PROBLEME 1

Partie 1
Calcul des puissances de A

1. Posons $\beta' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille de vecteurs de E définie par $\begin{cases} e'_1 = -3e_2 + 7e_3 \\ e'_2 = e_1 + 8e_2 - 27e_3 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$

   (a) On a $f(e_1) = 4e_1 + 8e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = 3e_2 + 7e_3$ et $f(e_3) = 6e_3$. Alors

$$\begin{cases} f(e'_1) = -3f(e_2) + 7f(e_3) = -3(3e_2 + 7e_3) + 7(6e_3) \\ f(e'_2) = f(e_1) + 8f(e_2) - 27f(e_3) = 4e_1 + 8e_2 - 2e_3 + 8(3e_2 + 7e_3) - 27(6e_3) \\ f(e'_3) = f(e_3) = 6e_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f(e'_1) = 3(-3e_2 + 7e_3) = 3e'_1 \\ f(e'_2) = 4(e_1 + 8e_2 - 27e_3) = 4e'_2 \\ f(e'_3) = f(e_3) = 6e'_3 \end{cases}$$

   d'où les résultats.

   (b) Soient a, b et c dans $\mathbb{R}$ tel que $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$, montrons que $a = b = c = 0$. On a

$$\begin{aligned} ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E &\iff be_1 + (-3a + 8b)e_2 + (7a - 27b + c)e_3 = 0_E \\ &\iff \begin{cases} b = 0 \\ -3a + 8b = 0 \\ 7a - 27b + c = 0 \end{cases} \quad (\text{ car la famille } (e_1, e_2, e_3) \text{ est libre}) \\ &\iff a = b = c = 0. \end{aligned}$$

   Alors β' est libre de cardinal égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, alors c'est une base.

   (c) D'après la question [1.a], on a f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admet trois valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

   (d) On a $\begin{cases} e'_1 = -3e_2 + 7e_3 \\ e'_2 = e_1 + 8e_2 - 27e_3 \\ e'_3 = e_3 \end{cases}$, alors la matrice de passage de β à β' est la matrice

$$P = P_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ 7 & -27 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Par la formule de changement de base, on a

$$A = Mat_\beta(f) = P_{\beta\beta'}Mat_{\beta'}(f)P_{\beta'\beta} = P\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}P^{-1}$$

c'est à dire que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où } D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

2. On a $A = PDP^{-1}$, alors $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, montrons par récurrence que

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3 = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$, les résultats est vrai pour $n = 0$, et d'après la question [1.e] les résultats ainsi est vrai pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$, et montrons $A^n = PD^{n+1}P^{-1}$. On a

$$A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Alors d'après le principe de récurrence, on a pour tout entier naturel n, $A^n = PD^{n+1}P^{-1}$.

3. On a

$$PQ = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 8 & 0\\ 7 & -27 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 25 & 7 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = 3I$$

Alors $PQ = 3I$, et donc $P^{-1} = \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}8 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 25 & 7 & 3\end{pmatrix}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 8 & 0\\ 7 & -27 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0 & 0\\ 0 & 4^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}8 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 25 & 7 & 3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 8 & 0\\ 7 & -27 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\times 3^n & -3^n & 0\\ 3\times 4^n & 0 & 0\\ 25\times 6^n & 7\times 6^n & 3\times 6^n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\times 4^n & 0 & 0\\ 24(-3^n+4^n) & 3^{n+1} & 0\\ 56\times 3^n - 81\times 4^n + 25\times 6^n & 7(-3^n+6^n) & 3\times 6^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. Dans cette question, on considère dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'équation matricielle d'inconnue N,

$$(E): \quad N^2 = D.$$

(a) Soit $N=\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
ND=DN &\iff \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix} 3a & 4b & 6c\\ 3d & 4e & 6f\\ 3g & 4h & 6k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c\\ 4d & 4e & 4f\\ 6g & 6h & 6k\end{pmatrix}\\
&\iff b=c=d=f=g=h=0\\
&\iff N=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où N commute avec D si, et seulement si, N est une matrice diagonale.

(b) Soit $N\in\mathscr{M}$ tel que $N^2=D$, on a $ND=NN^2=N^3=N^2N=DN$, alors N commute avec D.

