Concours CNAEM 2018 - Correction

PROBLEME 1

Partie 1
Calcul de la puissance de la matrice A

1. (a) Soit $X=(x,y,z)\in F_1$, on a alors

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z)=12(x,y,z) &\iff AX=12X\\
&\iff \begin{cases} 6x+4y+2z=12x\\ 3x+5y+4z=12y\\ 3x+3y+6z=12z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -6x+4y+2z=0\\ 3x-7y+4z=0\\ 3x+3y-6z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -3x+2y+z=0\\ -5y+5z=0\\ 5y-5z=0\end{cases} \quad , \quad L_1\leftarrow \frac{L_1}{2}, L_2\leftarrow L_1+L_2, \quad L_3\leftarrow L_1+L_3\\
&\iff \begin{cases} -3x+2y+z=0\\ -5y+5z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} -3x+2y+z=0\\ y=z\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=y\\ y=z\end{cases}
\end{aligned}
$$

Alors $X=(x,x,x)=x(1,1,1)$ où $x\in\mathbb{R}$, donc $F_1=Vect\{(1,1,1)\}$, d'où $u=(1,\alpha_1,\alpha_2)=(1,1,1)$.

Soit $X=(x,y,z)\in F_2$, on a alors

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z)=2(x,y,z) &\iff AX=2X\\
&\iff \begin{cases} 6x+4y+2z=2x\\ 3x+5y+4z=2y\\ 3x+3y+6z=2z\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 4y + 2z = 0 \\ 5x + 5y = 0 \end{cases} \quad , \quad L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 4y + 2z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases} .$$

Alors $X = x(1, -1, 0)$ où $x \in \mathbb{R}$, donc $F_2 = Vect\{(1, -1, 0)\}$, d'où $v = (1, \beta_1, \beta_2) = (1, -1, 0)$.

Soit $X = (x, y, z) \in F_3$, alors

$$f(x, y, z) = 3(x, y, z) \iff AX = 3X$$

$$\iff \begin{cases} 6x + 4y + 2z = 3x \\ 3x + 5y + 4z = 3y \\ 3x + 3y + 6z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad , \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2, \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\iff \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0 \\ z = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -2y \\ z = y \end{cases} .$$

Alors $X = y(-2, 1, 1)$, où $y \in \mathbb{R}$, donc $F_3 = Vect\{(-2, 1, 1)\}$, d'où $w = (\gamma_1, 1, \gamma_2) = (-2, 1, 1)$.

(b) On a $Card(B') = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, alors il suffit de montrer que B' est libre. En effet, soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ tel que $xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors

$$xu + yv + zw = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

D'où B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) D'après la question précédente, on a la famille $B' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée des vecteurs propres de f, alors f est diagonalisable.

(b) On a par la question [1.a], $\begin{cases} u = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3 \\ v = (1,-1,0) = e_1 - e_2 \\ w = (-2,1,1) = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$, alors

$$P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^3 = P^2 P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

D'où $P^3 - P^2 + 3I = 0$.

(d) On a d'après la question [2.c],

$$P^3 - P^2 + 3I = 0 \iff P(P^2 - P) = -3I \iff P\left(\frac{-1}{3}(P^2 - P)\right) = I$$

D'où P est inversible d'inverse

$$P^{-1} = \frac{-1}{3}(P^2 - P) = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. (a) D'après la question [2.a], f est diagonalisable et la base B' formée des vecteurs propres de f, alors par la formule de changement de base, on a

$$A = Mat_B(f) = P_{BB'} Mat_{B'}(f) P_{B'B} = P Mat_{B'}(f) P^{-1} \iff Mat_{B'}(f) = P^{-1}AP$$

et puisque $Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Montrons par récurrence que P_n :"$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PDP^{-1}$".
Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3 = PP^{-1} = PI_3P^{-1} = PD^0P^{-1}$, d'où P_0 est vrai, d'après la question précédente, on a ainsi P_1 est vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n est vrai et montrons que P_{n+1} est vrai. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} \quad (\text{ par l'hypothèse de récurrence puis le cas de } n = 1) \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

