CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à l'ESSEC Business School.

Préliminaire

1.*a*. Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ réalisant ouvertement une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur lui même, le théorème de changement de variable assure que les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{(k-1)/2} e^{-u} du, \tag{1}$$

sont de même nature, la seconde ayant un indéniable parfum eulerien !

Vu que la fonction Γ d'Euler est officiellement définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $(k+1)/2$ est ici strictement positif, nous déduisons l'existence de

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

et comme

$$\int_0^{+\infty} u^{(k-1)/2} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right),$$

l'existence souhaitée est *in the pocket*.

b. Il est curieux de séparer ici A_0 des autres A_k et nous ne le ferons donc pas. Soit donc à nouveau $k \in \mathbb{N}$. Le thèorème de changement de variable évoqué *supra* ne se contente pas d'évoquer la même nature des intégrales de la ligne (1). Il raconte également que les deux cousines ont la même valeur dès lors qu'elles ont décidé d'exister et il n'en faut donc pas plus pour revendiquer

$$A_k = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

C'est maintenant qu'il ne faut pas avoir oublié les dires du professeur qui ne peut avoir négligé de mentionner les égalités

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \Gamma(1) = 1 \quad ; \quad \forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

grâce auxquelles nous dévoilons aisément que

$$A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad A_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}\cos(2xt)$ et $t \mapsto te^{-t^2}\sin(2xt)$ sont assurément continues sur $[0, +\infty[$ et il ne fait absolument aucun doute que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant e^{-t^2}|\cos(2xt)| \leqslant e^{-t^2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant te^{-t^2}|\sin(2xt)| \leqslant te^{-t^2}.$$

La récente question *a*, le test de comparaison en signe positif et le théorème de convergence absolue devraient alors nous permettre de passer tranquillement à la partie suivante.

Partie 1

3.a. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a sans sourciller

$$|\sin'| = |\cos| \leqslant 1.$$

Soit alors $u \in \mathbb{R}$. Nous sommes en droit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sinus entre les réels 0 et u, ce qui, parce que $\sin 0$ ne vaut pas grand chose, se traduit exactement par

$$|\sin u| \leqslant |u|.$$

↱ L'inégalité des accroissements finis n'est autre que celle de Taylor-Lagrange à l'ordre zéro et par conséquent, même si cela peut paraître *capillotracté*, nous avons bien utilisé une formule de Taylor…

b. Soit u et v deux nombres réels. À l'heure à laquelle tout le monde se pose la question de ce que devraient apprendre les élèves au collège et au lycée, on pourrait suggérer de réapprendre par cœur les fondamentaux de la trigonométrie, parmi lesquels se trouvent les quatre formules de Simpson

$$\begin{aligned}
\cos u + \cos v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2},\\
\cos u - \cos v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{v-u}{2},\\
\sin u + \sin v &= 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2},\\
\sin u - \sin v &= 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.
\end{aligned}$$

Cela devrait peut-être nous éviter de devoir rappeler un jour à des *post ados* majeurs et vaccinés que

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1.$$

En ce qui concerne la justification demandée, il est officiellement conseillé de savoir que, pour tout couple (a, b) de nombres réels, on a

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \quad \text{et} \quad \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$

d'où il ressort mentalement que

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b),$$

et il reste alors à faire les choix

$$a = \frac{u+v}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{v-u}{2}.$$

c. Quand on maîtrise les problématiques liées aux fonctions définies par des intégrales, on sait que cette continuité doit être abordée *via* la *définition*, et c'est la raison pour laquelle nous annonçons a et x dans $\mathbb{R}$ et que nous nous penchons sur la quantité $F(x) - F(a)$. L'intégration étant linéaire, nous avons déjà

$$F(x) - F(a) = \int_0^{+\infty} \big(\cos(2xt) - \cos(2at)\big)e^{-t^2}dt,$$

égalité que la seconde formule de Simpson métamorphose en

$$F(x) - F(a) = 2\int_0^{+\infty} \sin((x+a)t) \cdot \sin((a-x)t)e^{-t^2}\,dt,$$

expresssion faisant apparaître une intégrale dont la convergence *absolue* ne peut échapper qu'à ceux — ou celles — qui souffrent de diplopie communicative ! On peut donc tout à fait légitimement *trianguler* l'affaire et voilà donc maintenant que

$$|F(x) - F(a)| \leqslant 2\int_0^{+\infty} |\sin((x+a)t)| \cdot |\sin((a-x)t)|e^{-t^2}\,dt,$$

puisque les bornes en ont décidé ainsi et que les quantités déjà positives sont, *as usual*, dispensées de valuation. L'inégalité taylorienne du récent a et une ouverture ciblée des mirettes devraient alors nous amener sans ambages à

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad |\sin((x+a)t)| \cdot |\sin((a-x)t)|e^{-t^2} \leqslant |x-a|te^{-t^2},$$

et comme l'intégration est linéaire, croissante quand les bornes le veulent bien, et que A_1 existe et vaut $1/2$, il ne devrait pas être insurmontable d'asséner que

$$|F(x) - F(a)| \leqslant |x-a|. \tag{2}$$

D'un certain *squeezing process* nous déduisons que

$$F(x) \xrightarrow[x \to a]{} F(a),$$

chronique d'une continuité de F au point a, et donc d'une continuité de F sur $\mathbb{R}$ tout entier, puisque a est, depuis la genèse, n'importe quel nombre réel.

↱ L'inégalité (2) étant étant d'actualité pour tous les couples (a, x) de nombres réels, l'application F fait partie des fonctions dites « *lipschitziennes* » sur $\mathbb{R}$ et sa continuité est alors très culturelle…

4.*a*. Soit u appartenant à $\mathbb{R}$. La fonction $\sin$ étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre 0 et u, et comme $\sin'' = -\sin$, nous avons

$$|\sin''| = |\sin| \leqslant 1,$$

la conclusion est limpide.

b. Qu'on se le dise, nous n'admettrons rien du tout. L'existence de la fameuse intégrale fera partie *intégrante* de nos préoccupations !