(c) D'après les questions [5.a] et [5.b], on a, si N est une solution de l'équation (E), alors N est diagonale c-à-d $N=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$, où a,b et c dans $\mathbb{R}$. Alors

$$N^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ 0 & b^2 & 0\\ 0 & 0 & c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

Alors $a^2=3$, $b^2=4$ et $c^2=6$. Donc la solution de l'équation (E) dont toutes les valeurs propres sont positives est

$$N=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

(d) Soit $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^2=A$. On a

$$M^2=A \iff M^2=PDP^{-1} \iff P^{-1}M^2P=(P^{-1}MP)^2=D$$

On a M et $P^{-1}MP$ ont même valeurs propres. Alors M est solution de l'équation $M^2=A$ dont toutes les valeurs propres sont positives si, et seulement si, $P^{-1}MP$ est solution de l'équation (E) dont toutes les valeurs propres sont positives.
Et d'après la question précédente, on a

$$P^{-1}MP=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}\iff M=P\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}P^{-1}$$

D'où

$$M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ -24\sqrt{3}+48 & 3\sqrt{3} & 0\\ 56\sqrt{3}-27\times 6+25\sqrt{6} & 7(-\sqrt{3}+\sqrt{6}) & 3\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

Partie 2

Application en probabilité

1. (a) X_1 égal au numéro du sommet occupé par la mobile à l'instant n, et puisque à l'instant 0 le mobile se trouve sur le sommet 1, alors à l'instant 1 sera sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou 2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$. Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(X_1 = 2) = \frac{2}{3}$.

   (b) On a
$$E(X_1) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} xP(X_1 = x) = 1P(X_1 = 1) + 2P(X_1 = 2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$
et d'après la formules de Huygens, on a $V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = E(X_1^2) - \frac{25}{9}$, et par le théorème de transfère on a
$$E(X_1^2) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} x^2 P(X_1 = x) = 1^2 P(X_1 = 1) + 2^2 P(X_1 = 2) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3.$$
D'où $V(X_1) = 3 - \frac{25}{9} = \frac{2}{9}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la famille $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3], [X_n = 4]\}$ forme un système complet d'événement, et avec la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P([X_{n+1} = 1]) &= P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1])P([X_n = 1]) + P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1])P([X_n = 2]) \\ &\quad + P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 1])P([X_n = 3]) + P_{[X_n=4]}([X_{n+1} = 1])P([X_n = 4]) \\ &= \frac{1}{3}P([X_n = 1]). \end{aligned}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, la famille $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3], [X_n = 4]\}$ forme un système complet d'événement, et avec la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned} P([X_{n+1} = 2]) &= P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 2])P([X_n = 1]) + P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 2])P([X_n = 2]) \\ &\quad + P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 2])P([X_n = 3]) + P_{[X_n=4]}([X_{n+1} = 2])P([X_n = 4]) \\ &= \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{4}P([X_n = 2]) + 0P([X_n = 3]) + 0P([X_n = 4]) \\ &= \frac{2}{3}P([X_n = 1]) + \frac{1}{4}P([X_n = 2]). \end{aligned}$$

   (c) De même, on a
$$\begin{aligned} P([X_{n+1} = 3]) &= P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 3])P([X_n = 1]) + P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 3])P([X_n = 2]) \\ &\quad + P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 3])P([X_n = 3]) + P_{[X_n=4]}([X_{n+1} = 3])P([X_n = 4]) \\ &= 0P([X_n = 1]) + \frac{3}{4}P([X_n = 2]) + \frac{2}{3}P([X_n = 3]) + \frac{1}{6}P([X_n = 4]) \\ &= \frac{3}{4}P([X_n = 2]) + \frac{2}{3}P([X_n = 3]) + \frac{1}{6}P([X_n = 4]). \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} P([X_{n+1} = 4]) &= P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 4])P([X_n = 1]) + P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 4])P([X_n = 2]) \\ &\quad + P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 4])P([X_n = 3]) + P_{[X_n=4]}([X_{n+1} = 4])P([X_n = 4]) \\ &= 0P([X_n = 1]) + 0P([X_n = 2]) + \frac{1}{3}P([X_n = 3]) + \frac{5}{6}P([X_n = 4]) \\ &= \frac{1}{3}P([X_n = 3]) + \frac{5}{6}P([X_n = 4]). \end{aligned}$$

   (d) Par récurrence sur n. Pour $n = 0$: On a $P([X_0 = 1]) = 1$ et $\forall i \in [\![2, 4]\!]$, $P([X_1 = i]) = 0$, alors les résultats est vrai pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que les résultats est vrai pour n, c'est à dire que
$$P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) + P([X_n = 3]) + P([X_n = 4]) = 1$$

et montrons les pour $n+1$, on a

$$\begin{aligned}
P([X_{n+1}=1])+P([X_{n+1}=2])+P([X_{n+1}=3])+P([X_{n+1}=4])&\\
&= \frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{4}P([X_n=2])+\frac{3}{4}P([X_n=2])\\
&+\frac{2}{3}P([X_n=3])+\frac{1}{6}P([X_n=4])+\frac{1}{3}P([X_n=3])+\frac{5}{6}P([X_n=4])\\
&= P([X_n=1])+P([X_n=2])+P([X_n=3])+P([X_n=4])\\
&= 1(\text{ par l'hypothèse de récurrence })
\end{aligned}$$

