

CNAEM 2019, corrigé

Exercice 1

1^{ère} Partie

Puissance de la matrice A

$$1. \text{ a) } PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1-1+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 1-1+0 & 0+1-1 & 0+0+1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

b) On a constaté que $PQ = I_3$, ce qui suffit à démontrer que P est inversible, d'inverse $Q : P^{-1} = Q$

$$\text{c) } AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -2+1+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -2-1+2 & 0-1+2 & 0+0+2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -1+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ -1+0+0 & 0+1+0 & 0+0+2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc, $AP = PD$

d) On a constaté que $AP = PD$, alors $A = PDP^{-1}$

P est une matrice inversible.

D est une matrice diagonale. $AP = PD \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$

Donc, A est une matrice diagonalisable.

2. Soient les vecteurs suivants $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$Au = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+0 \\ -2+1+0 \\ -2-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1u$$

u est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre -1

$$Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+1+0 \\ 0-1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1v$$

v est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 1

$$Aw = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+0+0 \\ 0+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2w$$

w est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2

3. a) On procède par récurrence sur n
Notons P_n la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$

$$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I \text{ et } A^0 = I \text{ donc, } P_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \geq 0$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PD^nP^{-1}$ donc en multipliant à gauche par A , il vient $AA^n = APD^nP^{-1}$.

Or, $AP = PD$ d'où $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$, à savoir $\forall n \geq 0 \quad A^n = PD^nP^{-1}$

b) D est diagonale donc, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

c) $\forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n + 0 + 0 & 0 & 0 \\ 0 - 1 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 \\ 0 & -1 + 0 & 0 + 2^n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 0 + 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 + 0 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 + 0 & 1 - (2^n) & 2^n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 - (2^n) & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. la suite $(U_n)_{n \geq 0} : U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$

- a) On procède par récurrence sur n

Notons P_n la proposition : « $U_n = A^n U_0$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$

$$U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^0 U_0 = I \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc, } P_0 \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \geq 0$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $U_n = A^n U_0$ donc en multipliant à gauche par A , il vient $AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$

Or, $AU_n = U_{n+1}$ d'où $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$, à savoir $\forall n \geq 0 \quad U_n = A^n U_0$

b) On a constaté que $\forall n \geq 0 \quad U_n = A^n U_0$

$$U_n = A^n U_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 - (2^n) & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^n \\ -((-1)^n - 1) + 1 \\ -((-1)^n - 1) + 1 - (2^n) + (2^n) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^n \\ 2 - (-1)^n \\ 2 - (-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\forall n \geq 0 \quad \begin{cases} a_n = -(-1)^n \\ b_n = 2 - (-1)^n \\ c_n = 2 - (-1)^n \end{cases}$$

c) Programme Scilab

```
n = input("Entrez la valeur de n : ")
A = [-1, 0, 0; -2, 1, 0; -2, -1, 2]
U = [-1; 1; 1]
for i = 1:n
    U = A * U
end
Disp(U)
```

2^{ème} Partie

Résolution de l'équation $M^3 = A$

1. Soit M une matrice carrée d'ordre trois, on pose $N = P^{-1}MP$

$$NNN = P^{-1}MP P^{-1}MP P^{-1}MP$$

$$\Leftrightarrow N^3 = P^{-1}MMMP$$

$$\Leftrightarrow D = P^{-1}M^3P$$

$$\Leftrightarrow PD P^{-1} = M^3$$

$$\Leftrightarrow A = M^3$$

Donc, $M^3 = A$ si, et seulement si, $N^3 = D$

2. Soit $ND = DN$

$$ND = NN^3 = N^4 = N^3N = DN$$

$$\text{Donc, } N^3 = D \text{ si } ND = DN$$

3. On sait que la matrice D est une matrice diagonale. Or, un produit de matrices diagonales reste une matrice diagonale. Et puisque $N^3 = NNN = D$ donne une matrice D diagonale. Donc, la matrice N est une matrice diagonale.