d'où par le principe de récurrence on a $\forall n\mathbb{N}$, $A^n = PDP^{-1}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-n}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12^n + 2\times 3^n & 12^n - 3\times 2^n + 2\times 3^n & 12^n + 3\times 2^n - 4\times 3^n \\ 12^n - 3^n & 12^n + 3\times 2^n - 3^n & 12^n - 3\times 2^n + 2\times 3^n \\ 12^n - 3^n & 12^n - 3^n & 12^n + 3\times 2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie 2
Application en probabilité

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a la famille (A_n, B_n, C_n) formée un système complet d'événement, et par la formule de probabilité totale, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P\left(A_{n+1} \bigcup A_n\right) + P\left(A_{n+1} \bigcup B_n\right) + P\left(A_{n+1} \bigcup C_n\right) \\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{1}{6}P(C_n) \\ &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. De même que la question précédente, on a

$$\begin{aligned} b_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P\left(B_{n+1} \bigcup A_n\right) + P\left(B_{n+1} \bigcup B_n\right) + P\left(B_{n+1} \bigcup C_n\right) \\ &= P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{5}{12}P(B_n) + \frac{1}{3}P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{5}{12}b_n + \frac{1}{3}c_n. \end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a de même

$$\begin{aligned} c_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P\left(C_{n+1} \bigcup A_n\right) + P\left(C_{n+1} \bigcup B_n\right) + P\left(C_{n+1} \bigcup C_n\right) \\ &= P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{1}{4}P(B_n) + \frac{1}{2}P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n. \end{aligned}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, On a d'après la question [1],

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{5}{12}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12} A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Alors $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \alpha A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où $\alpha = \frac{1}{12}$.

(b) A =[6,4,2 ;3,5,4 ;3,3,6] ;

U =[1/6 ;1/3 ;1/2] ; // le vecteur initial $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$

for i=1 :20

$U = 1/12 * A * U$;

end

disp(U)

(c) Raisonnement par récurrence sur n. Pour $n = 0$ les résultats est vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixer, supposons que les résultats pour n, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \alpha^n A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

et montrons les pour $n+1$. On a

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \alpha A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
$$= \alpha A \alpha^n A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$
$$= \alpha^{n+1} A^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

D'où d'après le principe de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \alpha^n A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question [3.c] de la partie 1 et la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \alpha^n A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12^n}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12^n + 2\times 3^n & 12^n - 3\times 2^n + 2\times 3^n & 12^n + 3\times 2^n - 4\times 3^n \\ 12^n - 3^n & 12^n + 3\times 2^n - 3^n & 12^n - 3\times 2^n + 2\times 3^n \\ 12^n - 3^n & 12^n - 3^n & 12^n + 3\times 2^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(12)^n}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12^n - 3^n + \frac{1}{2}2^n \\ 12^n + \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}2^n \\ 12^n + \frac{1}{2}3^n + \frac{3}{2}2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{3}{12}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{12}\right)^n \\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{12}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{12}\right)^n \\ 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{12}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{12}\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{3}{12}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{12}\right)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{12}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{12}\right)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{12}\right)^n + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{12}\right)^n\right) \end{cases}.$$

3. Faisant n tendre vers l'infini dans les résultats de la question précédente, on trouve que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}.$$

Partie 3

Exemples de calcul d'une distance d'un vecteur à un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On pose $F = Vect\{(1,1,1)\}$ et $G = Vect\{(1,-1,0),(-2,1,1)\}$. On muni $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique $<.,.>$.

1. Montrons que G est un supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$ c'est à dire que G et F sont orthogonaux puis $F + G = \mathbb{R}^3$.

   Première point : On a $<u,v> = 1 - 1 + 0\times 1 = 0$ et $<u,w> = -2 + 1 + 1 = 0$, alors G et F sont orthogonaux.