<u>Autre réponse</u> : La famille $\{[X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\}$ forme un système complet d'événement $(\bigcup_{i=1}^{4}[X_n=i]=\Omega)$, alors

$$P([X_n=1])+P([X_n=2])+P([X_n=3])+P([X_n=4])=P\left(\bigcup_{i=1}^{4}[X_n=i]\right)=P(\Omega)=1.$$

3. On pose $B=\frac{1}{12}A$ et $C=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et on note tout entier naturel n, $U_n=\begin{pmatrix}P([X_n=1])\\P([X_n=2])\\P([X_n=3])\end{pmatrix}$.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
U_{n+1}&=\begin{pmatrix}P([X_{n+1}=1])\\P([X_{n+1}=2])\\P([X_{n+1}=3])\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}P([X_n=1])\\ \frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{4}P([X_n=2])\\ \frac{3}{4}P([X_n=2])+\frac{2}{3}P([X_n=3])+\frac{1}{6}P([X_n=4])\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a d'après la questions précédente $P([X_n=4])=1-P([X_n=1])-P([X_n=2])-P([X_n=3])$, alors

$$\frac{3}{4}P([X_n=2])+\frac{2}{3}P([X_n=3])+\frac{1}{6}P([X_n=4])=-\frac{1}{6}P([X_n=1])+\frac{7}{12}P([X_n=2])+\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{1}{6}$$

d'où

$$\begin{aligned}
U_{n+1}&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}P([X_n=1])\\ \frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{4}P([X_n=2])\\ -\frac{1}{6}P([X_n=1])+\frac{7}{12}P([X_n=2])+\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{1}{6}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}P([X_n=1])\\ \frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{4}P([X_n=2])\\ -\frac{1}{6}P([X_n=1])+\frac{7}{12}P([X_n=2])+\frac{1}{2}P([X_n=3])\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\ \frac{2}{3}&\frac{1}{4}&0\\ -\frac{1}{6}&\frac{7}{12}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P([X_n=1])\\P([X_n=2])\\P([X_n=3])\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4&0&0\\8&3&0\\-2&7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P([X_n=1])\\P([X_n=2])\\P([X_n=3])\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&=BU_n+C.
\end{aligned}$$

(b) n =input("entrer l'entier n") ;
A =[4,0,0 ;8,3,0 ;-2,7,6] ;

C =[0 ;0 ;1/6] ;

U =[1 ;0 ;0] ; // le vecteur initial $\begin{pmatrix} P([X_0]=1) \\ P([X_0]=2) \\ P([X_0]=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

for $i = 1 : n$

$\quad U = 1/12 * A * U + C$;

end

disp(U)

(c) Soit $L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, telle que $L = BL + C$. On a alors

$$L = BL + C \iff (I_3 - B)L = C \iff \frac{1}{12}(12I_3 - A)L = C$$

$$\iff \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 0 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{8}{12}x = 0 \\ \frac{1}{12}(-8x + 9y) = 0 \\ \frac{1}{12}(2x - 7y + 6z) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions [3.a] et [3.c], on a $U_{n+1} = BU_n + C$, et $L = BL + C$. Alors

$$U_{n+1} = BU_n + L - BL = B(U_n - L) + L \iff U_{n+1} - L = B(U_n - L).$$

(e) Montrons par le raisonnement de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - L = B^n(U_0 - L)$.
Pour $n = 0$, on a $B^n(U_0 - L) = I_3(U_0 - L) = U_0 - L$ vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n - L = B^n(U_0 - L)$ et montrons que $U_{n+1} - L = B^{n+1}(U_0 - L)$.
On a par la question précédente

$$U_{n+1} = B(U_n - L) = BB^n(U_0 - L) = B^{n+1}(U_0 - L).$$

D'où d'après le principe de récurrence on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - L = B^n(U_0 - L)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question [5.e] et la question [4] de la partie 1, on a

$$U_n = B^n(U_0 - L) + L = \frac{1}{12^n}A^n\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12^n}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \times 4^n & 0 & 0 \\ 24(-3^n + 4^n) & 3^{n+1} & 0 \\ 56 \times 3^n - 81 \times 4^n + 25 \times 6^n & 7(-3^n + 6^n) & 3 \times 6^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12^n}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \times 4^n \\ 24(-3^n + 4^n) \\ 56 \times 3^n - 81 \times 4^n + 25 \times 6^n - 6^n \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{cases} P([X_n=1]) = \frac{1}{12^n}4^n \\ P([X_n=2]) = \frac{1}{12^n}8(-3^n+4^n) \\ P([X_n=3]) = \frac{1}{12^n}\frac{1}{3}(56\times 3^n - 81\times 4^n + 246^n) + \frac{1}{3} \end{cases}$$