4. Les matrices N et D commutent et ce sont deux matrices diagonales.

$$N^3 = D \Leftrightarrow (N^3)^{\frac{1}{3}} = (D)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow N = (D)^{\frac{1}{3}}$$

5. Soit M_3 , On pose $N = P^{-1}MP$ avec $N = (D)^{\frac{1}{3}}$

$$N = P^{-1}MP \Leftrightarrow PN P^{-1} = M$$

$$\Leftrightarrow P(D)^{\frac{1}{3}} P^{-1} = M$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2^{\frac{1}{3}} & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{1}{3}} - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^{\frac{1}{3}} - 1 & 1 - 2^{\frac{1}{3}} & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } \forall x \geq 1, \int_1^x e^{-(t-1)} dt &= -\int_1^x -(t-1)' e^{-(t-1)} dt \\ &= -[e^{-(t-1)}]_1^x \\ &= -(e^{1-x} - e^{1-1}) \\ &= 1 - e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_1^{+\infty} e^{-(t-1)} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x e^{-(t-1)} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{1-x} = 1 \end{aligned}$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$; On pose $X = (1-x)$ donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^X = 0$

2. Densité de probabilité

- $t \rightarrow e^{-(t-1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $t \rightarrow 0$ est continue sur $]-\infty, 1[$, donc f est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en 1. De plus, f admet clairement des limites finies en 1^+ et 1^- donc f est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- Sur $]-\infty, 1[$, f est nulle donc positive. Si $t \geq 1$, $f(t) \geq 0$ car e^t est toujours positive. Donc f est bien positive sur \mathbb{R} .
- Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. Puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a $\int_{-\infty}^1 f(t) dt = 0$ et donc sous réserve d'existence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt$. D'après la question précédente $\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)} dt = 1$. Ce qui prouve que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge et que $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$.

En conclusion, f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3. Fonction de répartition F_X de X

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- Si $x < 1$ alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, 1[$ donc $F_X(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$
- Si $x \geq 1$ et en utilisant la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x e^{-(t-1)} dt \\ &= \int_1^x e^{-(t-1)} dt \\ &= -[e^{-(t-1)}]_1^x \\ &= 1 - e^{1-x} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est bien donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{1-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

4. Sous réserve d'existence, et puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_1^{+\infty} tf(t) dt$$

Soit $A \geq 1$, on pose $I_A = \int_1^A tf(t) dt = \int_1^A t e^{-(t-1)} dt$. On procède par I.P.P

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-(t-1)} \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-(t-1)} \end{cases}$$

$$\int_0^A t e^{-(t-1)} dt = [-te^{-(t-1)}]_1^A + \int_1^A e^{-(t-1)} dt \\ = -Ae^{-(A-1)} + 1 + \int_1^A e^{-(t-1)} dt$$

$$E(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A tf(t) dt \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-Ae^{-(A-1)} + 1 + \int_1^A e^{-(t-1)} dt) \\ = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\text{Car, } \lim_{A \rightarrow +\infty} -Ae^{-(A-1)} = 0 \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A e^{-(t-1)} dt = 1$$

5. a) Sous réserve d'existence, et puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_1^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

Soit $A \geq 1$, on pose $J_A = \int_1^A t^2 f(t) dt = \int_1^A t^2 e^{-(t-1)} dt$. On procède par I.P.P

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = e^{-(t-1)} \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = -e^{-(t-1)} \end{cases}$$

$$\int_0^A t^2 e^{-(t-1)} dt = [-t^2 e^{-(t-1)}]_1^A + 2 \int_1^A t e^{-(t-1)} dt \\ = -A^2 e^{-(A-1)} + 1 + 2 \int_1^A t e^{-(t-1)} dt$$

$$E(X^2) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A t^2 f(t) dt \\ = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-A^2 e^{-(A-1)} + 1 + 2 \int_1^A t e^{-(t-1)} dt) \\ = 1 + 2E(X)$$

$$\text{Car, } \lim_{A \rightarrow +\infty} -A^2 e^{-(A-1)} = 0$$

$$\text{b) } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \\ = 1 + 2E(X) - E(X)^2 \\ = 1 + 2 \times 2 - 2^2 = 1$$

6. Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - 1$

$$\text{a) } E(Y) = E(X - 1) = E(X) - 1 \\ = 2 - 1 = 1$$

$$\text{b) } V(Y) = V(X - 1) = V(X) \\ = 1$$

c) Fonction de répartition F_Y de Y

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - 1 \leq x) \\ = P(X \leq x + 1) \\ = F_X(x + 1)$$

Ainsi, la fonction de répartition F_Y de Y est bien donnée par :

$$F_Y(x) = F_X(x+1) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

7. $\forall n \geq 1 \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

a) Densité de probabilité

- $t \rightarrow e^{-(t-\frac{1}{n})}$ est continue sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$ et $t \rightarrow 0$ est continue sur $] -\infty, \frac{1}{n}]$, donc f est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en $\frac{1}{n}$. De plus, f admet clairement des limites finies en 1^+ et 1^- donc f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R} .
- Sur $] -\infty, \frac{1}{n}]$, f_n est nulle donc positive. Si $t \geq \frac{1}{n}$, $f_n(t) \geq 0$ car e^t est toujours positive. Donc f_n est bien positive sur \mathbb{R} .
- Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1$. Puisque f_n est nulle sur $] -\infty, \frac{1}{n}]$, on a $\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} f_n(t) dt = 0$ et donc sous réserve d'existence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t) dt$.

Soit $A \geq \frac{1}{n}$, on pose $K_A = \int_{\frac{1}{n}}^A f_n(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^A f_n(t) dt &= \int_{\frac{1}{n}}^A e^{-(t-\frac{1}{n})} dt \\ &= -\left[e^{-(t-\frac{1}{n})} \right]_{\frac{1}{n}}^A \\ &= 1 - e^{-(A-\frac{1}{n})} \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} 1 - e^{-(A-\frac{1}{n})} = 1 \quad \text{Car, } \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-(A-\frac{1}{n})} = 0$$

Ce qui prouve que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et que

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1.$$

En conclusion, f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

b) i) Fonction de répartition F_{X_n} de X_n .

- Si $x < \frac{1}{n}$ alors $] -\infty, x] \subset] -\infty, \frac{1}{n}[$ donc $F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$
- Si $x \geq \frac{1}{n}$ et en utilisant la relation de Chasles.

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} 0 dt + \int_{\frac{1}{n}}^x e^{-(t-\frac{1}{n})} dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^x e^{-(t-\frac{1}{n})} dt \\ &= -\left[e^{-(t-\frac{1}{n})} \right]_{\frac{1}{n}}^x \\ &= 1 - e^{-(x-\frac{1}{n})} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est bien donnée par :

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 - e^{-(x-\frac{1}{n})} & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

ii) Fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n .

$$\begin{aligned} F_{Y_n} &= P(Y_n \leq x) = P\left(X_n - \frac{1}{n} \leq x\right) \\ &= P\left(X_n \leq x + \frac{1}{n}\right) \\ &= F_{X_n}\left(x + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est bien donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

c) Sous réserve d'existence, et puisque f_n est nulle sur $]-\infty, \frac{1}{n}[$, on a :

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} t f_n(t) dt$$

Soit $A \geq 1$, on pose $I_A = \int_{\frac{1}{n}}^A t f_n(t) dt = \int_{\frac{1}{n}}^A t e^{-(t-\frac{1}{n})} dt$. On procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-(t-\frac{1}{n})} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-(t-\frac{1}{n})} \end{cases}$

$$\int_{\frac{1}{n}}^A t e^{-(t-\frac{1}{n})} dt = \left[-te^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^A + \int_{\frac{1}{n}}^A e^{-(t-\frac{1}{n})} dt$$

$$= -Ae^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} + \left[-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^A$$

$$= -Ae^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} - e^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n}$$

$$E(X_n) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^A t f_n(t) dt$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} -Ae^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} - e^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2}{n}$$

d) $E(Y_n) = E\left(X_n - \frac{1}{n}\right) = E(X_n) - \frac{1}{n}$

$$= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

e) $P\left(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}\right) = F_{X_n}\left(\frac{3}{n}\right) - F_{X_n}\left(\frac{2}{n}\right)$

$$= 1 - e^{-\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n}\right)} - \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$= -e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} + e^{-\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\left(\frac{2}{n}\right)}$$

f) Calcul avec Scilab

n=1

P=exp(-(1/n))-exp(-(2/n))