   Deuxième point : On a la famille $\{(1,-1,0),(-2,1,1)\}$ est libre, alors $\dim G = 2$, et puisque $F \perp G$ alors $F \bigcup G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Alors $F + G = \mathbb{R}^3$. D'où G est un supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$.

2. (a) On a $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ est une base orthonormale de F, alors pour tout $X = (x,y,z)$ dans $\mathbb{R}^3$,

   $$P_F(X) = <X,U> U$$

   on a $<X,U> = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, d'où

   $$P_F(X) = \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

   Autre méthode : On sait que la base canonique B_0 est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, et on a $U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base orthonormale de F, alors

   $$Mat_{B_0}(P_F) = U^tU = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$P_F(X) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

(b) On a d'après la question [1], G est un supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$, alors $P_F + P_G = id_{\mathbb{R}^3}$, soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$P_F(X) + P_G(X) = X \iff P_G(X) = X - P_F(X) = (x, y, z) - \frac{1}{3}(x+y+z, x+y+z, x+y+z)$$

d'où

$$P_G(X) = \frac{1}{3}(2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

3. On pose $N = (1, 2, 3)$

(a) D'après le théorème de la caractérisation du projeté orthogonal par minimisation de la norme, on a

$$d(N, F) = \min_{X \in F} ||N - X|| = ||N - P_F(N)||$$

on a d'après la question précédente,

$$N - P_F(N) = P_G(N) = \frac{1}{3}(2 + 2 + 3, 1 + 2 \times 2 + 3, 1 + 2 + 2 \times 3) = \frac{1}{3}(7, 8, 9)$$

d'où

$$d(N, F) = \frac{1}{3}\sqrt{7^2 + 8^2 + 9^2} = \frac{\sqrt{194}}{3}.$$

(b) De même que la question précédente, on a

$$d(N, G) = \min_{X \in G} ||N - X|| = ||N - P_G(N)||$$

et d'après la question [2], on a $N - P_G(N) = P_F(N) = \frac{1}{3}(1+2+3, 1+2+3, 1+2+3) = \frac{1}{3}(5, 5, 5)$, d'où

$$d(N, G) = \frac{1}{3}\sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5.$$

PROBLEME 2

Partie 1

Détermination de la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$.

1. (a) Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in [0, 1]$, On a $xt^2 \geqslant 0$, donc $0 < e^{-xt^2} \leqslant 1$ et $e^{-x} > 0$ (la fonction exp est positive et $e^y \leqslant 1, \forall y \leqslant 0$). Alors $0 < e^{-x(1+t^2)} \leqslant e^{-x}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, On a d'après la question précédente $0 < \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{e^{-x}}{1+t^2}$, $\forall t \in [0, 1]$. On intègre l'inégalité sur l'intervalle $[0, 1]$, on trouve que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt = e^{-x} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = e^{-x}[\arctan t]_0^1 = e^{-x}\frac{\pi}{4}$$
$$\iff 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}e^{-x}.$$

(c) Soient $x \in \mathbb{R}^-$ et $t \in [0,1]$, On a $xt^2 \leqslant 0$, donc $e^{-xt^2} \geqslant 1$ et $e^{-x} > 0$, alors

$$e^{-x} \leqslant e^{-x}e^{-xt^2} = e^{-x(1+t^2)}$$

on multiplie par $\frac{1}{1+t^2}$ et on intégre comme dans la question $1-b$, On trouve que

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}e^{-x} \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt = f(x)$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $\frac{\pi}{4}e^{-x} \leqslant f(x)$.