Soit x et h deux nombres réels. C'est la linéarité de l'intégration qui légitime, dans un premier temps, l'égalité

$$F(x+h) - F(x) + 2hG(x) = \int_0^{+\infty} A(t)e^{-t^2}\,dt. \tag{3}$$

où, histoire d'alléger un peu la situation, nous nous sommes permis de noter A la fonction

$$t \mapsto \cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht\sin(2xt).$$

Soit alors t appartenant à $\mathbb{R}$. Étant officiellement entendu que

$$\cos(2(x+h)t) = \cos(2xt)\cos(2ht) - \sin(2xt)\sin(2ht),$$

nous pouvons mentalement envisager l'égalité

$$A(t) = \cos(2xt)\cdot(\cos(2ht) - 1) + \sin(2xt)\cdot(2ht - \sin(2ht)),$$

grâce à laquelle

$$|A(t)| \leqslant (1 - \cos(2ht))|\cos(2xt)| + |(2ht - \sin(2ht))\cdot\sin(2xt)|,$$

l'évidente valuation

$$|\cos(2ht) - 1| = 1 - \cos(2ht)$$

et l'inégalité triangulaire *standard* n'étant sûrement pas étrangères à l'affaire. Toujours fidèles à la politique de l'allégé « 0 % », nous décidons cette fois de

$$B(t) = (1 - \cos(2ht))|\cos(2xt)| + |(2ht - \sin(2ht))\cdot\sin(2xt)|,$$

et nous laissons à notre dévoué lecteur le soin de réutiliser la *standard* pour parvenir tranquillement à

$$B(t)e^{-t^2} \leqslant 3e^{-t^2} + 2|h|te^{-t^2},$$

à telle enseigne qu'au bout du tunnel

$$0 \leqslant |A(t)|e^{-t^2} \leqslant B(t)e^{-t^2} \leqslant 3e^{-t^2} + 2|h|te^{-t^2}.$$

Les intégrales A_0 et A_1 du liminaire ayant, depuis longtemps, la bonne idée d'exister, selon le théorème de linéarité, il en est de même de

$$\int_0^{+\infty} (3e^{-t^2} + 2|h|te^{-t^2})\,dt,$$

ce qui permet au test de comparaison en signe positif de déclarer la convergence des deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} B(t)e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |A(t)|e^{-t^2}\,dt.$$

L'existence de la seconde autorise enfin la triangulation(*) de l'intégrale de la ligne (3)

(*) Nous rappelons, au risque de radoter, qu'il est hors de question de trianguler les semi-convergentes…

et voilà donc maintenant que

$$|F(x+h)-F(x)+2hG(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |A(t)|e^{-t^2}dt,$$

puisque les bornes sont dans le sens du vent, et nous profitons de la bonne brise pour déduire de la croissance de l'intégration que

$$\int_0^{+\infty} |A(t)|e^{-t^2}dt \leqslant \int_0^{+\infty} B(t)e^{-t^2}dt,$$

ce qui n'est pas vraiment pour nous déplaire…

c. Soit derechef x et h appartenant à $\mathbb{R}$. On peut commencer par majorer gentiment la fonction B en profitant au maximum des inégalités

$$|\sin| \leqslant 1 \quad ; \quad |\cos| \leqslant 1 \quad ; \quad 1-\cos \geqslant 0,$$

qui devraient rapidement nous convaincre de

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad B(t) \leqslant |2ht - \sin(2ht)| + 1 - \cos(2ht).$$

Oui mais voilà, étant donné qu'il semble improbable de n'avoir jamais rencontré l'inégalité(*)

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad 1-\cos u \leqslant \frac{u^2}{2},$$

alors que selon la récente a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad |u - \sin u| \leqslant \frac{u^2}{2},$$

il sera difficile de s'opposer à

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad B(t) \leqslant 4h^2t^2.$$

Comme l'intégrale A_2 des prolégomènes existe et vaut $\sqrt{\pi}/4$, et comme nous avons toujours le vent en poupe, nous sommes en mesure de déduire de ce qui précède que

$$|F(x+h)-F(x)+2hG(x)| \leqslant \sqrt{\pi}\,h^2,$$

et il ne reste plus qu'à proposer

$$C = \sqrt{\pi}$$

qui est bien un réel strictement positif, comme le savait déjà Archimède…

(*) Si, par le plus pur des hasards, ce n'était pas le cas, sachez que l'on peut la déduire de la question $3.a$, *modulo* la formule

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad 1-\cos 2a = 2\sin^2 a.$$

5.a. Soit une dernière fois x et h deux nombres réels. On déduit trèsmentalement de la précédente que

$$F(x+h) - F(x) + 2hG(x) = o(h),$$

ce qui est une des façons — celle du développement limité à l'ordre 1 — de justifier la dérivabilité de F au point x ainsi que l'égalité

$$F'(x) = -2G(x).$$

Comme cela vaut pour n'importe quel réel x, la fonction F est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a l'égalité fonctionnelle

$$F' = -2G.$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous venons d'apprendre que

$$F'(x) = -2\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin(2xt)dt,$$

et nous nous intéressons alors fortement aux fonctions

$$u : t \mapsto \sin(2xt) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto e^{-t^2}.$$

Elles sont sans l'ombre d'un doute de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a d'une part

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad u'(t) = 2x\cos(2xt) \quad \text{et} \quad v'(t) = -2te^{-t^2},$$

alors que d'autre part

$$u(t)v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad u(0)v(0) = 0,$$

le produit d'une fonction bornée par une fonction de limite nulle… Il résulte ainsi du théorème d'intégration impropre par parties et d'un *nanochouia* de linéarité que

$$F'(x) = -2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)dt,$$

ce qui devrait amplement nous combler.