While P>=10^(-5)

P=exp(-(1/n))-exp(-(2/n))

n=n+1

end

disp(n)

Exercice 3

1. a) Le dé est cubique donc $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. De plus, le dé est équilibré donc chaque face a la même probabilité d'apparaître : $\forall k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, P(X = k) = \frac{1}{6}$

Donc, X suit la loi uniforme de paramètre 6.

$$b) E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{35}{12}$$

2. a) Pour $k = 1$, on lance la pièce de monnaie une seule fois. L'événement $(Y = 0)$ se produit lorsqu'on obtient pile lors de l'unique lancer effectué. Donc $P_{(X=1)}(Y = 0) = \frac{1}{3}$.

- b) Pour $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, on lance la pièce de monnaie deux fois. L'événement $(Y = 0)$ se produit lorsqu'on obtient pile lors des deux lancers effectués. Donc, $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}, P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

- c) $(X = 1)$ et $X \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale :

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(\{Y = 0\} \cap \{X = 1\}) + \sum_{k=2}^6 P(\{Y = 0\} \cap \{X = k\}) \\ &= P_{(X=1)}(Y = 0)P(X = 1) + \sum_{k=2}^6 P_{(X=k)}(Y = 0)P(X = k) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \sum_{k=2}^6 \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + (6 - 2 + 1) \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

3. L'événement $(Y = 2)$ se produit lorsqu'on obtient deux faces lors des deux lancers effectués. Or, pour lancer la pièce de monnaie deux fois il faut que $X \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ et $(X = 1)$ forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale :

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(\{Y = 2\} \cap \{X = 1\}) + \sum_{k=2}^6 P(\{Y = 2\} \cap \{X = k\}) \\ &= 0 + \sum_{k=2}^6 P_{(X=k)}(Y = 2)P(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^6 \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= (6 - 2 + 1) \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{27} \end{aligned}$$

4. L'événement $(Y = 1)$ se produit lorsqu'on obtient face. Ainsi que la somme des probabilités de $(Y = 0)$, $(Y = 1)$ et $(Y = 2)$ est égale à 1. Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 P(Y = k) &= 1 \Leftrightarrow P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 1 \\ &\Leftrightarrow P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 2) \\ &\Leftrightarrow P(Y = 1) = 1 - \frac{4}{27} - \frac{10}{27} \\ &\Leftrightarrow P(Y = 1) = \frac{13}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. E(Y) &= 0 \times \frac{4}{27} + 1 \times \frac{13}{27} + 2 \times \frac{10}{27} \\ &= 0 + \frac{13}{27} + \frac{20}{27} = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 0^2 \times \frac{4}{27} + 1^2 \times \frac{13}{27} + 2^2 \times \frac{10}{27} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 \\ &= \frac{53}{27} - \frac{121}{81} = \frac{38}{81} \end{aligned}$$

6. a) La loi du couple (X, Y)

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6	Y
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{27}$
1	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{13}{27}$
2	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{10}{27}$
X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Exemple de calcul : $P(\{Y = 0\} \cap \{X = 1\}) = P(\{X = 1\})P_{(X=1)}(\{Y = 0\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

b) D'après le tableau de la loi du couple (X, Y)

$$P(\{Y = 2\} \cap \{X = 1\}) = 0 \quad \text{et} \quad P(\{Y = 2\}) \times P(\{X = 1\}) = \frac{10}{27} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{81}$$

$$\text{Donc, } P(\{Y = 2\} \cap \{X = 1\}) \neq P(\{Y = 2\}) \times P(\{X = 1\})$$

Donc, X et Y ne sont pas indépendantes.

c) La covariance $Cov(X, Y)$ de X et Y .