5. faisant n tendre vers l'infini dans les égalités de la question précédente, on trouve

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=1]) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{12^n}4^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=2]) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{12^n}8(-3^n+4^n) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=3]) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{12^n}\frac{1}{3}(56\times 3^n - 81\times 4^n + 25\times 6^n - \frac{3}{6}6^n) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

et d'après la question [2.d], on a

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to+\infty}\left(P([X_n=1]) + P([X_n=2]) + P([X_n=3]) + P([X_n=4])\right) \\ &\iff 0+0+\lim_{n\to+\infty} P([X_n=3]) + \lim_{n\to+\infty} P([X_n=4]) = 1 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} P([X_n=4]) = 1 - \lim_{n\to+\infty} P([X_n=3]) \end{aligned}$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n=3]) = \frac{1}{3}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} P([X_n=4]) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

PROBLEME 2

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par $f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1}{\pi t^{\frac{3}{2}}(1+t)} & \text{si } t > 0 \end{cases}$

Partie 1
Étude d'une densité

On pose, pour tout réel t, $g(t) = f(t,1)$.

1. (a) L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} g(t)dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.
Au voisinage de 0 : On a $\lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{3}{4}}g(t) = \lim\limits_{t\to 0} t^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\pi(1+t)} = 0$, alors $g(t) = \underset{0^+}{\circ}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)$, et puisqu'on a l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}dt$ est converge, il en de même de $\int_0^1 g(t)dt$.
Au voisinage de $+\infty$: On a $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t^{\frac{3}{2}}}$, et puisqu'on a l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ converge, alors de même $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ converge.
D'où par conséquence, on a $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

(b) On a $I = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{1}{2}}(1+t)}dt$, en faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, de sort que $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, de plus lorsque $t\to 0$, $u\to 0$ et lorsque $t\to+\infty$, $u\to+\infty$. Alors par le théorème de changement de variable, on a

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi(1+u^2)}du = \lim_{A\to+\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{1}{1+u^2}du = \frac{2}{\pi}\lim_{A\to+\infty}[\arctan(u)]_0^A = \lim_{A\to+\infty}\frac{2}{\pi}\arctan(A) = 1$$

(c) On a la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive. D'après la question précédente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_0^{+\infty} g(t)dt = 0 + I = 1$$

Alors g est une densité de probabilité.

Dans tout la suite, X désigne la variable aléatoire admettant g pour densité.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$.
Si $x \leqslant 0$, on a $F_X(x) = 0$ car la fonction g est nulle sur l'intervalle $]-\infty, x]$.
Si $x > 0$, on a
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{\pi t^{\frac{1}{2}}(1+t)}dt.$$
Faisant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, de sort que $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, de plus lorsque $t \to 0$, $u \to 0$ et lorsque $t = x$, $u = \sqrt{x}$. Alors par le théorème de changement de variable, on a
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2}du \\ &= \frac{2}{\pi}[\arctan(t)]_0^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x}). \end{aligned}$$
D'où
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

3. Puisqu'on a X est une variable aléatoire à densité, alors $P(X < m) = P(X \leqslant m)$. On a
$$\begin{aligned} P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) &\iff P(X \leqslant m) = 1 - P(X < m) = 1 - P(X \leqslant m) \\ &\iff 2P(X \leqslant m) = 1 \\ &\iff F_X(m) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
et puisque F_X est nulle sur $]-\infty, 0]$, alors $F_X(m) = \frac{1}{2}$ implique que $m > 0$. Donc
$$\begin{aligned} F_X(m) = \frac{1}{2} &\iff \arctan(\sqrt{m}) = \frac{\pi}{4} \\ &\implies \sqrt{m} = 1 \\ &\implies m = 1 \end{aligned}$$
d'où le médiane de X est 1.