↱ Nous rappelons au docile lecteur qu'il n'a pas le droit de pratiquer l'intégration par parties comme nous venons de le faire. Il devra officiellement partialiser, pratiquer la *by parts* sur l'intégrale partielle — qui est une intégrale sur un *segment* — puis légitimer un passage à la limite et nous lui confions la tâche ingrate…

c. À la lecture du projet, nous décidons de sortir de notre chapeau la fonction

$$x \mapsto e^{x^2}F(x)$$

que nous baptisons ϕ. Elle est sans aucun doute dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a sans surprise

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi'(x) = 2xe^{x^2}F(x) + e^{x^2}F'(x) = 0,$$

la dernière égalité reposant sur la toute dernière question. Comme $\mathbb{R}$ est un *intervalle*, nous déduisons que ϕ est une application *constante* et comme

$$\phi(0) = F(0) = A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

il est grand temps de changer de partie !

↱ Nous rebondissons sur l'argument « $\mathbb{R}$ est un *intervalle* » que nous venons de mentionner à l'instant. Il est absolument crucial. En effet, contrairement à ce que d'aucuns pourraient penser, une dérivée nulle sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$ n'entraîne pas la constance. Par exemple, la fonction μ de John Machin définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \mu(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x},$$

est dérivable à dérivée nulle, mais elle n'est pas constante. Citons, pour l'anecdote, que dans les années 1980, à un concours parisien, 98% des candidats l'ont déclarée constante ! De quoi rêver n'est-il pas…

Partie 2

Attention, et pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, il nous semble préférable de préciser que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas des multiples *entiers* de 2π, c'est-à-dire

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

6. Pour éviter de nous répéter, nous annonçons ici un entier $n \in \mathbb{N}$ qui nous servira pendant toute la deuxième partie.

a. Les *aficionados* de la fonction $\sin$ ne peuvent ignorer que l'on a l'équivalence logique

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \sin \frac{u}{2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D},$$

à telle enseigne que selon les théorèmes généraux, la fonction φ_n est carrément de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ et nous n'allons pas nous en plaindre. En outre, si l'on en croit l'équivalence *standard*

$$\sin \xi \underset{\xi \to 0}{\sim} \xi,$$

nous devrions avoir rapidement

$$\varphi_n(u) \xrightarrow[u \to 0]{} n + \frac{1}{2},$$

chronique d'un prolongement par continuité en 0 annoncé.

b. Il est indéniable que l'on a l'équivalence logique

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad u \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad u + 2\pi \in \mathcal{D}, \qquad (a)$$

et nous rappelons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x,$$

de telle manière que, presque mentalement

$$\forall u \in \mathcal{D}, \qquad \varphi_n(u+2\pi) = \varphi_n(u). \tag{b}$$

Les deux propriétés (a) et (b) stipulent, par définition, que φ_n est 2π-périodique sur $\mathcal{D}$ et comme, depuis peu, elle se prolonge par continuité en 0, elle va *périodiquement* le faire également en tous les $2k\pi$ où k appartient à $\mathbb{Z}$ et il se trouve que ce sont précisément les points qui nous manquaient…

↱ Le texte a décidé de noter encore φ_n la fonction prolongée, et vu tout ce que nous savons, la nouvelle fonction φ_n est donc définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sin(2n+1)u/2}{\sin u/2} & \text{si} \quad u \in \mathcal{D}, \\[2ex] n + \dfrac{1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

c. Soit u appartenant à $\mathbb{R}$. Nous devons nous organiser *un poquitín*.

▹ Si u appartient à $\mathcal{D}$, il est clair qu'il en est de même de $-u$, et au vu et au su de la première facette de φ_n et de l'imparité de la fonction $\sin$ nous réclamons

$$\varphi_n(-u) = \varphi_n(u).$$

▹ Si u n'appartient pas à $\mathcal{D}$, il en est bien sûr de même de $-u$ et l'on a encore

$$\varphi_n(-u) = \varphi_n(u),$$

puisque les deux lascars sont égaux à $n + 0.5$!

7.*a*. Soit u un nombre réel. Le parfum « géométrique » de la situation nous incite à ne pas perdre la *raison*…

▹ Si $e^{iu} \neq 1$, la *géomnémotechnique*

$$\frac{\text{premier terme écrit} - \text{premier terme non écrit}}{1 - \text{raison}}$$

stipule que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{iku} = \frac{e^{iu} - e^{i(n+1)u}}{1 - e^{iu}} = e^{iu} \times \frac{e^{inu} - 1}{e^{iu} - 1},$$

la dernière égalité procédant d'une simple mise en facteur. C'est maintenant grâce à l'une des formules dites de l'angle moitié, à savoir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{ix} - 1 = 2i \sin\frac{x}{2} e^{ix/2}$$

que l'on parviendra sans problème à

$$\sum_{k=1}^{n} e^{iku} = \frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}\, e^{i(n+1)u/2}.$$

▷ Si, en revanche, $e^{iu} = 1$, notre somme est égale à n.

↱ Le lecteur sans complexe est supposé savoir que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad e^{iu} \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad u \in \mathcal{D},$$

et nous saurons nous en souvenir.

b. Soit à nouveau $u \in \mathbb{R}$. La nouvelle somme en question n'est autre que la partie réelle de celle de la question précédente et par conséquent

▷ Si $u \in \mathcal{D}$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)} \cos((n+1)u/2).$$

Oui mais voilà, une quasi officielle formule trigonométrique relate que

$$\sin(nu/2)\cos((n+1)u/2) = \frac{1}{2}\sin((2n+1)u/2) - \frac{1}{2}\sin(u/2),$$

et l'on récupère effectivement

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

▷ Si $u \notin \mathcal{D}$, nous avons cette fois

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = n,$$

ce qui ne peut que nous satisfaire.

