Corrigé CNAEM 2015

Exercice 1

Partie I

1 a) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Montrons que P est inversible.

Soient : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On a :

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y - z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -2z = b - a \\ -y = c - a \end{cases} \qquad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + c - a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ y = a - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2}a + \frac{1}{2}b + c \\ y = a - c \\ z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \end{cases}$$

Donc le système $PX = Y$ admet une solution unique ce qui prouve que P est inversible est $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

b) Vérifions que $P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

On a $P^{-1}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$

2) a) Vérifions que $A = PDP^{-1}$.

Calculons tout d'abord PD

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

On conclut donc que $A = PDP^{-1}$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- ✓ Pour $n = 0$. On a $\begin{cases} PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I \\ A^0 = I \end{cases}$

Donc $A^0 = PD^0P^{-1}$ Alors la relation est vraie pour $n = 0$.

- ✓ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$.

$A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^nIDP^{-1}$

$A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

- ✓ On suppose alors que selon le principe de la récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N} \; A^n = PD^nP^{-1}$

c) Calculons D^n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

Puisque D est une matrice diagonale alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2)^n \end{pmatrix}$$

d) Calculons A^n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$; $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2)^n \end{pmatrix}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n & 2^n \\ (-1)^n & 2^n & -2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^n & 2^n \\ (-1)^n & 2^n & -2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2}(-1)^n + \frac{3}{2}2^n & \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}2^n & (-1)^n - 2^n \\ \frac{-1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}2^n & (-1)^n - 2^n \\ \frac{-1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}2^n & \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}2^n & (-1)^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -(-1)^n + 3 \times 2^n & (-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} \\ -(-1)^n + 2^n & (-1)^n + 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} \\ -(-1)^n + 2^n & (-1)^n - 2^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

Partie II

1) Montrons que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $AX_n + B = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n - 3z_n + 1 \\ \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n - 3z_n + 1 \\ \frac{3}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n - z_n - 2 \end{pmatrix}$

$$AX_n + B = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

On conclut donc que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n + B$.

2 a) Démontrons l'équivalence demandée :

$U = AU + B \Leftrightarrow U - AU = B \Leftrightarrow IU - AU = B \Leftrightarrow (I - A)U = B$

b) Vérifions que : $A^2 - A - 2I = 0$.

On a $A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -(-1)^2 + 3 \times 2^2 & (-1)^2 - 2^2 & 2(-1)^2 - 2^{2+1} \\ -(-1)^2 + 2^2 & (-1)^2 + 2^2 & 2(-1)^2 - 2^{2+1} \\ -(-1)^2 + 2^2 & (-1)^2 - 2^2 & 2(-1)^2 \end{pmatrix}$

$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & -3 & -6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Donc :

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\quad A^2 - A - 2I = 0$

Et On a aussi : $\left(-\frac{1}{2}A\right)(I - A) = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^2 = -\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(A + 2I)$

Donc $\left(-\frac{1}{2}A\right)(I - A) = I.$

c) Déduction de l'inversibilité de $I - A$.

D'après l'égalité $\left(-\frac{1}{2}A\right)(I - A) = I$. On conclut que $(I - A)$ est inversible et son inverse est égale à $-\frac{1}{2}A$.

d) Déduction, puis calcul de U:

On a (I-A)U=B Donc $\left(-\frac{1}{2}A\right)(I - A)U = -\frac{1}{2}AB$

d'où $IU = -\frac{1}{2}AB$ Donc $U = -\frac{1}{2}AB$.

Donc $\quad U = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3) a) Montrons que pour tout entier naturel n $X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $X_{n+1} = AX_n + B = AX_n + U - AU$

Donc $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} - U = A(X_n - U).$

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n,

$X_n - U = A^n(X_0 - U)$.

- ✓ Pour $n = 0$. $A^0(X_0 - U) = I(X_0 - U) = (X_0 - U)$.

Donc la relation est vraie pour $n = 0$

- ✓ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n - U = A^n(X_0 - U)$.

$X_{n+1} - U = A(X_n - U) = A\big(A^n(X_0 - U)\big) = A^{n+1}(X_0 - U)$

- ✓ Donc selon le principe de la récurrence $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.

4) Calculons x_n, y_n et z_n en fonction de n.