(d) D'après la question [1.b], on a $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{4}e^{-x}$ faisant x tendre vers $+\infty$, alors $0 \leqslant \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leqslant \frac{\pi}{4} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Faisant x tendre vers $-\infty$ à l'inégalité de la question [1.c], On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi}{4}e^{-x} \leqslant \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et puisqu'on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction $f : x \longmapsto e^x$.
$*$ Si $u \geqslant 0$, alors sur le segment $[0,u]$, la fonction f'' est majorée par e^u et donc

$$|e^u - 1 - u| = |f(u) - f(0) - uf'(0)| \leqslant \frac{u^2}{2}e^u = \frac{u^2}{2}e^{|u|}.$$

$*$ Si $u < 0$, alors sur le segment $[u,0]$, la fonction f'' est majorée par $1 \leqslant e^{|u|}$, de sort que

$$|e^u - 1 - u| = |f(u) - f(0) - uf'(0)| \leqslant \frac{u^2}{2}e^{|u|}.$$

Ainsi

$$\forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}e^{|u|}.$$

(b) Soit $(t,h) \in [0,1] \times [-1,1]$, on remplace dans l'inégalité de la question précédente u par $-h(1+t^2)$, on a alors

$$\left|e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| \leqslant \frac{h^2(1+t^2)^2}{2}e^{|-h(1+t^2)|}$$

Par l'inégalité triangulaire on a $|-h(1+t^2)| \leqslant |h| + |ht^2| \leqslant 1 + 1 = 2$, alors $e^{|-h(1+t^2)|} \leqslant e^2$ (la fonction exp est croissante). D'où

$$\forall (t,h) \in [0,1] \times [-1,1], \quad \left|e^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}e^2(1+t^2)^2$$

(c) Soit $(x,t,h) \in \mathbb{R} \times [0,1] \times [-1,1]$, on multiplie l'inégalité de la question [2.b] par $\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} > 0$, On trouve

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}e^{-h(1+t^2)} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} + h(1+t^2)\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\frac{h^2}{2}e^2(1+t^2)^2 \\
&\iff \left|\frac{e^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} + he^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant e^{-x(1+t^2)}\frac{h^2}{2}e^2(1+t^2) \\
&\implies \left|g(x+h,t) - g(x,t) + he^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant e^{-x(1+t^2)}\frac{h^2}{2}e^2(1+t^2).
\end{aligned}$$

(d) Soient $x \in \mathbb{R}$, $h \in [-1,1]$ avec $h \neq 0$, on divise l'inégalité de la question précédente par $|h|$, On a alors

$$\forall t \in [0,1], \quad \left|\frac{g(x+h,t) - g(x,t)}{h} + e^{-x(1+t^2)}\right| \leqslant e^{-x(1+t^2)}\frac{|h|}{2}e^2(1+t^2)$$

Alors $\forall t \in [0,1]$

$$-e^{-x(1+t^2)}\frac{|h|}{2}e^2(1+t^2) \leqslant \frac{g(x+h,t) - g(x,t)}{h} + e^{-x(1+t^2)} \leqslant e^{-x(1+t^2)}\frac{|h|}{2}e^2(1+t^2)$$

puis on intègre sur l'intervalle $[0,1]$, donc

$$\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}\frac{|h|}{2}e^2(1+t^2)dt \leqslant \int_0^1 \frac{g(x+h,t)-g(x,t)}{h}dt + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt \leqslant \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\frac{|h|}{2}e^2(1+t^2)dt$$

$$\iff -\frac{|h|}{2}\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}e^2(1+t^2)dt \leqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}e^2(1+t^2)dt$$

$$\iff \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}e^2(1+t^2)dt$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall h \in [-1,1]$ tel que $h \neq 0$, on a

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}e^2(1+t^2)dt$$

(e) Pour montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.

En effet : Dans l'inégalité de la question précédente, on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| \leqslant \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{2}\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}e^2(1+t^2)dt = 0$$

alors

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt\right| = 0 \iff \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}dt$.

3. On considère les trois fonctions φ, ψ et ϕ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x^2)$, $\psi(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$ et $\phi = \varphi + \psi$.