↱ Il est bon de noter que cette relation permet de retrouver la parité de la fonction φ_n.

c. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme il s'agit d'un nombre non nul, il ne fait aucun doute que

$$\int_0^{2\pi} \cos ku\, du = \left[\frac{\sin ku}{k}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

la fonction sinus s'annulant à l'est comme nous le savons bien. En conséquence, d'après la question précédente et la linéarité de l'intégration, nous avons

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \int_0^{2\pi} \frac{du}{2} = \pi.$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégrabilité de ψ sur n'importe quel segment de $\mathbb{R}$ repose sur sa continuité, et si, dans l'intégrale

$$\int_x^{x+T} \psi(u)du,$$

on envisage le changement de variable affine $u = x + v$, que le lecteur n'aura aucun mal à légitimer, on tombe exactement sur ce qui nous est demandé !

↱ Il s'agit d'une propriété bien connue de l'intégrale des fonctions périodiques. L'intégrale sur une période ne dépend pas de la période en question…

9.*a*. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous prenons nos deux séries l'une après l'autre.

▷ Nous avons d'une part

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad e^{\theta k} f(x + 2k\pi) = \exp\big(-\theta(x^2 + k(2x\pi - 1) + 4k^2\pi^2)\big).$$

Un argument polynomial providentiel indiquant que

$$-\theta(x^2 + k(2x\pi - 1) + 4k^2\pi^2) \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty,$$

il en ressort dans une première foulée que

$$e^{\theta k} f(x + 2k\pi) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

et dans une seconde, que

$$f(x + 2k\pi) = o(e^{-\theta k}).$$

Comme θ est *strictement* positif, la série géométrique

$$\sum_{k\geqslant 1} e^{-\theta k},$$

est convergente et à terme général positif et, selon le test de prépondérance en signe positif, la série

$$\sum_{k\geqslant 1} f(x + 2k\pi),$$

est effectivement convergente.

▷ C'est maintenant à la surprise générale, que la cousine

$$\sum_{k\geqslant 1} f(x - 2k\pi),$$

déclare sa convergence *mutatis mutandis*…

b. Soit x appartenant à $\mathbb{R}$. Nous avons

$$H(-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(-x + 2k\pi) + f(-x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(-x - 2k\pi),$$

et comme f est ouvertement paire, cela se métamorphose en

$$H(-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(x - 2k\pi) + f(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} f(x + 2k\pi) = H(x),$$

la dernière égalité procédant d'une simple ouverture des mirettes. Nous rappelons pour finir que, lorqu'une fonction paire est dérivable sur $\mathbb{R}$ sa dérivée est impaire *and so*…

10. Nous annonçons un entier naturel non nul N qui nous sera utile jusqu'à la fin de la troisième partie et nous demandons à notre lecteur de se convaincre que l'on a en réalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} f(x + 2k\pi),$$

ce qui est une plus jolie façon d'envisager les choses.

a. Nous mentionnons maintenant la continuité ambiante et la linéarité de l'intégration qui ne peuvent sûrement pas s'opposer à l'égalité

$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos nx \, dx = \sum_{k=-N}^{N} \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos nx dx.$$

Soit alors k appartenant à $[\![-N, N]\!]$. Grâce au changement de variable affine $x = u - 2k\pi$, que le lecteur n'aura aucun mal à légaliser, on trouve aisément que

$$\int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos nx \, dx = \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos nu \, du,$$

la 2π-périodicité de la fonction $\cos$ n'étant pas totalement étrangère à l'affaire, et voilà donc au bout du compte que

$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos nx \, dx = \sum_{k=-N}^{N} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos nu \, du,$$

et nous n'avons plus qu'à demander à Michel Chasles de faire correctement son travail.

b. À bien y regarder, la question précédente vient de révéler que

$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos nx \, dx = \int_0^{2(N+1)\pi} f(u) \cos nu \, du + \int_{-2N\pi}^{0} f(u) \cos nu \, du,$$

égalité qui, parce que l'intégrande

$$u \mapsto f(u) \cos nu$$

est manifestement *paire*, devient dans la foulée

$$\int_0^{2\pi} H_N(x) \cos nx \, dx = \int_0^{2(N+1)\pi} f(u) \cos nu \, du + \int_0^{2N\pi} f(u) \cos nu \, du.$$

Il est alors temps de s'intéresser à l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} f(u)\cos nu\,du \quad i.e. \quad \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2}\cos nu\,du.$$

Comme le réel θ est *strictement* positif son existence repose mentalement sur les arguments du préliminaire et nous pouvons alors effectivement revendiquer

$$\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos nx\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos nu\,du.$$

c. Il y a ici un peu de turbulence ! Tout d'abord, vu ce que nous allons être amenés à faire, il n'est pas du tout nécessaire de laisser x gambader dans l'immensité de $\mathbb{R}$, mais il paraît plus sage de le confiner au segment $[0, 2\pi]$. Ensuite, il y a une légère faute de frappe car on a en réalité

$$\forall x \in [0, 2\pi], \qquad |H(x) - H_N(x)| \leqslant 2\sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta k^2\pi^2},$$

et dans ces conditions, la preuve de notre affaire repose sur des considérations totalement élémentaires et nous laissons donc à notre dévoué lecteur, le soin de s'en dépatouiller.