4. On commence par un programme qui affiche la fonction $F_X(x)$, seulement dans le cas de $x > 0$.
```
function y = F(x)
    y = 2/(%pi) * atan(sqrt(x));
endfunction
n = 0;
While F(n) < 1 - 10^(-6)
    n = n + 1;
end
disp(n)
```

Partie 2
Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. Soit $t \in]1, +\infty[$ et soit la fonction φ définie sur $]0, 2[$ par $\varphi(x) = t^{\frac{x}{2}} + t^{1-\frac{x}{2}}$.
   (a) On a
$$\varphi(x) = t^{\frac{x}{2}} + t^{1-\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}\ln t} + e^{\left(1-\frac{x}{2}\right)\ln t}$$

et puisque les deux fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{2}\ln t}$, $x \longmapsto e^{\left(1-\frac{x}{2}\right)\ln t}$ sont dérivables sur $]0,2[$ comme composé des fonctions dérivables. Alors φ ainsi dérivable et on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \left(e^{\frac{x}{2}\ln t} + e^{\left(1-\frac{x}{2}\right)\ln t}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\ln t e^{\frac{x}{2}\ln t} - \frac{1}{2}\ln t e^{\left(1-\frac{x}{2}\right)\ln t} \\ &= \frac{1}{2}\ln t\left(e^{\frac{x}{2}\ln t} - e^{\left(1-\frac{x}{2}\right)\ln t}\right) \\ &= \frac{\ln t}{2}\left(t^{\frac{x}{2}} - t^{1-\frac{x}{2}}\right).\end{aligned}$$

(b) On a $\forall x \in]0,2[$, $\varphi'(x) = \frac{\ln t}{2}\left(t^{\frac{x}{2}} - t^{1-\frac{x}{2}}\right) = \frac{\ln t}{2}t^{\frac{x}{2}}\left(1-t^{1-x}\right)$, et puisque $t>1$ alors le signe de $\varphi'(x)$ est le signe de $1-t^{1-x}$. Alors φ est strictement décroissante sur $]0,1[$ (car $\forall x \in]0,1[, 1-t^{1-x}<0$) et strictement croissante sur $]1,2[$ (car $\forall x \in]1,2[, 1-t^{1-x}>0$), de plus $\varphi(1) = 2\sqrt{t}$, $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 1+t$ et $\lim_{x\to 2}\varphi(x) = 1+t$.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t,t)dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$: On a $f(t,x) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}}$, et puisqu'on a l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}}dt$ converge si, et seulement si, $\frac{x}{2}+1>1$. On a

$$\frac{x}{2}+1>1 \iff x>0$$

alors $\int_1^{+\infty} f(t,t)dt$ converge si, et seulement si, $x>0$.
Au voisinage de 0 : $f(t,x) \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}}$, et puisqu'on a l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}}dt$ converge si, et seulement si, $\frac{x}{2}<1$, équivalent que $x<2$. Alors $\int_0^1 f(t,t)dt$ converge si, et seulement si, $x<2$.
Alors par conséquent on a, $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge si, et seulement si, $x \in]0,2[$.

3. (a) Soit $x \in]0,2[$, alors $2-x \in]0,2[$, donc $h(2-x)$ définie et on a

$$h(2-x) = \int_0^{+\infty} f(t,2-x)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{2-x}{2}}(1+t)}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}(1+t)}dt$$

faisant le changement de variable $u=\frac{1}{t}$, de sort que $du = -\frac{dt}{t^2}$, $u\to 0$ lorsque $t\to+\infty$ et $u\to+\infty$ lorsque $t\to 0$, de plus la fonction $t\longmapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, alors d'après le théorème de changement de variable, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}(1+t)}dt &= -\int_{+\infty}^0 \frac{u^{1-\frac{x}{2}}}{\left(1+\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u^2} \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{u^{-\frac{x}{2}}}{(u+1)}du \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{u^{\frac{x}{2}}(1+u)}du\end{aligned}$$

alors $h(2-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^{\frac{x}{2}}(1+u)}du = h(x)$.

(b) Soient x dans $]0,2[$ et $y\in\mathbb{R}$, On a le vecteur directeur de la droite $x=1$ est le vecteur $\vec{j}(0,1)$, il suffit de montrer que $\vec{j}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont orthogonaux puis le point milieu K de segment $[MM']$ il est dans la droite $x=1$. En effet :
On a $\overrightarrow{MM'}(2-2x,0)$, alors $\vec{j}\cdot\overrightarrow{MM'} =< (0,1),(2-2x,0) >= 0(2-2x)+0\times 1 = 0$, alors $\vec{j}\perp\overrightarrow{MM'}$.
On a $K(1,y)$ est dans la droite d'équation $x=1$.
D'où $M(x,y)$ et $M'(2-x,y)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x=1$.