On a : $X_0 - U = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$X_n - U = A^n(X_0 - U)$

$$X_n - U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -(-1)^n + 3 \times 2^n & (-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} \\ -(-1)^n + 2^n & (-1)^n + 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} \\ -(-1)^n + 2^n & (-1)^n - 2^n & 2(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n + 2^n \\ (-1)^n - 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n - 2^n - 4 \\ (-1)^n + 2^n - 4 \\ (-1)^n - 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

Et finalement $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_n = (-1)^n - 2^n - 4 \\ y_n = (-1)^n + 2^n - 4 \\ z_n = (-1)^n - 2^n - 1 \end{cases}$

5) Calculons a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{cases} \ln(a_{n+1}) = \frac{7}{2}\ln(a_n) - \frac{3}{2}b_n - 3\ln(c_n) + 1 \\ b_{n+1} = \frac{3}{2}\ln(a_n) + \frac{1}{2}b_n - 3\ln(c_n) + 1 \\ \ln(c_{n+1}) = \frac{3}{2}\ln(a_n) - \frac{3}{2}b_n - \ln(c_n) - 2 \end{cases}$$

Par le changement de variable $\begin{cases} x_n = \ln(a_n) \\ y_n = b_n \\ z_n = \ln(c_n) \end{cases}$ Le système précédent équivaut :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n - 3z_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{3}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n - 3z_n + 1 \\ z_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n - z_n - 2 \end{cases} \quad \text{Donc}$$

$$\begin{cases} x_n = (-1)^n - 2^n - 4 \\ y_n = (-1)^n + 2^n - 4 \\ z_n = (-1)^n - 2^n - 1 \end{cases} \quad \text{Donc}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \ln(a_n) = (-1)^n - 2^n - 4 \\ b_n = (-1)^n + 2^n - 4 \\ \ln(c_n) = (-1)^n - 2^n - 1 \end{cases} \quad \text{Donc :}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} a_n = \exp((-1)^n - 2^n - 4) \\ b_n = (-1)^n + 2^n - 4 \\ c_n = \exp((-1)^n - 2^n - 1) \end{cases}$$

Exercice 2

Partie I

1) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2)e^{\frac{-x}{2}} = 0 \ \left(\text{Car} \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{\frac{-x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{\frac{-x}{2}} = 0 \end{cases} \right).$$

2) f est dérivable sur $[0\,;\ +\infty[$. Et pour tout x réel positif, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 + 4x)e^{\frac{-x}{2}} - \frac{1}{16}(x^3 + 2x^2)e^{\frac{-x}{2}}$$

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2 - \frac{2}{16}x^2 + \frac{4}{8}x\right)e^{\frac{-x}{2}}$$

Donc $f'(x)=\frac{-1}{16}x(x^2 - 4x - 8)e^{\frac{-x}{2}}$.

3) soit x un réel positif. Cherchons tout d'abord les racines du polynôme:

$x^2 - 4x - 8$. Le discriminant de ce polynôme vaut $16 + 32 = 48 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$.

Les deux racines sont : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{4+4\sqrt{3}}{2} = 2 + 2\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{4-4\sqrt{3}}{2} = 2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$

On a finalement: $f'(x)=\frac{-1}{16}x(x - x_1)(x - x_2)e^{\frac{-x}{2}}$.

4) Pour tout réel positif x, $\frac{-1}{16}xe^{\frac{-x}{2}} \leq 0$. Donc le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$est l'opposé du signe de $(x - x_1)(x - x_2)$. Ainsi le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$est le suivant :

x	0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Partie II

1) a) Soit A un réel positif.

$$\int_0^A e^{\frac{-x}{2}}dx = \left[-2e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^A = -2e^{\frac{-A}{2}} + 2.$$

Donc $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_0^A e^{\frac{-x}{2}} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} -2e^{\frac{-A}{2}} + 2 = 2$

Donc $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{2}} dx$ est une intégrale convergente égale à 2.

b) Soit A un réel positif. Calculons $\int_0^A x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} dx$

On pose $\begin{cases} u'(x) = e^{\frac{-x}{2}} \\ v(x) = x^{n+1} \end{cases}$ Alors $\begin{cases} u(x) = -2e^{\frac{-x}{2}} \\ v'(x) = (n+1)x^n \end{cases}$