d. La linéarité de l'intégration indique dans un premier temps que

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos nx\,dx - \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi}\big(H(x) - H_N(x)\big)\cos nx\,dx,$$

et d'après l'inégalité triangulaire intégrale et un *chouia* de croissance nous en déduisons que

$$\left|\int_0^{2\pi} H(x)\cos nx\,dx - \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant \int_0^{2\pi}\big|H(x) - H_N(x)\big|dx,$$

parce que $|\cos| \leqslant 1$ et que les bornes d'intégration vont dans notre sens. Grâce à la précédente et aux mêmes sempiternels arguments nous pouvons même aller très tranquillement jusqu'à

$$\left|\int_0^{2\pi} H(x)\cos nx\,dx - \int_0^{2\pi} H_N(x)\cos nx\,dx\right| \leqslant 4\pi\sum_{k=N}^{+\infty} e^{-4\theta k^2\pi^2}$$

Le reste d'une série convergente étant légendairement de limite nulle, il s'avère par *squeeze* que

$$\int_0^{2\pi} H_N(x)\cos nx\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} H(x)\cos nx\,dx,$$

et si l'on en croit la récente b et l'unicité de la limite, nous pouvons déjà revendiquer

$$\int_0^{2\pi} H(x)\cos nx\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(u)\cos nu\,du.$$

Cela étant, nous avons déjà évoqué le parfum de *consanguinité* entre cette dernière intégrale et ses consœurs de genre $F(x)$ des prolégomènes, et *via* le changement de variable affine

$$u = \frac{t}{\sqrt{\theta}},$$

que notre dévoué lecteur rendra très légitime, il se trouve que

$$2\int_0^{+\infty} f(u)\cos nu\,du = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos\Big(\frac{n}{\sqrt{\theta}}\,t\Big)\frac{dt}{\sqrt{\theta}},$$

ce qui, après avoir allumé allègrement les quinquets, devient tour à tour

$$2\int_0^{+\infty} f(u)\cos nu\,du = \frac{2}{\sqrt{\theta}}\times F\Big(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\Big) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}}\times\exp\Big(-\frac{n^2}{4\theta}\Big),$$

à notre plus grande satisfaction !

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le texte annonce un réel x et il utilise la même lettre comme variable *ghost*(*) pour noter l'intégrale a_n et cela risque de faire des étincelles. C'est la raison pour laquelle, et si cela ne dérange personne, nous préférerons écrire

$$a_n = \int_0^{2\pi} H(u)\cos nu\,du.$$

a. Il suffit encore d'un argument linéariste pour nous retrouver devant

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx = \int_0^{2\pi} H(u)\Big(1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos nx\cos nu\Big)du,$$

et selon une classique trigonométrique selon laquelle

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad 2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

et la jolie égalité de la question 7.*b*, tout cela devrait devenir

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx = \int_0^{2\pi} H(u)\big(\varphi_N(u+x) + \varphi_N(u-x)\big)du.$$

Il ne reste alors plus qu'à effectuer *the linear road* dans l'autre sens !

b. La première intégrale du *right hand side* de la précédente réclame, à cors et à cris, le changement de variable affine

$$u = v - x,$$

alors que la seconde exige le changement

$$u = v + x,$$

(*) C'est le nom que nous donnons aux variables dites « muettes » qui, malgré leur extrême efficacité dans l'art de la notation, ne sont que des dénis de réalité !

et après les avoir traditionnellement légitimés le lecteur téméraire devrait parvenir aisément à

$$a_0+2\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx=\int_x^{x+2\pi}H(v-x)\varphi_N(v)dv+\int_{-x}^{2\pi-x}H(v+x)\varphi_N(v)dv$$

C'est alors le moment de se remémorer les 2π-périodicités des fonctions H et φ_N ainsi que la délicieuse question 8 et de refaire un bout de route *in return* et le futur devrait ressembler à

$$a_0+2\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx=\int_0^{2\pi}\big(H(v+x)+H(v-x)\big)\varphi_N(v)dv.$$

Il faut maintenant que nous vous fassions une confidence. Nous vous rappelons qu'il y a en réalité *deux* fonctions φ_N, celle de la genèse qui était définie sur $\mathcal{D}$ et son prolongement par continuité à $\mathbb{R}$. Dans l'intégrale que nous venons de rencontrer, en l'occurrence

$$\int_0^{2\pi}\big(H(v+x)+H(v-x)\big)\varphi_N(v)dv,$$

figure le solide prolongement φ_N alors que si l'on s'aventure à l'écrire avec la version de la genèse, elle devrait ressembler à

$$\int_0^{2\pi}\big(H(v+x)+H(v-x)\big)\times\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}dv.$$

Compte tenu de tout ce que nous savons, cette dernière est faussement impropre et comme il est bien connu qu'une intégrale *faussement impropre* est égale à l'intégrale *propre* de la fonction prolongée, nous devons accepter l'idée selon laquelle

$$\int_0^{2\pi}\big(H(v+x)+H(v-x)\big)\varphi_N(v)dv=\int_0^{2\pi}\big(H(v+x)+H(v-x)\big)\times\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}dv,$$

et il est alors temps de passer à la question suivante.

c. Nous allons procéder en trois temps, et quelques mouvements !

▷ La continuité de K_x sur l'*ouvert* $]0,2\pi[$, n'est qu'une affaire ouverte de théorèmes généraux, puisque la continuité de H sur $\mathbb{R}$ a du être docilement admise.

▷ Il se trouve maintenant que nous n'avons pas admis que la continuité de H sur $\mathbb{R}$. Nous avons dû carrément accepter sa classe $\mathcal{C}^1$ — sa simple dérivabilité aurait d'ailleurs suffi — et selon le tandem Taylor-Young, nous avons au point x et lorsque v est au voisinage de 0

$$H(v+x)=H(x)+vH'(x)+o(v),$$

alors qu'en $-x$

$$H(v-x) = H(-x) + vH'(-x) + o(v),$$

cette dernière s'écrivant également

$$H(v-x) = H(x) - vH'(x) + o(v),$$

puisque, depuis la question 9.b la fonction H est paire et sa dérivée H' est impaire. Autant dire alors que

$$H(v+x) + H(v-x) - 2H(x) = o(v),$$

et il en résulte immédiatement que

$$K_x(v) \xrightarrow[\substack{v \to 0 \\ v>0}]{} 0,$$

vu que de façon très *standard*

$$\sin \frac{v}{2} \underset{v \to 0}{\sim} v.$$

Seulement voilà, le texte a décidé de $K_x(0) = 0$, et la continuité de K_x en 0 est définitivement *in the pocket*.