(c) On a le demain de la définition $D_h =]0,2[$ de h est symétrique par rapport à 1. Soit $x\in]0,1[$,, d'après la question [3.a], on a

$$h(1-x) = h(2-(1-x)) = h(1+x)$$

d'où les résultats.

4. (a) Soit $x \in]0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
h(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} - \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}} \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \left(\frac{t-(1+t)}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} \right) dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} dt.
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \in]0,1]$, alors $\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}$, on a alors pour tout t dans $]0,1[$, $t^{\frac{x}{2}} \geqslant t^{\frac{1}{2}}$ et $1+t > 1$, donc $\forall t \in]0,1[$

$$0 \leqslant \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}(t+1)} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

on intégrer cet inégalité sur $]0,1[$, on alors

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}(t+1)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt.$$

(c) i. Soient $x \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$, on a $1+t \geqslant t$ donc $0 < \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{t}$ et puisque $\frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}} > 0$ alors

$$0 < \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1} t} = \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+2}}.$$

ii. Il suffit d'intégrer l'inégalité de la question précédente sur l'intervalle $[1,+\infty[$. On trouve

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+2}} dt.$$

et on a $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{1}{t^{\frac{x}{2}}} \leqslant 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+2}} dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. D'où pour tout x dans $]0,1]$, on a

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} dt \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$

(d) Soit $x \in]0,1]$, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{x}{2}+1}} = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{2}{x} \frac{1}{t^{\frac{x}{2}}} \right]_1^A = \frac{2}{x}$$

alors d'après la question [4.a], on a

$$\begin{aligned}
\left| h(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}} \right| &= \left| h(x) - \frac{2}{\pi x} \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} dt \right| \\
&\leqslant \left| \int_0^1 \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt \right| + \left| \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}+1}(1+t)} dt \right| \quad (\text{ inégalité triangulaire}) \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{dt}{\pi \sqrt{t}} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \quad (\text{les questions } [4.b], [4.c.ii]) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[2\sqrt{t} \right]_0^1 + \frac{1}{\pi} \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^A \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \\
&= \frac{3}{\pi}.
\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in]0,1]$, $\left| h(x) - \frac{2}{\pi x} \right| \leqslant \frac{3}{\pi}$.

(e) D'après la question précédente on a $\forall x \in]0,1]$, $\left|\frac{\pi x h(x)}{2} - 1\right| \leqslant \frac{3x}{2}$. Alors

$$\lim_{x\to 0^+} \left|\frac{\pi x h(x)}{2} - 1\right| \leqslant \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{2} = 0$$

Alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi x h(x)}{2} = 1$, c'est à dire que $h(x)$ est équivalent à $\frac{2}{\pi x}$ à droite de 0.

(f) Puisqu'on a $h(x)$ est équivalent à $\frac{2}{\pi x}$ à droite de 0, alors

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\pi x} = +\infty.$$

5. Soit $x \in]0,2[$. On a

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt = \int_0^{1} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt$$

en faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, de sort que $dt = -\frac{du}{u^2}$, $u = 1$ lorsque $t = 1$ et $u \to +\infty$ lorsque $t \to 0$, et puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]0,1[$, alors par le théorème de changement de variable on a

$$\begin{aligned}\int_0^{1} \frac{1}{\pi t^{\frac{x}{2}}(1+t)} dt &= \int_{+\infty}^{1} \frac{u^{\frac{x}{2}}}{\pi(1+\frac{1}{u})} \frac{-du}{u^2} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{x}{2}}}{\pi u(u+1)} du\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}h(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{x}{2}}}{\pi u(u+1)} du + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi u^{\frac{x}{2}}(u+1)} du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{x}{2}}}{\pi u(u+1)} du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{1-\frac{x}{2}}}{\pi u(u+1)} du \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\frac{x}{2}} + u^{1-\frac{x}{2}}}{\pi u(u+1)} du.\end{aligned}$$

6. On a d'après la question précédente, pour tout x dans $]0,2[$, $h(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\pi t(t+1)} dt$ où $\varphi(x) = t^{\frac{x}{2}} + t^{1-\frac{x}{2}}$ (la fonction définie dans la question [1]), puisque $\forall t \in]1,+\infty[$, $\frac{1}{\pi t(t+1)} > 0$ alors h et φ ont même croissance, et d'après la question [1.b] on a alors que h est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,2[$.
D'après les questions [1.b] de la partie 1 et [3.a], [4.f] de la partie 2, on a

$$h(1) = I = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} h(2-x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty.$$

PROBLEME 3

Soit a un nombre réel et soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ e^{-(t-a)} & \text{si } t \geqslant a \end{cases}.$$

Partie 1

Étude de quelques variables aléatoires

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a la fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$, et on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)dt &= \int_{-\infty}^{a} f_a(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f_a(t)dt \\ &= 0 + \int_{a}^{+\infty} e^{-(t-a)}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-(t-a)}\right]_a^A \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-(A-a)}+1\right] \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où f_a est bien une densité de probabilité.

