CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, *external lecturer* à ESSEC Business School (jlroque@me.com).

Partie 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous observons avant toute chose que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \deg B_{n,k} = n.$$

En conséquence, la famille

$$(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$$

est définitivement formée de polynômes appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$.

En outre, au vu et au su ce que nous venons de narrer, il apparaît que T_n applique très tranquillement $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui même et sa linéarité n'est qu'une mince affaire de distributivité, de *définition* des opérations fonctionnelles et de *summation linearity*. En bref, T_n est un authentique endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, pour chaque entier naturel k, le monôme X^k est ainsi noté depuis au moins l'année de naissance de l'arrière-grand-mère de Matusalem et nous ne voyons pas l'intérêt de le noter autrement.

Toutes ces choses, nous ne les redirons plus !

1.a. Nous avons très naturellement

$$B_{2,0} = 1 - 2X + X^2 \quad ; \quad B_{2,1} = 2X - 2X^2 \quad ; \quad B_{2,2} = X^2,$$

et quand on maîtrise la notion de matrices des familles, on doit revendiquer

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

b. La matrice K_2 est trigonalement inversible, vu que ses diagonales *entries* sont différentes de 0. On doit facilement en déduire que ses colonnes forment une famille libre, liberté qui se transmet automatiquement à

$$(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2}).$$

Celle-ci est désormais une famille dans $\mathbb{R}_2[X]$, libre et de longueur 3. Comme cette dernière est précisément la dimension de notre espace polynomial, la famille

$$(B_{2,0}, B_{2,1}, B_{2,2})$$

est effectivement une base de $\mathbb{R}_2[X]$, comme en atteste la caractérisation des bases en dimension finie.

c. Notre valeureux lecteur trouvera sans stress

$$T_2(1) = 1 \quad ; \quad T_2(X) = X \quad ; \quad T_2 = \frac{X + X^2}{2},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 183 13/10/2017 11:35

et grâce au protocole de *matricialisation*, nous parviendrons ensemble à

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

C'est assez *trigonalement* que nous assénons

$$\operatorname{Spec} H_2 = \{1, 1/2\}$$

et après quelques résolutions de systèmes, il n'est pas vraiment difficile de parvenir à

$$\mathsf{E}_1(H_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathsf{E}_{1/2}(H_2) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Nous avons ici les éléments propres de la *matrice* H_2 et ceux de l'*endomorphisme* T_2 s'en déduisent, mot à mot, par traduction canonique. *Here you are !*

$$\operatorname{Spec} H_2 = \{1, 1/2\}$$

$$\mathsf{E}_1(T_2) = \operatorname{Vect}(1, X) \quad \text{et} \quad \mathsf{E}_{1/2}(T_2) = \operatorname{Vect}(X^2 - X)$$

2.a. Afin de nous simplifier la vie, nous considérons les cousins β_k où

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \beta_k = X^k(1 - X)^{n-k}$$

et nous commençons par traiter la question pour la famille allégée

$$(\beta_0, \ldots, \beta_n)$$

également située dans notre cher $\mathbb{R}_n[X]$. Nous attaquons par la liberté en proposant trois méthodes.

LA MÉTHODE MATRICE DES FAMILLES

C'est la généralisation de ce que nous avons développé à la récente question 1.a. Pour chaque entier $k \in [\![0, n]\!]$, Isaac Newton nous apprend que

$$\beta_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} X^{k+i} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n-k}{i-k} X^i,$$

et nous en déduisons que la matrice de notre nouvelle famille dans la base $\mathcal{C}_n$ est trigonale inférieure ses diagonales *entries* étant tout bêtement égales à 1. Il s'agit donc d'une matrice inversible et notre liberté s'en déduit par l'argumentation affichée lors de la question 1.a.

LA MÉTHODE DE VALUATION

Elle permet de réparer une très injuste discrimination de notre bible officielle. Pour un polynôme non nul P, il y a certes son terme non nul de plus *grande* puissance, mais il y a également son terme non nul de plus *petite* puissance. La plus grande puissance en question est officielle, elle s'appelle « degré » de P et se note $\deg P$. Curieusement, la plus petite puissance en question est sauvagement ignorée, elle s'appelle pourtant « valuation » du polynôme P et se note $\mathrm{val}(P)$.

Par exemple le polynôme

$$P = \sum_{i=13}^{6174} X^i$$

est de degré 6174 et de valuation 13.

Cela étant, nul ne peut ignorer que toute famille de polynômes non nuls ayant des *degrés* deux à deux distincts est une famille libre, et l'on démontre, *mutatis mutandis*, que c'est également le cas des familles de polynômes non nuls ayant des *valuations* deux à deux distinctes. Comme c'est ouvertement le cas de la famille $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$, nous pouvons nous tourner vers la troisième méthode.

LA MÉTHODE DE L'OPÉRATEUR

Elle va sembler copieusement parachutée, mais elle fortement inspirée de la propriété que le texte nous demande docilement d'admettre quelques lignes plus bas.