▷ Remarquons désormais que

$$\forall v \in]0, 2\pi[, \qquad K_x(2\pi - v) = K_x(v),$$

la 2π-périodicité et la parité de H, étant totalement responsables de cet état de choses et voilà donc, grâce à notre deuxième temps, que

$$K_x(v) \xrightarrow[\substack{v \to 2\pi \\ v<2\pi}]{} 0,$$

et comme le texte a dit que $K_x(2\pi) = 0$…

d. La question 7.c, écrite en version faussement impropre, révèle que

$$\pi = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(N + \dfrac{1}{2}\right)v}{2\sin \dfrac{v}{2}}\, dv,$$

et, *via* la toute récente question b, c'est tout à fait linéairement que la quantité

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx - 2\pi H(x)$$

est définitivement égale à l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2\sin \dfrac{v}{2}} \times \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)v\, dv.$$

Au risque de radoter, il s'agit encore d'une fausse impropre sur l'ouvert $]0, 2\pi[$ et la question précédente est justement là pour nous apprendre que le prolongement par continuité de son intégrande au segment $[0, 2\pi]$ est précisément

$$v \mapsto K_x(v) \times \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)v,$$

et nous n'avons plus rien à ajouter.

12.a. C'est l'inénarrable lemme de Riemann-Lebesgue que le lecteur affûté a forcément rencontré un jour de sa vie. Nous en rappelons les grandes lignes. On commence par annoncer *comfortably*(*) un réel *strictement* positif λ et l'on se précipite sur les deux fonctions

$$u : t \mapsto g(t) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto -\frac{\cos \lambda t}{\lambda},$$

dont la classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ est incontestable et dont les dérivées vérifient

$$\forall t \in [0, 1], \qquad u'(t) = g'(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \sin \lambda t.$$

Une intégration par parties plus loin et quelques envolées *nautiques* nous propulsent alors vers

$$\left| \int_0^1 g(t) \sin \lambda t \, dt \right| \leqslant \frac{\kappa}{\lambda},$$

où κ n'est autre que la constante

$$\kappa = |g(1)| + |g(0)| + \int_0^1 |g'|.$$

et il ne reste plus maintenant qu'à bénir le *squeezing process*.

↱ Le texte est assez obligé d'admettre le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction g qui n'est que continue, car la preuve en est beaucoup plus difficile que celle du cas de la classe $\mathcal{C}^1$, bien plus difficile en réalité !

b. Si l'on en croit le lemme de Riemann-Lebesgue version *boosted* et les récentes question c et d, il ne fait aucun doute que

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx - 2\pi H(x) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0,$$

ce que l'*aware serial* transforme déjà illico en

$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx = 2\pi H(x).$$

(*) Nous appelons hypothèse de confort toute supposition faites par nos soins qui doit nous apporter un réel bien-être tout en ne gênant aucunement la problématique. C'est, en mathématique, une pratique stratégique très courante !

Comme nous avons aperçu un peu plus haut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \times \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right),$$

et au vu et au su de la définition de $H(x)$, il suffit de quelques légers aménagements pour conclure en beauté.

↱ Si l'on ose faire des sommes sur $\mathbb{Z}$, le *right hand side* de la formule de Poisson peut très joliement s'écrire

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-\theta(x+2k\pi)^2}.$$

La classe !

13.a. Après mûre réflexion, voici ce que nous suggérons.

```
function v = jeu(p)
    i = 1 ;
    v = 1 ;
    s = 1 ;
    j = 1 ;
    while rand ( ) > p
        i = i + 1 ;
        j = j + 1 ;
        if j > s then v = −v ; // changement de main
                      s = s + 2 ;
                      j = 1 ; // réinitialisation du compteur
        end ;
    end ;
    if v == 1 then disp ("A vainqueur") ; else disp ("B vainqueur") ;
    end ;
endfunction
```

Nous illustrons le fonctionnement de notre trouvaille grâce à ce tableau décrivant l'évolution des variables i, v, s, j, au cours du temps et nous y avons même ajouté une variable a censée comptabiliser le nombre de participations de A aux différents lancers de la pièce. Nous avons signalé en **gras** les valeurs de la variable j strictement supérieures aux seuils s qui provoquent les changement de main et les colonnes correspondantes ont été dédoublées pour des raisons qui tombent sous le sens.

var	$init$	f^A		f^B	f^B	f^B		f^A	f^A	f^A	f^A	f^A	
i	1	2		3	4	5		6	7	8	9	10	
v	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1
s	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	7
j	1	**2**	1	2	3	**4**	1	2	3	4	5	**6**	1
a	0	1		1	1	1		2	3	4	5	6	

f^B	f^B	f^B	f^B	f^B	f^B	f^B		f^A	f^A	f^A	p^A
11	12	13	14	15	16	17		18	19	20	20
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
7	7	7	7	7	7	7	9	9	9	9	9
2	3	4	5	6	7	**8**	1	2	3	4	5
6	6	6	6	6	6	6		7	8	9	10

b. Il est limpide que à l'issue du processus, la variable i contient le nombre total de lancers de la pièce.

c. La variable v ne prend que les deux valeurs 1 et -1. Elle est initialisée à la valeur 1 et ensuite, elle prend la valeur 1 chaque fois que A joue et la valeur -1 lorsque c'est B qui est aux manettes. Elle bascule donc à chaque changement de main.

