1 + \frac{n+1}{k}\Big)\,\mathbb{P}(Z = k-1).$$

Elle est encore valable pour $k > n$ (et en particulier pour $k = n+1$) puisque Z est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. La variable Z vérifie donc la relation de Panjer avec $a = -\frac{p}{1-p} < 0$ et $b = (n+1)\frac{p}{1-p}$.

**4. a.** En utilisant la relation de Panjer, il vient $\mathbb{P}(N = 1) = (a+b)\,\mathbb{P}(N = 0)$, où $\mathbb{P}(N = 0)$ est nécessairement non nul, sans quoi on aurait $\mathbb{P}(N = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate, en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle N est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Par suite, $a + b = \frac{\mathbb{P}(N=1)}{\mathbb{P}(N=0)} \geqslant 0$. L'inégalité est même stricte, sans quoi on aurait comme ci-dessus $\mathbb{P}(N = 0) = 1$, ce qui est exclu.

**b.** Pour $m \geqslant 1$, on a d'après la relation de Panjer :

$$\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{m}(ak+b)\,\mathbb{P}(N = k-1) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\,\mathbb{P}(N = k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N = k)$$

par décalage d'indice dans la somme centrale.

**c.** En appliquant[1] le résultat obtenu en **b.** à l'entier $m+1$ et en retranchant $a\sum_{k=0}^{m} k\,\mathbb{P}(N = k) + (m+1)\,\mathbb{P}(N = m+1)$ aux deux membres, il vient :

$$\forall m \geqslant 0, \quad (1-a)\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(N = k) = (a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(N = k) - (m+1)\,\mathbb{P}(N = m+1). \qquad (1)$$

Sachant $a + b \geqslant 0$ d'après **a.**, il en ressort en particulier que :

$$\forall m \geqslant 0, \quad (1-a)\sum_{k=1}^{m} k\,\mathbb{P}(N = k) \leqslant (a+b)\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N = k) = a+b.$$

Puisque $1 - a > 0$ par hypothèse, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_k k\,\mathbb{P}(N = k)$ sont donc majorées, ce qui assure la convergence (absolue) de cette série : la variable N admet une espérance.
Par suite, le terme général de la série $\sum_k k\,\mathbb{P}(N = k)$ converge vers 0, et l'on peut donc passer à la limite lorsque $m \to \infty$ dans la relation (1) pour obtenir :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(N = k) = \frac{a+b}{1-a}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N = k) = \frac{a+b}{1-a}.$$

**d.** On adapte la méthode proposée en **c.**. À partir de la formule :

$$\forall m \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}(N = k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)^2\,\mathbb{P}(N = k) + b\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\,\mathbb{P}(N = k),$$

on établit la relation :

$$\forall m \geqslant 0, \quad (1-a)\sum_{k=1}^{m} k^2\,\mathbb{P}(N = k) = (2a+b)\sum_{k=0}^{m} k\,\mathbb{P}(N = k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(N = k) - (m+1)^2\,\mathbb{P}(N = m+1), \qquad (2)$$

d'où l'on déduit d'abord que les sommes partielles de la série $\sum_k k^2\,\mathbb{P}(N = k)$ sont majorées sachant que N admet une espérance, ce qui assure l'existence d'un moment d'ordre 2 pour la variable N et la convergence du terme général de la série précédente vers 0, ce qui permet enfin de passer à la limite lorsque $m \to \infty$ dans (2) pour obtenir :

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{2a+b}{1-a}\,\mathbb{E}(N) + \frac{a+b}{1-a} = \frac{(a+b)(a+b-1)}{(1-a)^2}.$$

**e.** Sachant que N admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2 = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

**f.** Ayant déjà justifié en **a.** que $a + b > 0$, l'égalité $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ équivaut à $1 - a = 1$ i.e. $a = 0$ d'après **c.** et **e.**. D'après la question **1.** (et notamment la remarque du corrigé), cela implique que N suit une loi de Poisson. La réciproque est immédiate.

1. L'absence d'information sur le signe de $a$ conduit à quelques contorsions...

## Deuxième partie

**5.** Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant p_k x^k \leqslant p_k$ pour tout $k \geqslant 0$, d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum_k p_k x^k$ par comparaison à la série convergente $\sum_k p_k$.

*Remarque.* L'hypothèse $\frac{b}{a} > 0$ (qui équivaut plus simplement à $b > 0$ ou $\alpha < -1$) est superflue dans les questions qui suivent.