Une intégration par partie nous donne :

$$\int_0^A x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} dx = \left[-2x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}}\right]_0^A + 2(n+1) \int_0^A x^n e^{\frac{-x}{2}} dx$$

Donc $\int_0^A x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} dx = -2A^{n+1} e^{\frac{-A}{2}} + 2(n+1) \int_0^A x^n e^{\frac{-x}{2}} dx$

c) Montrons que $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1} e^{\frac{-A}{2}} = 0$

En posant $t = \frac{A}{2(n+1)}$. En trouve $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n+1} e^{\frac{-A}{2}} = \lim\limits_{t\to+\infty} (2(n+1)t)^{n+1} e^{-(n+1)t}$

$$\lim_{A\to+\infty} A^{n+1} e^{\frac{-A}{2}} = \lim_{t\to+\infty} 2^{n+1} \left((n+1)t\right)^{n+1} e^{-(n+1)t}$$

$$\lim_{A\to+\infty} A^{n+1} e^{\frac{-A}{2}} = \lim_{t\to+\infty} 2^{n+1} \left((n+1)t\right)^{n+1} e^{-(n+1)t}$$

$$\lim_{A\to+\infty} A^{n+1} e^{\frac{-A}{2}} = \lim_{X\to+\infty} 2^{n+1} (X)^{n+1} e^{-X} = 0$$

Alors on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} dx = \lim\limits_{A\to+\infty} 2(n+1) \int_0^A x^n e^{\frac{-x}{2}} dx.$

Cette relation de récurrence montre que si $\int_0^A e^{\frac{-x}{2}} dx$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ alors il en est de même que $\int_0^A x^n e^{\frac{-x}{2}} dx$.

Or $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{\frac{-x}{2}} dx$ est convergente donc $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{\frac{-x}{2}} dx$ l'est aussi.

Donc $\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{\frac{-x}{2}} dx = 2(n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{\frac{-x}{2}} dx$

Donc $I_{n+1} = 2(n+1)I_n$.

e) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $I_n = 2^{n+1}n!$.

- ✓ Pour $n = 0 : I_0 = 0 = 2^{0+1}0!$. Donc la relation est vraie pour $n = 0$.
- ✓ On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = 2^{n+1}n!$.

On a : $I_{n+1} = 2(n+1)I_n = 2(n+1)2^{n+1}n!$

Donc $I_{n+1} = 2^{n+2}(n+1)!$.

- ✓ Donc selon le principe de la récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = 2^{n+1}n!$.

2 a) Montrons que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire S.

La fonction g est donc définie pour tout réel x par :

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{128}(x^3+2x^2)e^{\frac{-x}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- ✓ D'après le tableau de variation de f, $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\ f(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\ g(x) \geq 0$ et puisque g est nulle sur $]-\infty\,;0[$

Alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0$.

- ✓ La fonction $x \to \frac{1}{128}(x^3+2x^2)e^{\frac{-x}{2}}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions continue (polynôme et exponentiel).

La fonction nulle est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 0 = g(0)$.

Alors la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{16}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{16}\int_{0}^{+\infty} f(x)dx =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{16}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}(x^3+2x^2)e^{\frac{-x}{2}}\right)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}\int_{0}^{+\infty} x^3e^{\frac{-x}{2}}dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} x^2e^{\frac{-x}{2}}dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}I_3 + \frac{1}{4}I_2\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}2^4(3!) + \frac{1}{4}2^3(2!)\right)$$

On trouve finalement : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$.

On vient de démontrer donc que g est positive est continue sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$. On peut donc affirmer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire S.

b) Calculons l'espérance E(S) et la variance V(S) de S.