d. Voilà la complétion !

```
function v = jeu(p)
    i = 1;
    v = 1;
    s = 1;
    j = 1;
    a = 1;
    while rand () > p
        i = i + 1;
        j = j + 1;
        if v == 1 then  a = a + 1;
        end;
        if j > s then v = -v; // changement de main
                      s = s + 2;
                      j = 1; // réinitialisation du compteur
        end;
    end;
    if v == 1 then disp ("A vainqueur"); else disp ("B vainqueur");
    end;
endfunction
```

Nous donnons quelques explications. Dans le code, nous avons ajouté une nouvelle variable a dont le rôle est évidemment lumineux. À la ligne 6 du code nous initialisons a à la valeur 1 et à la ligne 10 on l'incrémente d'une unité chaque fois que A joue et puis c'est tout !

e. Nous allons classiquement utiliser la loi faible des grands nombres en choisissant de répéter 20000 fois l'expérience. Voici donc notre code qui va, l'on s'en doute bien, utiliser la fonction **jeu**

$m = 20000$;
$f = 0$;
$p =$ **input**(*' Probability of head please ? '*) ;
for $k = 1 : m$
if jeu $== 1$ **then** $f = f + 1$;
end ;
disp(f/m)

$14.a.$ Le contraire de l'événement $H \cup K$ est assurément l'événement

« La pièce donne un face à *tous* ses lancers »,

et nul ne peut ignorer qu'il s'agit là d'un événement de probabilité nulle car il a été supposé que p est situé dans l'*ouvert* $]0, 1[$. C'est en effet l'exemple le plus percutant, donné par tous les professeurs de France et de Navarre, d'un événement tout à fait *possible* ayant une probabilité nulle et ce, en liaison avec les variables aléatoires suivant une loi gémétrique, quand il a fallu justifier qu'une variable géométrique est *presque sûrement* à valeurs réelles. Il en résulte alors effectivement que

$$\mathrm{p}_p(H \cup K) = 1.$$

Quant à la somme $X + Y$, il s'agit tout bêtement du temps d'attente du premier pile(*) et nous retombons sur la loi géométrique de paramètre p dont nous venons de parler à l'instant et toute cette question n'est en réalité qu'une question de cours.

$b.$ Notons π_1 l'événement « Le premier lancer amène un pile ». Il est clair que

$$\pi_1 \subset H,$$

et la croissance de la probabilité assure alors que

$$\mathrm{p}_p(\pi_1) \leqslant \mathrm{p}_p(H) \leqslant 1,$$

la dernière égalité se passant *probablement* de tout commentaire. Cela s'écrit sans ambages

$$p \leqslant \mathrm{p}_p(H) \leqslant 1,$$

et la conclusion passe par un gentil *squeeze*.

$15.a.$ Nous allons nous intéresser au tranches « horaires » de jeu de nos deux acolytes, lorsqu'ils jouent bien sûr, et nous mentionnons que, pour un joueur et un instant donnés, il n'y a que deux raisons pour qu'il ne joue pas :

- ▷ ou bien ce n'est pas son tour ;
- ▷ ou bien la partie est terminée.

Nous noterons avec la lettre « *t* » les tranches horaires de A, et avec la lettre « *u* » celles de l'ami B.

(*) Il faut bien comprendre que l'on se fiche pas mal de qui lance la pièce. Tant que « pile » n'est pas sorti, la pièce est lancée !

C'est ainsi que pour les premières tranches, dans un ordre naturellement croissant, nous avons

$$\begin{aligned} t_0 &= \{1\} \\ u_0 &= \{2,3,4\} \\ t_1 &= \{5,6,7,8,9\} \\ u_1 &= \{10,11,12,13,14,15,16\} \\ t_2 &= \{17,18,19,20,21,22,23,24,25\} \\ u_2 &= \{26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36\} \end{aligned}$$

Le lecteur observateur aura sûrement capté que toutes ces tranches on un nombre impair d'éléments et que leur dernier *gugusse* est un carré parfait !

Il faut alors impérativement trouver à quoi ressemblent t_n et u_n lorsque n est un entier naturel quelconque et comme c'est un petit jeu très amusant et pas vraiment revêche, nous le laissons au dévouement de notre lecteur qui, à la surprise générale, débusquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \{4n^2+1, 4n^2+2, \ldots, 4n^2+4n+1\},$$

alors que

$$u_n = \{4n^2+4n+2, 4n^2+4n+3, \ldots, 4n^2+8n+4\},$$

ce qui peut également s'écrire

$$t_n = [\![4n^2+1, 4n^2+4n+1]\!] \quad \text{et} \quad u_n = [\![4n^2+4n+2, 4n^2+8n+4]\!].$$

↱ Les nombres d'éléments de t_n et u_n sont respectivement

$$4n+1 \quad \text{et} \quad 4n+3,$$

qui sont bien des nombres impairs, alors que, si l'on écoute le potache de la classe de quatrième, leurs derniers *gugusses* respectifs sont

$$(2n+1)^2 \quad \text{et} \quad (2n+2)^2,$$

qui sont assurément des carrés parfaits.

Cela étant, l'inclusion demandée est limpide et d'ailleurs, si l'on parle bien de rangs *possibles*, il semble bien que ce soit même une égalité.

b. Nous nous organisons *un poquitín*.

▷ Tout d'abord, pour chaque entier naturel n, nous notons naturellement H_n l'événement

« A gagne durant la tranche t_n ».

▷ Ensuite, comme la tranche t_n s'est révélée de longueur $4n+1$, pour chaque entier i situé entre 1 et $4n+1$, nous notons $H_{n,i}$ l'événement

« A gagne au $i^{\text{ième}}$ coup de la tranche t_n ».