(a) On a d'après la question [2.e] la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on sait que la fonction $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composé de deux fonctions dérivables. De plus on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = (x^2)'f'(x^2) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt.$$

(b) On a d'après la question précédente $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt$$

. Faisant le changement de variable $u = tx$, alors on a, $xdt = du$ et $u = 0$ lorsque $t = 0$ et $u = x$ lorsque $t = 1$, d'où par le théorème de changement de variable on a

$$\int_0^1 xe^{-(xt)^2}dt = \int_0^x e^{-u^2}du$$

Donc $\varphi'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du$.

(c) La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car la fonction $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ l'est) et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Donc d'après la question précédente on a $\varphi' = -\psi'$ implique que $\phi' = 0$. Donc la fonction ϕ est constante, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \phi(0)$. On a

$$\phi(0) = \varphi(0) + \psi(0) = f(0) + 0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{\pi}{4}$.

(d) On a

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x\to+\infty}\phi(x) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)+\psi(x) = \lim_{x\to+\infty}\psi(x)$$

(car $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ par la question [1.d]). De plus on a $\lim_{x\to+\infty}\psi(x) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2$. Alors d'après la question [3.c]

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4} \iff \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dtc = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. L'application $u \longmapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même, de sorte que nous pouvons procéder au changement de variable $t=\sqrt{u}$. On a alors $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}2dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

D'où $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \sqrt{\pi}$.

Partie 2

1. (a) La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$.

Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)dt$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt$, faisant le changement de variable $u=\frac{t}{\sqrt{2}}$, alors $du = \frac{dt}{\sqrt{2}}$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \quad (\text{ car la focntion } u\longmapsto e^{-u^2} \text{ est paire})\\ &= 1 \quad (\text{ par la question 3.d de la partie 1 })\end{aligned}$$

d'où $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)dt = 1$, Donc θ est bien une densité.

(b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\theta(x)dx = 0$$

car la fonction $x\longmapsto x\theta(x)$ est impaire. (l'intégrale d'une fonction impaire sur une intervalle symétrique est nul).

D'après la formule de Huygens, on a $V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = E(X^2)$ (car $E(X)=0$), par le théorème de transfaire, on a

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\theta(x)dx = 2\int_0^{+\infty} x^2\theta(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

(la foction $x\longmapsto x^2\theta(x)$ est paire). Puis par l'intégration par partie, on a

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^2e^{\frac{-x^2}{2}}dx &= \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{2\pi}}xe^{\frac{-x^2}{2}}\right]_0^A + \int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx\\ &= 2\int_0^{+\infty}\theta(x)dx\\ &= 1 \quad (\text{ la question précédente})\end{aligned}$$

D'où $V(X)=1$.

(c) On a $(\sqrt{2\pi})\theta(n) = e^{\frac{-n^2}{2}}$, alors le plus petit entier naturel n tel que $(\sqrt{2\pi})\theta(n)\leqslant 10^{-6}$ c'est le plus petit entier naturel n tel que $e^{\frac{-n^2}{2}}\leqslant 10^{-6}$.

```
n = 0;
While exp(-n^2/2) > 10^(-10)
   n = n + 1
end
disp(n)
```

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a $k(x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = \int_{-x}^{x} \theta(t)dt = 2\int_0^x \theta(t)dt$ (l'intégrale de la fonction paire θ sur l'intervalle symétrique $[-x, x]$).

   (b) On a k est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$, $k'(x) = 2\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{2}} > 0$, donc k est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $k(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)dt = 1$.

   (c) On a $\forall x \geqslant 0$, $P(-x \leqslant X \leqslant x) = k(x)$ et d'après la question précédente, on a la fonction k réalisée une bijection entre $[0, +\infty[$ et $[0, 1[$. On a $\alpha \in]0, 1[$, alors $1 - \alpha \in]0, 1[$, donc il existe un unique réel $a_\alpha > 0$ tel que $k(a_\alpha) = 1 - \alpha$, c'est à dire

$$P(-a_\alpha \leqslant X \leqslant a_\alpha) = 1 - \alpha.$$

   (d) D'après la question [2.a] et la question [2.c], il existe un unique réel strictement positif a_α tel que

$$1 - \alpha = k(a_\alpha) = 2\int_0^{a_\alpha} \theta(t)dt = 2P(0 \leqslant X \leqslant a_\alpha)$$