**6.** La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ car $a < 1$. On établit alors la formule par récurrence[2] sur $k \geqslant 0$ : elle est évidente pour $k = 0$ et, si elle est acquise pour un entier $k \geqslant 0$, alors

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1], \quad f^{(k+1)}(x) &= -k!a(\alpha - k)p_k(1-ax)^{\alpha-k-1} = k!(a+b+ka)p_k(1-ax)^{\alpha-k-1}\\ &= (k+1)!\Big(a + \frac{b}{k+1}\Big)p_k(1-ax)^{\alpha-k-1} = (k+1)!p_{k+1}(1-ax)^{\alpha-(k+1)}.\end{aligned}$$

**7. a.** Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, c'est une application directe de la formule de Taylor avec reste intégral sur $[0,x]$ à la fonction $f$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ : d'après la question **6.**,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

**b.** Pour $t \in [0,x]$,

$$1 - \frac{x-t}{1-at} = \frac{1-x+(1-a)t}{1-at} \geqslant 0$$

car $a < 1$, si bien (tous les facteurs sont positifs sous l'intégrale) que :

$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\Big(\frac{x-t}{1-at}\Big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t.$$

**c.** La question **b.** met en évidence que la suite de terme général $\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$, est bornée. Sachant que celle de terme général $(n+1)p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0 comme on l'a vu en **4.c.**, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t = 0,$$

si bien que

$$\mathrm{G}(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} p_k x^k = \lim_{n\to\infty}\Big(f(x) - (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t\Big) = p_0(1-ax)^\alpha$$

d'après la question **a.**.
En particulier pour $x = 1$ :

$$p_0 = \frac{\mathrm{G}(1)}{(1-a)^\alpha} = \frac{1}{(1-a)^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \frac{1}{(1-a)^\alpha},$$

ce qui conduit enfin à :

$$\mathrm{G}'(1) = f'(1) = -a\alpha p_0(1-a)^{\alpha-1} = \frac{a+b}{1-a}$$

c'est-à-dire, par comparaison à la formule obtenue en **4.c.**, $\mathrm{G}'(1) = \mathbb{E}(\mathrm{N})$.

*Remarque.* La formule $\mathrm{G}'(1) = \mathbb{E}(\mathrm{N})$ est en fait valable pour toute variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

**8.** Pas de question **8.** ?

## Troisième partie

**9.** En utilisant le système complet associé à la variable N et sachant les variables $\mathrm{X}_i$ positives, il vient :

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}=0) = \sum_{k\in \mathrm{N}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{N}=k)\,\mathbb{P}_{[\mathrm{N}=k]}(\mathrm{S}=0) = p_0 + \sum_{k\in\mathrm{N}(\Omega)\setminus\{0\}} p_k\,\mathbb{P}_{[\mathrm{N}=k]}\Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k}[\mathrm{X}_i = 0]\Big)$$

2. Le prédicat au rang $k$ énonce la formule *pour tout* $x \in [0,1]$, sans quoi on ne peut pas la dériver pour établir l'hérédité !

c'est-à-dire, par indépendance des variables $N, X_1, \dots, X_k$ et d'après le lemme des coalitions :

$$\mathbb{P}(S=0) = p_0 + \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0\}} p_k\, \mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leqslant i\leqslant k} [X_i=0]\Big) = p_0 + \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0\}} p_k \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_i=0)$$

ou encore, vu que $X_1, \dots, X_k$ sont identiquement distribuées, en notant $x = \mathbb{P}(X_1=0) \in [0,1]$ et en utilisant le résultat établi en **7.c.**, sachant que $a \in \,]0,1[$ (cf. remarque précédant la question **6.**),

$$\mathbb{P}(S=0) = p_0 + \sum_{k\in N(\Omega)\setminus\{0\}} p_k\, \mathbb{P}(X_1=0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = G(x) = \left(\frac{1-ax}{1-a}\right)^{\alpha}.$$

**10. a.** En reprenant les premières étapes du calcul précédent, qui demeurent valables, il vient :

$$\mathbb{P}(S=0) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \mathbf{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = \mathbf{e}^{-\lambda(1-x)}.$$

**b.** L'instruction `rand()<1/2` simule la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ (en identifiant respectivement les booléens `T` et `F` aux entiers `1` et `0`). La fonction proposée simule donc $n$ expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$ puis renvoie le nombre de succès. Elle simule donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.
*Remarque.* Une programmation matricielle serait plus efficace.

**c.** Le script ci-dessous convient :

**Listing 2** : simulation de S

```
function s=simulS(lambda,n)
    N=grand(1,1,'poi',lambda);
    s=0;
    for k=1:N  // ne sera exécuté que si N>=1
        s=s+simulX(n);
    end
endfunction
```

*Remarque.* La boucle ne sera pas exécutée si `N=0` car `1:0` renvoie la liste vide. Bien que ce soit possible, il n'est donc pas nécessaire d'inclure une alternative selon que `N=0` ou pas.