▷ Enfin, et comme cela se pratique assez souvent, nous notons

$$q = 1 - p.$$

Tout cela étant dit, et compte tenu des *game rules*, nous espérons ne froisser personne en proclamant que

$$H = \bigcup_{n=0}^{+\infty} H_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n = \bigcup_{i=1}^{4n+1} H_{n,i},$$

les ensembles à chaque fois réunis, étant ouvertement deux à deux disjoints(*). La σ-additivité de la probabilité entraîne alors que

$$\mathrm{p}_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{p}_p(H_n),$$

alors que son additivité toute bête amène quant à elle à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{p}_p(H_n) = \sum_{i=1}^{4n+1} \mathrm{p}_p(H_{n,i}).$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, 4n+1]\!]$. La réalisation de l'événement $H_{n,i}$ nécessite ni plus ni moins que

▷ l'obtention de « faces » sur la *totalité* des tranches horaires précédentes, ce qui, à bien savoir compter, représente $4n^2$ lancers ;

▷ l'obtention à nouveau de « faces » sur les $i-1$ lancers suivants ;

▷ l'obtention enfin d'un « pile » au lancer d'après.

Si l'on en croit la tacite indépendance des lancers on devrait alors se ravir déjà de

$$\mathrm{p}_p(H_{n,i}) = p\, q^{4n^2+i-1}.$$

Maintenant, parce que q est différent de 1 et que les *sumgeometers* connaissent sur le bout des doigts la *mnémotechnique*

$$\frac{\text{premier terme écrit} - \text{premier terme non écrit}}{1 - \text{raison}}$$

c'est *via* un *chouia* de linéarité que nous réclamons les égalités

$$\mathrm{p}_p(H_n) = p\, q^{4n^2} \frac{1 - q^{4n+1}}{1-q} = q^{4n^2} - q^{4n^2+4n+1},$$

(*) Il est vrai que les probabilistes parlent de réunions — ou même d'unions — « disjointes » mais un ami pointilleux m'a fait un jour remarquer que, sur le plan de la correction de la langue, c'est quand même pousser le bouchon un peu loin !

la toute dernière procédant de quelques bénins aménagements, à telle enseigne qu'apparaît enfin la sublimissime

$$\mathfrak{p}_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^{4n^2} - q^{4n^2+4n+1}\right),$$

qui ne peut que nous remplir de joie. Ce n'est alors que du pur *mutatis mutandis* que de parvenir à

$$\mathfrak{p}_p(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^{4n^2+4n+1} - q^{4n^2+8n+4}\right),$$

et au vu et au su de ce qui va suivre, il est préférable de changer un peu l'aspect des choses, puisque, à bien y regarder

$$\mathfrak{p}_p(H) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^{(2n)^2} - q^{(2n+1)^2}\right) \quad \text{et} \quad \mathfrak{p}_p(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^{(2n+1)^2} - q^{(2n+2)^2}\right).$$

↱ Nous pouvons aisément déduire de ce qui précède que

$$\mathfrak{p}_p(H) + \mathfrak{p}_p(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^{(2n)^2} - q^{(2n+2)^2}\right),$$

et le lecteur maîtrisant souverainement les séries télescopiques en ressortira sans broncher que

$$\mathfrak{p}_p(H) + \mathfrak{p}_p(K) = 1,$$

ce qui donne une nouvelle preuve de la première avancée de la question $14.a$.

$16.a$. Nous partons de la formule sommatoire de Poisson écrite sous la forme

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2/4\theta} \cos nx\right) - \frac{1}{2} = \sqrt{\pi\theta}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\theta(x+2k\pi)^2}\right), \tag{4}$$

grâce à l'audace dont nous avons fait preuve à l'époque et nous y choisissons tout d'abord

$$x = \pi$$

puis θ pour qu'il réalise le miracle

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^{-n^2/4\theta} = q^{n^2},$$

ce qui revient mentalement à choisir

$$\theta = -\frac{1}{4\ln q}.$$

Ces deux choix sont évidemment légal pour le premier et également pour le second vu la position idyllique de q. Selon les *east-west properties* du cosinus, particulièrement

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \qquad \cos m\pi = (-1)^m,$$

le premier membre de la récente égalité (4) devient miraculeusement(*)

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2}\right) - \frac{1}{2},$$

et la *stricte* positivité du second *is as plain as the nose on your face !*

Il est alors grand temps de passer à la toute dernière question.

b. Nous rappelons un important lemme de théorie des séries.

LEMME DE GROUPEMENT DEUX PAR DEUX

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. Si la série* $\sum u_n$ *converge, il en est de même de la série*

$$\sum_{n\geqslant 0}(u_{2n}+u_{2n+1}),$$

et l'on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{2n}+u_{2n+1}).$$

La preuve de ce lemme est plutôt élémentaire et nous la laissons donc au…

Contre toute attente, nous choisissons de définir (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (-1)^n q^{n^2}.$$

Vu la position paradisiaque géographique de q nous pouvons clamer la convergence de la série $\sum u_n$ puisque sans sourciller, nous mettons en avant les arguments suivants.

- ▹ On a incontestablement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant q^n.$$

- ▹ Les séries géométriques sont totalement maîtrisées.
- ▹ Il existe sur le marché un test de comparaison en signe positif.
- ▹ Les séries absolument convergentes sont convergentes.

Notre gentil lemme et une intervention musclée du *physio* font alors que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n q^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(q^{(2n)^2} - q^{(2n+1)^2}\right) = \mathrm{p}_p(H),$$

à tel point que, selon la précédente

$$\mathrm{p}_p(H) > \frac{1}{2}.$$

Ce jeu avantage donc le joueur A.

↱ De toute façon, comme A joue en premier, on pouvait se douter qu'il en était avantagé, mais là, nous en avons la preuve formelle !

(*) Nous plaisantons ! Nous avons tout fait pour !