   équivalent que

$$P(0 \leqslant X \leqslant a_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}.$$

   Inversement : S'il existe un autre réel strictement positive b_α tel que $P(0 \leqslant X \leqslant b_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$, donc $k(b_\alpha) = 2P(0 \leqslant X \leqslant b_\alpha) = 1 - \alpha = k(a_\alpha)$ alors $b_\alpha = a_\alpha$ par l'unicité de a_α.
   D'où il existe un unique réel strictement positif a_α tel que $P(0 \leqslant X \leqslant a_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

3. (a) On applique la transformation suivant : Si X est une v.a de densité f_X, alors $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ est une v.a de densité $f_{aX+b}(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$.
   Supposons que $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la densité de Y est la fonction $f_Y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, donc la densité de Y^* est définie par, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$f_{Y^*}(t) = f_{\frac{Y-\mu}{\sigma}}(t) = f_{\frac{1}{\sigma}Y - \frac{\mu}{\sigma}}(t) = \frac{1}{|\frac{1}{\sigma}|} f_Y(\sigma t + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

   c'est à dire $Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
   De même si $Y^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y = \sigma Y^* + \mu$ est de densité $f_Y(t) = \frac{1}{|\sigma|} f_{Y^*}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. D'où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   (b) D'après la question [1.b], on a $E(Y^*) = 0$ et $V(Y^*) = 1$. On a $Y = \sigma Y^* + \mu$, et par la linéarité de l'espérance on a $E(Y) = \sigma E(Y^*) + \mu = \mu$, et $V(Y) = \sigma^2 V(Y^*) = \sigma^2$.

   (c) On a $\forall \beta \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} P(\mu - \beta\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + \beta\sigma) &= P(-\beta\sigma \leqslant Y - \mu \leqslant \beta\sigma) \\ &= P\left(-\beta \leqslant \frac{Y-\mu}{\sigma} \leqslant \beta\right) \quad \text{car } \sigma > 0 \\ &= P(-\beta \leqslant Y^* \leqslant \beta) \\ &= k(\beta) \end{aligned}$$

   Car Y^* est de même loi que X, donc $P(\mu - \beta\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + \beta\sigma) = k(\beta)$ dépend seulement de β.

(d) Rappel : L'instruction $grand(m,n,'nor',\mu,\sigma)$ renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont les coefficients sont des simulations indépendantes de la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
Réponse : $grand(1,100,'nor',0.5,sqrt(1.5))$

Partie 3

1. On a T^* est à valeur positive, on en déduit que $F_{T^*}(x)=0$, pour tout $x\leqslant 0$. Soit $x>0$, on a

$$\begin{aligned}F_{T^*}(x)&=P(T^*\leqslant x)=P(T^2\leqslant 2\sigma^2x)\\&=P(-\sigma\sqrt{2x}\leqslant T\leqslant\sigma\sqrt{2x})\\&=P(-\sigma\sqrt{2x}\leqslant T\leqslant\sigma\sqrt{2x})\\&=F_T(\sigma\sqrt{2x})-F_T(-\sigma\sqrt{2x})\end{aligned}$$

Ainsi

$$F_{T^*}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ F_T(\sigma\sqrt{2x})-F_T(-\sigma\sqrt{2x}) & \text{si } x>0\end{cases}$$

Puisque F_T est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$, alors par composition de fonctions dérivables, F_{T^*} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et nulle sur $\mathbb{R}^-$, alors F_{T^*} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en 0, on a $\forall x\leqslant 0$, $f_{T^*}(x)=0$ et $\forall x>0$

$$\begin{aligned}f_{T^*}(x)=F'_{T^*}(x)&=(\sigma\sqrt{2x})'F'_T(\sigma\sqrt{2x})+(\sigma\sqrt{2x})'F'_T(-\sigma\sqrt{2x})\\&=\frac{\sigma}{\sqrt{2x}}\left(f_T(\sigma\sqrt{2x})+f_T(-\sigma\sqrt{2x})\right)\\&=\frac{\sigma}{\sqrt{2x}}\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\sqrt{2x}}{\sigma}\right)^2}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\end{aligned}$$