**11. a.** On suppose[3] que $\mathbb{P}(S_{n+1}=k) > 0$ sans quoi la question n'a pas de sens. Conditionnellement à l'événement $[S_{n+1}=k]$, les variables $X_1, \dots, X_{n+1}$ prennent leurs valeurs dans $[\![0,k]\!]$ : elles sont donc finies et admettent à ce titre une espérance. Par linéarité de l'espérance (conditionnelle), on a alors :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_i \,|\, S_{n+1}=k) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \Big| S_{n+1}=k\Big) = \mathbb{E}(S_{n+1} \,|\, S_{n+1}=k) = \mathbb{E}(k \,|\, S_{n+1}=k) = k,$$

mais par ailleurs les $n+1$ réels $\mathbb{E}(X_i \,|\, S_{n+1}=k)$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, sont tous égaux car $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont indépendantes (de sorte que leurs lois déterminent celle de $S_{n+1}$), identiquement distribuées et jouent des rôles symétriques dans la définition de $S_{n+1}$.
Il en ressort que :

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad \mathbb{E}(X_i \,|\, S_{n+1}=k) = \frac{k}{n+1}.$$

**b.** Toujours sous l'hypothèse selon laquelle $\mathbb{P}(S_{n+1}=k) > 0$, on a pour $j \in [\![0,k]\!]$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)\,\mathbb{P}(S_{n+1}=k) &= \mathbb{P}([X_{n+1}=j] \cap [S_{n+1}=k]) = \mathbb{P}([X_{n+1}=j] \cap [S_n + j = k]) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1}=j)\,\mathbb{P}(S_n = k-j) = q_j\, \mathbb{P}(S_n = k-j)\end{aligned}$$

par indépendance de $S_n$ et $X_{n+1}$, qui découle de celle de $X_1, \dots, X_{n+1}$ et du lemme des coalitions.
*Remarque.* Si $\mathbb{P}(S_{n+1}=k) = 0$, l'argument développé ci-dessus (sans la partie faisant intervenir le conditionnement) montre que $q_j\, \mathbb{P}(S_n = k-j) = 0$ pour tout $j \in [\![0,k]\!]$.

3. Ce n'est pas nécessairement le cas : penser à une variable $X_1$ ne prenant que des valeurs paires...

**c.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) > 0$. Conditionnellement à $[S_{n+1} = k]$, la variable $X_{n+1}$ prend ses valeurs dans $[\![0, k]\!]$, si bien que d'après le théorème de transfert et la question **a.**,

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) \mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) = \mathbb{E}\left(a + \frac{bX_{n+1}}{k} \Big| S_{n+1} = k\right)$$
$$= a + \frac{b}{k}\,\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, S_{n+1} = k) = a + \frac{b}{n+1}.$$

Par suite, en utilisant la question **b.**,

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(S_n = k - j) = \left(\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) \mathbb{P}_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j)\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k)$$
$$= \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

Si $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 0$, la formule est également valable d'après la remarque suivant la question **b.**.

**12. a.** Pour $j \in [\![0, k]\!]$, la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable N donne (avec la convention $S_0 = 0$) :

$$\mathbb{P}(S = k - j) = \sum_{n \in N(\Omega)} \mathbb{P}(N = n)\, \mathbb{P}_{[N=n]}(S_n = k - j)$$
$$= \sum_{n \in N(\Omega)} p_n\, \mathbb{P}(S_n = k - j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, \mathbb{P}(S_n = k - j)$$

par indépendance de N et $S_n$, qui découle de celle de $N, X_1, \ldots, X_n$ et du lemme des coalitions.

**b.** À partir de **11.c.** et **a.**, il vient (une somme *finie* de séries convergentes est convergente, de somme la somme des sommes) :

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(S = k - j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(S_n = k - j)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(a + \frac{b}{n+1}\right) \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}(S_{n+1} = k)$$

d'après la relation de Panjer.

**c.** Puisque $k > 0$, on a $\mathbb{P}(S_0 = k) = 0$ si bien que la formule de la question **a.** pour $j = 0$ s'écrit :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\, \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\, \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1}\, \mathbb{P}(S_{n+1} = k).$$

**d.** D'après les questions **b.** et **c.**,

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(S = k - j) = a q_0\, \mathbb{P}(S = k) + \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(S = k - j)$$

d'où finalement puisque $a < 1$ :

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{1}{1 - a q_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j\, \mathbb{P}(S = k - j).$$