2.
$$\begin{aligned}E(X_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf_a(t)dt = 0 + \int_{a}^{+\infty} tf_a(t)dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\int_a^A te^{-(t-a)}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[-te^{-(t-a)}\right]_a^A + \int_a^A e^{-(t-a)}dt \quad (\text{ intégration par partie }) \\ &= a + \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-(t-a)}\right]_a^A \\ &= a+1\end{aligned}$$

Alors $E(X_a) = a + 1$.

On a par la formule de huygens, $V(X_a) = X(X_a^2) - E(X_a)^2 = X(X_a^2) - (a+1)^2$. Calculons $X(X_a^2)$, on a

$$\begin{aligned}E(X_a^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f_a(t)dt = 0 + \int_{a}^{+\infty} t^2f_a(t)dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\int_a^A t^2e^{-(t-a)}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[-t^2e^{-(t-a)}\right]_a^A + \int_a^A 2e^{-(t-a)}dt \quad (\text{ intégration par partie }) \\ &= a^2 + 2\int_a^{+\infty} 2e^{-(t-a)}dt \\ &= a^2 + 2E(X_a) \\ &= a^2 + 2(a+1).\end{aligned}$$

Alors

$$V(X_a) = a^2 + 2(a+1) - (a^2 + 2a + 1) = 1.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}F_{X_a}(x) = P(X_a \leqslant x) &= \int_{-\infty}^{x} f_a(t)dt \\ &= \begin{cases}0 & \text{si } x < a \\ \int_a^x e^{-(t-a)}dt & \text{si } x \geqslant a\end{cases} \\ &= \begin{cases}0 & \text{si } x < a \\ \left[-e^{-(t-a)}\right]_a^x & \text{si } x \geqslant a\end{cases} \\ &= \begin{cases}0 & \text{si } x < a \\ 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x \geqslant a\end{cases}\end{aligned}$$

Alors
$$F_{X_a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - e^{-(x-a)} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}.$$

4. On a
$$P(X_a \leqslant m) = P(X_a \geqslant m) \iff P(X_a \leqslant m) = 1 - P(X_a < m)$$
et puisqu'on a X_a est une v.a à densité on a $P(X_a < m) = P(X_a \leqslant m)$, alors
$$\begin{aligned} P(X_a \leqslant m) = P(X_a \geqslant m) &\iff P(X_a \leqslant m) = 1 - P(X_a \leqslant m) \\ &\iff P(X_a \leqslant m) = \frac{1}{2} \\ &\iff 1 - e^{-(m-a)} = \frac{1}{2} \\ &\iff m = \ln 2 + a. \end{aligned}$$

5. On pose pour tout réel a, la variable aléatoire Y_a définie par $Y_a = X_a - a$.
   (a)
$$\begin{aligned} F_{Y_a}(y) &= P(Y_a \leqslant y) = P(X_a \leqslant y + a) \\ &= F_{X_a}(y+a) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}. \end{aligned}$$
   (b) On a par la linéarité de l'espérance
$$E(Y_a) = E(X_a) - a = a + 1 - a = 1.$$
   et on a
$$V(Y_a) = V(X_a) = 1.$$

6. (a) D'après la linéarité de l'espérance, et puisque les variables aléatoires $X'_1, \dots, X'_n$ sont de même loi que X_a, on a
$$E(S_n) = E(X'_1) + \cdots + E(X'_n) = nE(X_a) = n(a+1).$$
   On a $X'_1, \dots, X'_n$ sont mutuellement indépendants, alors
$$V(S_n) = V(X'_1) + \cdots + V(X'_n) = nV(X_a) = n.$$
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= P(T_n \leqslant x) = 1 - P(T_n > x) \\ &= 1 - P(\min(X'_1, \dots, X'_n) > x) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X'_i > x]\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) \quad \text{car } X'_1, \dots, X'_n \text{ sont mutuellement indépendants} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(X_a \leqslant x)) \\ &= 1 - (1 - F_{X_a}(x))^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - \left(e^{-(x-a)}\right)^n & \text{si } x \geqslant a \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 - e^{-n(x-a)} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}. \end{aligned}$$