On a d'après la question [4] de la partie 1, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}$. Alors

$$f_{T^*}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

Ainsi, T^* suit la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on $S_n=\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}T_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{T_i^2}{2\sigma^2}=\sum\limits_{i=1}T_i^*$, et d'après la question [1], on a $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $T_i^*\hookrightarrow\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. D'où par la stabilité de la loi gamma, on a $S_n\hookrightarrow\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. Donc une densité de S_n est définie par

$$r_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n-2}{2}}e^{-x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}T_i^2$.

(a) On a, par la linéarité de l'espérance

$$E(Z_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(T_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V(T_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\sigma^2$$

Donc le bais de Z_n en σ^2 est

$$b(Z_n)=E(Z_n)-\sigma^2=0$$

Ainsi, Z_n est un estimateur sans biais de σ^2

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on Z_n s'écrit comme somme de n variables aléatoires à valeurs positives, ainsi Z_n est à valeurs positives, et puisque la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue, Alors $\sqrt{Z_n}$ est une variable aléatoire.

ii. On a d'après la question [2], $S_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right)$. Alors $E\left(\sqrt{S_n}\right)$ existe si, et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} r_n(x) dx$ converge.

On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} r_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{0} \sqrt{x} r_n(x) dx + \int_{0}^{+\infty} \sqrt{x} r_n(x) dx \\
&= 0 + \int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{n-1}{2}} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{0}^{+\infty} x^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Puisqu'on a la fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$, d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x} r_n(x) dx$ est convergente, ce qui implique que $E\left(\sqrt{S_n}\right)$ existe et

$$E\left(\sqrt{S_n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

iii. On a $Z_n = \frac{2\sigma^2}{n} S_n$, alors $\sqrt{Z_n} = \sigma\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{S_n}$, et par la linéarité d'espérance, on a

$$E\left(\sqrt{Z_n}\right) = \sigma\sqrt{\frac{2}{n}} E\left(\sqrt{S_n}\right) = \sigma\sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

iv. On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
& E\left(\sqrt{Z_n}\right) = \sigma\sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{2}} E\left(\sqrt{Z_n}\right) = \sigma \\
\Longleftrightarrow\ & E\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{Z_n}\right) = \sigma
\end{aligned}$$

Posons $\hat{\sigma_n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{2}}\sqrt{Z_n}$, alors $E(\hat{\sigma_n}) = \sigma$. Et donc $\hat{\sigma_n}$ est un estimateur sans biais de σ.

PROBLEME 3

Partie 1

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire Y : On a Y admit une moment d'ordre 2, alors

$$\forall \varepsilon > 0, P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

2. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire X_n, on a $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}.$$

Puisqu'on a les variables aléatoires y_i sont mutuellement indépendantes, de même loi que Y, alors

$$E(X_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_n) = E(Y)$$

et

$$V(X_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_n) = \frac{1}{n}V(Y).$$

D'où

$$P\left(|X_n - E(Y)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(Y)}{n\varepsilon^2}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. On suppose dans cette question que la variable aléatoire S_n suit une loi binomiale de paramètre n et x ($S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,x)$).
   (a) i. On a $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,x)$ alors $E(S_n) = nx$, donc par la linéarité de l'espérance, on a

   $$E(X_n) = E(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = x.$$

   ii. On a $V(S_n) = nx(1-x)$, alors

   $$V(X_n) = V(\frac{1}{n}S_n) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n}x(1-x).$$

   (b) D'après la question [2], on a

   $$\forall \varepsilon > 0, P\left(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

   équivalent que

   $$\forall \varepsilon > 0, P\left(|X_n - x| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{x(1-x)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

   car $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$ (En effet : $\frac{1}{4} - x(1-x) = \frac{1}{4} - x + x^2 = \frac{1}{4}(2x-1)^2 \geqslant 0$).