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^6 ij \times P(\{Y = i\} \cap \{X = j\})$$

$$= \frac{2}{18} + \frac{4}{27} + \frac{6}{27} + \frac{8}{27} + \frac{10}{27} + \frac{12}{27} + 4 \times \frac{2}{27} + 6 \times \frac{2}{27} + 8 \times \frac{2}{27} + 10 \times \frac{2}{27} + 12 \times \frac{2}{27}$$

$$= \frac{41}{9}$$

$$Cov(X, Y) = \frac{41}{9} - \frac{7}{2} \times \frac{11}{9} = \frac{5}{18}$$

d) Le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\frac{5}{18}}{\sqrt{\frac{35}{12} \times \frac{38}{81}}} = 0,237$$

Exercice 4

1. M_1 et M_2 forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale :

$$P(C) = P(M_1)P_{M_1}(C) + P(M_2)P_{M_2}(C)$$

$$= 0,99a + 0,96(1 - a)$$

$$= 0,99a + 0,96 - 0,96a$$

$$= 0,03a + 0,96$$

2. On sait que $P(C) = P(M_1)P_{M_1}(C) + P(M_2)P_{M_2}(C)$

Et d'après la question précédente on a trouvé que

$$P(C) = 0,03a + 0,96 \Leftrightarrow 0,97 = 0,03a + 0,96$$

$$\Leftrightarrow 0,97 - 0,96 = 0,03a$$

$$\Leftrightarrow 0,01 = 0,03a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc, } P_{M_1}(C) = \frac{1}{3} \text{ et } P_{M_2}(C) = \frac{2}{3}$$

3. a) X compte le nombre de réalisation de l'événement « succès obtenir un crayon commercialisé » de probabilité 0,97 lors de 10 prélèvements identiques et indépendants d'un crayon. Donc, suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,97$. Par suite :

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 10 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{10}{k} (0,97)^k (0,03)^{10-k}$$

b) $P(X = 10) = \binom{10}{10} (0,97)^{10} (0,03)^{10-10} = 1 \times (0,97)^{10} \times 1 = (0,97)^{10}$

- c) Il s'agit de calculer la probabilité $P(X \geq 9)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{9} (0,97)^9 (0,03)^{10-9} + (0,97)^{10} \\ &= 10 \times 0,76 \times 0,03 + (0,97)^{10} \\ &= 0,228 + 0,737 = 0,965 \end{aligned}$$

- d) Calcul avec Scilab

```
n=input('Entrez la valeur de n(entier) :')
M=grand(1,n,'bin',10,0.97)
Disp(M)
```

4. a) On a $P(M_1) = a$ $P(M_2) = 1 - a - b$ $P(M_3) = b$
 $P(C) = P(M_1)P_{M_1}(C) + P(M_2)P_{M_2}(C) + P(M_3)P_{M_3}(C)$

$$\Leftrightarrow 0,99 = 0,99a + 0,96(1 - a - b) + P_{M_3}(C)b$$

$$\Leftrightarrow 0,99 = 0,99a + 0,96 - 0,96a - 0,96b + P_{M_3}(C)b$$

$$\Leftrightarrow P_{M_3}(C)b = 0,99 - 0,96 - 0,99a + 0,96a + 0,96b$$

$$\Leftrightarrow P_{M_3}(C) = \frac{0,03 - 0,03a + 0,96b}{b}$$

b) $P_{M_3}(C) \geq 0,999 \Leftrightarrow \frac{0,03 - 0,03a + 0,96b}{b} \geq 0,999$

$$\Leftrightarrow 0,03 - 0,03a + 0,96b \geq 0,999b$$

$$\Leftrightarrow 0,03 - 0,03a + 0,96b - 0,999b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0,03 \geq 0,03a + 0,039b > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq a + \frac{0,039}{0,03}b > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq a + \frac{39}{30}b > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{13}{10}b + a \leq 1$$

- c) i) Y est le temps d'attente du premier succès « obtenir un crayon non commercialisable » de Probabilité 0,001 lors de tirages identiques et indépendants d'un crayon. Donc, Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,001$.

ii) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y = k) = 0,001(0,999)^{k-1}$

- iii) D'après le cours,

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,001} = 1000 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0,001}{(0,001)^2} = 999000$$

- iv) Calcul avec Scilab

```
m=input('Entrez la valeur de m(entier) :')
M=grand(m,1,'geom',10,0.97)
Disp(M)
```

-FIN DU CORRIGÉ-