(c)

$$g_{n,a}(x) = F'_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ ne^{-n(x-a)} & \text{si } x \geqslant a \end{cases}.$$

(d)

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t g_{n,a}(t)dt = 0 + \int_a^{+\infty} t g_{n,a}(t)dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \int_a^A tne^{-n(t-a)}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[-te^{-n(t-a)}\right]_a^A + \int_a^A e^{-n(t-a)}dt \quad (\text{ intégration par partie }) \\ &= a + \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{n}e^{-n(t-a)}\right]_a^A \\ &= a + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Alors $E(X_a) = a + \frac{1}{n}$.

On a par la formule de huygens, $V(T_n) = X(T_n^2) - E(T_n)^2 = X(T_n^2) - (a+1)^2$. Calculons $X(T_n^2)$, on a

$$\begin{aligned} E(T_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g_{n,a}(t)dt = 0 + \int_a^{+\infty} t^2 g_{n,a}(t)dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \int_a^A t^2 ne^{-n(t-a)}dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[-t^2e^{-n(t-a)}\right]_a^A + \int_a^A 2te^{-n(t-a)}dt \quad (\text{ intégration par partie }) \\ &= a^2 + 2\int_a^{+\infty} te^{-n(t-a)}dt \\ &= a^2 + \frac{2}{n}E(X_a) \\ &= a^2 + \frac{2}{n}(a + \frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Alors

$$V(T_n) = a^2 + \frac{2}{n}(a + \frac{1}{n}) - (a^2 + 2a\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2}.$$

<u>Autre méthode</u> : On remarque que $T_n + a$ suit une loi exponentielle de paramètre n, alors $E(T_n - a) = \frac{1}{n}$, implique que $E(T_n) = \frac{1}{n} + a$, et $V(T_n - a) = V(T_n) = \frac{1}{n^2}$.

7. function $Z = simulation(m, n, a)$

   $U = rand(m, n)\,;$

   $Z = exp(1 - U) + a\,;$

   endfunction

<u>Partie 2</u>
Exemples d'estimations

On considère pour tout entier naturel non nul n, la variable aléatoire $U_n = \frac{S_n}{n} - T_n$.

1. (a) Comme T_n est une estimateur de a, alors on a

$$b(T_n) = E(T_n) - a = a + \frac{1}{n} - a = \frac{1}{n}$$

(b) On a d'après la question [6.d] de la première partie $V(T_n) = \frac{1}{n^2}$, alors

$$\begin{aligned} r(T_n) &= b(T_n)^2 + V(T_n) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \quad \text{(par la question précédente)} \\ &= \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

(c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} b(T_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs de a asymptotiquement sans biais.

De plus on a $\lim\limits_{n\to+\infty} r(T_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0$, alors $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs de a convergente.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par la linéarité de l'espérance on a

$$\begin{aligned} E(U_n) = E\left(\frac{S_n}{n} - T_n\right) &= \frac{1}{n}E(S_n) - E(T_n) \\ &= \frac{1}{n}(n(a+1)) - \left(\frac{1}{n} + a\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(b) Puisque U_n considère comme estimateur de 1, alors

$$\begin{aligned} b(U_n) &= E(U_n) - 1 = 1 - \frac{1}{n} - 1 \\ &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} r(U_n) &= b(U_n)^2 + V(U_n) \\ &= \frac{1}{n^2} + V\left(\frac{S_n}{n} - T_n\right) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}V(S_n) + V(T_n) - \frac{2}{n}Cov(S_n, T_n) \end{aligned}$$

et d'après les questions [6.a] et [6.b] de la partie 1, on a $V(S_n) = n$ et $V(T_n) = \frac{1}{n^2}$, alors

$$\begin{aligned} r(U_n) &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}Cov(S_n, T_n) \\ &= \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}Cov(S_n, T_n). \end{aligned}$$

(d) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$Cov(S_n, T_n) \leqslant \sqrt{V(S_n)}\sqrt{V(T_n)} = \sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et puisque $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ lorsque n tendre vers $+\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} Cov(S_n, T_n) = 0.$$

(e) D'après les questions [2.c] et [2.d], on a

$$\lim_{n\to+\infty} b(U_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

alors $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs de 1 asymptotiquement sans biais.

De plus on a

$$\lim_{n\to+\infty} r(r_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}Cov(S_n, T_n) = 0$$

alors $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs de 1 convergente.

Par conséquent $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'estimateurs de 1 asymptotiquement sans biais et convergente.