   (c) On a d'après la question précédente $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|X_n - x| \geqslant \varepsilon\right) = 0$. Alors la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante x.

   (d) D'après la question [2.b], on a $P\left(|X_N - x| \geqslant 0.5\right) \leqslant \frac{1}{4N(0.5)^2} = \frac{1}{N}$, alors pour déterminer un entier naturel N tel que $P\left(|X_N - x| \geqslant 0.5\right) \leqslant 10^{-5}$, il suffit de déterminer N tel que $\frac{1}{N} \leqslant 10^{-5}$. En effet :

```
x =input("entrer x compris entre 0 et 1");
N = 1;
While 1/N > 10^(-5)
    N = N + 1
end
disp(N)
```

Partie 2

1. Soit $j[\![1,n]\!]$, à la $j^{\text{ème}}$ tirage, on a considéré une expérience à deux issues : succès avec probabilité $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ et échec (avec probabilité $1 - p = \frac{3}{5}$), avec succès si la boule tirée est rouge. On a, Z_j vaut 1 en cas de succès et 0 sinon, alors $Z_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{5}\right)$.

2. Soit $j[\![1,n]\!]$, d'après la question précédente, on a $Z_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{2}{5}\right)$. Alors

$$E(Z_j) = \frac{2}{5}, \quad V(Z_j) = \frac{2}{5}\left(1-\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{25}.$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $E(Z_1) = \frac{2}{5} = 0.4$, alors

$$\begin{aligned} 0.35 \leqslant \frac{T_n}{n} \leqslant 0.45 &\iff 0.35 - 0.4 \leqslant \frac{T_n}{n} - 0.4 \leqslant 0.45 - 0.4 \\ &\iff 0.05 \leqslant \frac{T_n}{n} - 0.4 \leqslant 0.05 \\ &\iff \left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| \leqslant 0.05. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question [3.a], on a

$$\begin{aligned} P\left(0.35 \leqslant \frac{T_n}{n} \leqslant 0.45\right) &= P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| \leqslant 0.05\right) \\ &= 1 - P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| > 0.05\right) \quad (\text{ car la v.a } \frac{T_n}{n} - 0.4 \text{ est discret }) \end{aligned}$$

et on a $P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| > 0.05\right) = P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| \geqslant 0.05\right) - P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| = 0.05\right)$ et d'après la question [2] de la partie 1, on a

$$P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| \geqslant 0.05\right) \leqslant \frac{V(Z_1)}{n(0.05)^2} = \frac{6}{25}\frac{100^2}{n25} = \frac{6(4\times 25)^2}{n25^2} = \frac{96}{n}.$$

Alors

$$\begin{aligned} P\left(0.35 \leqslant \frac{T_n}{n} \leqslant 0.45\right) &= 1 + P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| = 0.05\right) - P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| \geqslant 0.05\right) \\ &\geqslant 1 + P\left(\left|\frac{T_n}{n} - 0.4\right| = 0.05\right) - \frac{96}{n} \\ &\geqslant 1 - \frac{96}{n}. \end{aligned}$$

D'où $P\left(0.35 \leqslant \frac{T_n}{n} \leqslant 0.45\right) \geqslant 1 - \frac{96}{n}$.

4. D'après la question [3.b], pour avoir plus de 95% de chances d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre 0.35 et 0.45, il suffit de trouve n tel que $1 - \frac{96}{n} \geqslant 0.95$. On a

$$\begin{aligned} 1 - \frac{96}{n} \geqslant 0.95 &\iff \frac{96}{n} \leqslant 0.05 \\ &\iff \frac{96}{0.05} \leqslant n \\ &\iff \frac{9600}{5} \leqslant n \\ &\iff 1960 \leqslant n \end{aligned}$$

Donc à partir de 1960 tirage, on a plus de 95% de chances d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre 0.35 et 0.45.