$$E(S) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \frac{1}{16}\int_{0}^{+\infty} (\frac{1}{8}(x^4 + 2x^3)e^{\frac{-x}{2}})dx$$

$$E(S) = \frac{1}{16}(\frac{1}{8}\int_{0}^{+\infty} x^4e^{\frac{-x}{2}}dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} x^3e^{\frac{-x}{2}}dx\ )$$

$$E(S) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}I_4 + \frac{1}{4}I_3\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}2^5(4!) + \frac{1}{4}2^4(3!)\right)$$

$$E(S) = \frac{1}{16}(96 + 24) = \frac{15}{2}$$

$$E(S^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)dx = \frac{1}{16}\int_{0}^{+\infty} (\frac{1}{8}(x^5 + 2x^4)e^{\frac{-x}{2}})dx$$

$$E(S^2) = \frac{1}{16}(\frac{1}{8}\int_{0}^{+\infty} x^5e^{\frac{-x}{2}}dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{+\infty} x^4e^{\frac{-x}{2}}dx\ )$$

$$E(S^2) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}I_5 + \frac{1}{4}I_4\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}2^6(5!) + \frac{1}{4}2^5(4!)\right)$$

$$E(S^2) = \frac{1}{16}(960 + 192) = 72$$

$$V(X) = E(S^2) - E(S)^2 = 72 - \left(\frac{15}{2}\right)^2$$

Donc $\quad V(X) = \frac{63}{4}$

Partie III

1) a) Vérifions que pour tout entier naturel non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

Soit k un entier naturel non nul,

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

b) Montrons que pour tout entier naturel non nul N, $S_N=1-\frac{1}{N+1}$.

Soit N un entier naturel non nul,

$$s_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{I_{k-1}}{(k+1)!\,2^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(k-1)!\,2^k}{(k+1)!\,2^k} =$$

$$s_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Par télescopage des termes $S_N=1-\frac{1}{N+1}$.

2) Montrons que $\sum_{n\geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n+1)!2^n}$ est convergente.

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{I_{k-1}}{(k+1)!\,2^k} = \lim_{N \to +\infty} S_N = 1$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{I_{n-1}}{(n+1)!2^n}$ est convergente et sa valeur est égale à 1.

Exercice 3

1) a) Vérifions que X suit une loi uniforme.

Il est claire que $\begin{cases} X(\Omega) = [\![1\,;6]\!] \\ \forall\, k \in [\![1\,;6]\!] \quad\quad P(X = k) = \frac{1}{6} \end{cases}$

Donc X suit la loi uniforme ($X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;6]\!])$)

b) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1\,;6]\!])$ alors $E(X)=\frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$ et $V(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}$

2 a) Pour $k \in \{1, 3, 5\}$, c'est-à-dire X impair, on lance la pièce de monnaie une seule fois. L'événement (Y=0) se produit lorsqu'on obtient face lors de l'unique lancer effectué. Donc $P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

b) Pour $k \in \{2, 4, 6\}$, c'est-à-dire X pair, on lance la pièce de monnaie deux fois. L'événement (Y=0) se produit lorsqu'on obtient face lors des deux lancers effectués. Donc $P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$.

c) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement (X pair ; X impair) montre que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0)=\mathrm{P}\big((\mathrm{Y}=0)\cap(\mathrm{X\ pair})\big)+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=0)\cap(\mathrm{X\ impair}))$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0)=\mathrm{P}_{(\mathrm{X\ pair})}(\mathrm{Y}=0)\mathrm{P}(\mathrm{X\ pair})+\mathrm{P}_{(\mathrm{X\ Impair})}(\mathrm{Y}=0)\mathrm{P}(\mathrm{X\ Impair})$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

3) Montrons que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)=\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=2))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=4))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=6)).$$

La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement ((X=1) ; (X=2) ; (X=3) ; (X=4) ; (X=5) ; (X=6)) montre que :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)=\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=1))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=2))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=3))$$
$$+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=4))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=5))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=6)).$$

Or $\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=1))=\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=3))=\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=5))=0$.

Car on ne peut pas lancer la pièce de monnaie une seule fois, et avoir deux piles.

Donc $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)=\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=2))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=4))+\mathrm{P}((\mathrm{Y}=2)\cap(\mathrm{X}=6))$.

4) Cherchons la loi de la variable aléatoire Y, et calculons son espérance E(Y) et sa variance V(Y).

Il est clair que $\mathrm{Y}(\Omega)=\{0;\ 1;\ 2\}$

On a $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{Y}=0)-\mathrm{P}(\mathrm{Y}=2)$

Donc $\mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

On résume donc la loi de Y dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$

L'espérance de Y :

$E(Y)=0\ P(Y=1)+1\ P(Y=1)+2P(Y=2)$

$E(Y)=\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

La variance de Y :

$E(Y^2)=0\ P(Y=1)+1\ P(Y=1)+2^2P(Y=2)$

$E(Y^2)=\frac{1}{2}+\frac{4}{8}=1$

$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$

$V(Y)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

5 a) Donnons la loi du couple (X, Y).

- $P\big((X=1)\cap(Y=0)\big)=P(X=1)P_{(X=1)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=2)\cap(Y=0)\big)=P(X=2)P_{(X=2)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$
- $P\big((X=3)\cap(Y=0)\big)=P(X=3)P_{(X=3)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=4)\cap(Y=0)\big)=P(X=4)P_{(X=4)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$
- $P\big((X=5)\cap(Y=0)\big)=P(X=5)P_{(X=5)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=6)\cap(Y=0)\big)=P(X=6)P_{(X=6)}(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$
- $P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)=P(X=1)P_{(X=1)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=2)\cap(Y=1)\big)=P(X=2)P_{(X=2)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=3)\cap(Y=1)\big)=P(X=3)P_{(X=3)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=4)\cap(Y=1)\big)=P(X=4)P_{(X=4)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{0}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=5)\cap(Y=1)\big)=P(X=5)P_{(X=5)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=6)\cap(Y=1)\big)=P(X=6)P_{(X=6)}(Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$
- $P\big((X=1)\cap(Y=2)\big)=P(X=1)P_{(X=1)}(Y=2)=0$

- $P\big((X=2)\cap(Y=2)\big) = P(X=2)P_{(X=2)}(Y=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$
- $P\big((X=3)\cap(Y=2)\big) = P(X=3)P_{(X=3)}(Y=2) = 0$
- $P\big((X=4)\cap(Y=2)\big) = P(X=4)P_{(X=4)}(Y=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$
- $P\big((X=5)\cap(Y=2)\big) = P(X=5)P_{(X=5)}(Y=2) = 0$
- $P\big((X=6)\cap(Y=2)\big) = P(X=6)P_{(X=6)}(Y=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

On résume cela dans le tableau suivant :

Y \ X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
2	0	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	*1*

b) D'après le tableau $\begin{cases} P\big((X=1)\cap(Y=2)\big) = 0 \\ P(X=1)\times P(Y=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{48} \end{cases}$

Donc $P\big((X=1)\cap(Y=2)\big) \neq P(X=1)\times P(Y=2)$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

c) Calculons la covariance de X et Y.

On a $XY(\Omega) = \{0;\ 1;\ 2; 3; 4; 5; 6; 8; 12\}$

Il est clair que :

- $(XY=0)=(Y=0)$
- $(XY=1)=(X=1)\cap(Y=1)$
- $(XY=2)=(X=2)\cap(Y=1)$
- $(XY=3)=(X=3)\cap(Y=1)$
- $(XY=4)=[(X=4)\cap(Y=1)]\cup[(X=2)\cap(Y=2)]$
- $(XY=5)=(X=5)\cap(Y=1)$
- $(XY=6)=(X=6)\cap(Y=1)$
- $(XY=8)=(X=4)\cap(Y=2)$
- $(XY=12)=(X=6)\cap(Y=2)$

On résume cela dans le tableau suivant :

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*8*	*12*
P(XY=k)	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

Donc $E(XY)=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{8}+\frac{5}{12}+\frac{6}{12}+\frac{8}{24}+\frac{12}{24}$

Donc $E(XY)=\frac{67}{24}$

Et on sait que $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$cov(X,Y)=\frac{67}{24}-\frac{7}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{6}$$

d) Déterminons le coefficient de corrélation entre les deux variables aléatoires X et Y : $\rho_{X,Y}$.

$$\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt{\frac{7}{16}}}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{192}{245}}$$

<u>Exercice 4</u>

1) a) Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ La fonction $t \to e^{\frac{-1}{4}t} - e^{\frac{-1}{3}t}$ est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions continues.
- ✓ La fonction nulle est continue sur $]-\infty\,;0]$.
- ✓ $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} e^{\frac{-1}{4}t} - e^{\frac{-1}{3}t} = 1 - 1 = 0 = f(0)$

Ces trois points montrent que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

$\theta^3 - \theta^4 = \theta^3(1-\theta)$. Et puisque $\begin{cases} \theta^3 > 0 \\ (1-\theta) > 0 \end{cases}$

Alors $\theta^3 - \theta^4 > 0$.

c) Soit t un réel.

$t > 0 \Rightarrow \dfrac{-1}{12}t < 0 \Rightarrow 0 < e^{\frac{-1}{12}t} < e^0$

Donc si $t > 0$ *alors* $e^{\frac{-1}{12}t} \in]0\,;1[$

d) Montrons que pour tout réel t, $f(t) \geq 0$.

- ✓ Si $t \in]0\,;+\infty[$

$f(t) = e^{\frac{-1}{4}t} - e^{\frac{-1}{3}t} = e^{3\left(\frac{-1}{12}t\right)} - e^{4\left(\frac{-1}{12}t\right)} = \theta^3 - \theta^4$ (En posant $\theta = e^{\frac{-1}{12}t}$)

D'après la question 1 b) $\theta^3 - \theta^4 > 0$. Donc $f(t) > 0$.

- ✓ Si $t \in]-\infty\,;0]$ $\quad f(t) = 0$ Donc $f(t) \geq 0$.

On conclut donc que pour tout réel t, $f(t) \geq 0$.

2) a)

- ✓ Lorsque $x \leq 0$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$. (Car f est nulle si $t \leq 0$)
- ✓ Lorsque $x > 0$:

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt.$

b) Soient $x > 0$ et $a > 0$,

$$\int_0^x e^{-at}dt = \left[\frac{-1}{a}e^{-at}\right]_0^x = \frac{1}{a}(1 - e^{-ax})$$

c) Soit $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^{\frac{-1}{4}x}dt - \int_0^x e^{\frac{-1}{3}x}dt = 4\left(1 - e^{\frac{-1}{4}x}\right) - 3\left(1 - e^{\frac{-1}{3}x}\right).$$

Donc $F(x)=1-4e^{\frac{-1}{4}x}+3e^{\frac{-1}{3}x}$

d) On sait que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-1}{4}x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-1}{3}x} = 0 \end{cases}$ Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

3) On sait que : $P(3< X \leq 4) = F(4) - F(3)$. Donc :

$P(3< X \leq 4) = (1\text{-}4e^{-1}+3e^{\frac{-4}{3}}) - (1 - 4e^{\frac{-3}{4}} + 3e^{-1})$

Finalement : $P(3< X \leq 4)=-7e^{-1}+3e^{\frac{-4}{3}}+4e^{\frac{-3}{4}}$.

4) a) i) Soit x un réel.

$P(X > x) = P(\overline{X > x}) = 1 - P(X \leq x)$

Où $(\overline{X > x})$ est l'événement contraire de $(X > x)$.

ii) $P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \Leftrightarrow P(X \leq \mu) = 1 - P(X \leq \mu) \Leftrightarrow 2P(X \leq \mu) = 1$

Donc $P(X \leq \mu) = P(X > \mu) \Leftrightarrow P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$

iii) $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(\mu) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 4e^{\frac{-1}{4}\mu} + 3e^{\frac{-1}{3}\mu} = \frac{1}{2}$

Donc $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 8e^{\frac{-1}{4}\mu} + 6e^{\frac{-1}{3}\mu} = 0.$

b) g est dérivable sur $]0, 1[$ avec $g'(\theta) = -24\theta^2(-1 + \theta) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et puisqu'elle continue sur cet intervalle alors g est une bijection de $]0, 1[$ vers $g(]0, 1[) =]-1 ; 1[$

(Car $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = -1$)

c) On sait que : $(E) \Leftrightarrow P(X \leq \mu) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 8e^{\frac{-1}{4}\mu} + 6e^{\frac{-1}{3}\mu} = 0$

Pour que μ soit solution de (E) il faut que $\mu > 0$ car sinon $P(X \leq \mu) = 0$.

Par un changement de variable $\theta = e^{\frac{-1}{12}\mu}$: $\mu > 0$ donc $\theta \in]0, 1[$

(E) $\Leftrightarrow$ $1 - 8\theta^3 + 6\theta^4$ $\Leftrightarrow$ $g(\theta) = 0$

Or $0 \in]-1, 1[$ et g est une bijection de $]0, 1[$ vers $]-1, 1[$ donc la solution de l'équation $g(\theta) = 0$ est unique d'où l'unicité de θ et par la suite de μ.