On considère l'opérateur U qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe

$$U(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP.$$

Comme la dérivation envoie linéairement $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, il est sereinement acquis que U est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et il est très facile de constater que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad U(X^k) = \frac{k}{n}X^k + \frac{n-k}{n}X^{k+1},$$

la *polynomiale attitude* ayant exigé de traiter à part la position $k = 0$. Grâce à un énorme coup de chance lorsque $k = n$, nous en déduisons que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad U(X^k) \in \mathbb{R}_n[X],$$

et il n'en faut pas plus pour asséner que U *stabilise* $\mathbb{R}_n[X]$. Nous avons alors le droit et le devoir de considérer l'endomorphisme u que U induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ et cela dessine un nouveau venu

$$u \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}_n[X]\big),$$

opérateur ô combien sympathique, car après quelques calculs anodins, le lecteur assidu finira(*) par découvrir que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad u(\beta_k) = \frac{k}{n}\beta_k.$$

Parce qu'ils sont évidemment non nuls, les vecteurs $\beta_0, \ldots, \beta_n$, sont désormais des vecteurs propres de l'adorable u, attachés à des valeurs propres qui ont bien l'air d'être

(*) Il devra cependant, au nom de la *polynomiale attitude*, distinguer les trois situations $k{=}0, k{=}n$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

deux à deux distinctes. Et, comme nous le savons bien, cela est aussi un sérieux gage de liberté ! La famille $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$, désormais libre et de longueur $n+1$, est une *genuine* base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ puisque ce dernier est précisément de dimension $n+1$ et que, au risque de radoter, il existe sur le marché une précieuse caractérisation des bases en dimension finie.

Notons pour en terminer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad B_{n,k} = \binom{n}{k}\beta_k,$$

et que les coefficients du binôme que nous avons sous notre nez ne sont absolument pas nuls. En conséquence, le propriétés acquises par la famille (β_k) — la liberté, puis la *basitude* — se transmettent de façon filiale à sa cousine

$$(B_{n,0}, B_{n,1}, \ldots, B_{n,n})$$

et nous pouvons envisager la suite.

b. Soit P appartenant au noyau de T_n, ce qui se traduit par

$$\sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big) B_{n,k} = 0.$$

La famille $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ étant depuis peu libre comme l'air, nous nous devons d'en déduire allègrement que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P\Big(\frac{k}{n}\Big) = 0.$$

Ainsi et à bien y regarder, le polynôme P vient de s'enticher de $n+1$ racines apparemment deux à deux distinctes et comme il appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, il ne peut s'agir que du polynôme nul. L'endomorphisme T_n est donc désormais injectif et comme l'espace ambiant est de dimension finie, il gagne ses galons d'automorphisme, comme l'affirme la caractérisation des automorphismes en dimension finie.

c. Nous avons tout d'abord

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + 1 - X)^n = 1$$

la mécanique *newtonienne* ayant été fortement mise à contribution. Pour la suite, nous commençons par annoncer $x \in [0, 1]$ et nous observons que

$$T_n(X)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ce qui permet au *physio* de revendiquer, *binomialement*, les égalités

$$T_n(X)(x) = \frac{1}{n}\mathrm{E}\big(\mathcal{B}(n, x)\big) = x.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 186 13/10/2017 11:35

Les deux polynômes $T_n(X)$ et X coïncident donc sur $[0,1]$ et comme ce dernier est un ensemble *infini*, il ne fait plus aucun doute que

$$T_n(X) = X.$$

d. Comme nous n'aimons pas trop admettre les choses nous allons démontrer la grosse égalité en question et c'est l'occasion de ressortir le gentil endomorphisme u et les polynômes β_i mis en place quelques lignes plus haut. Soit donc k appartenant à $[\![0, n-1]\!]$. Nous avons par définition

$$T_n(X^k) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \binom{n}{i} \beta_i$$

L'application de la linéaire u fait alors que

$$u\big(T_n(X^k)\big) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \binom{n}{i} u(\beta_i)$$

et comme nous n'avons pas oublié l'extrême propreté des β_i selon laquelle

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad u(\beta_i) = \frac{i}{n}\,\beta_i,$$

nous atterrissons sur

$$u\big(T_n(X^k)\big) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^{k+1} \binom{n}{i} \beta_i = T_n(X^{k+1}),$$

la dernière égalité procédant d'une formelle reconnaissance faciale ! La grosse égalité admise par le texte est donc désormais avérée et c'est bien.

Nous revenons maintenant à nos ovins en traitant à part la situation $k = 0$, puis en procédant par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$.

▷ Vu que depuis peu $T_n(1) = 1$, notre cas singulier est réglé.

▷ Nous avons également vu récemment que $T_n(X) = X$, ce qui initialise parfaitement notre récurrence.

▷ Supposons pour finir que, pour un entier k vérifiant(*)

$$1 \leqslant k < n,$$

nous ayons $\deg T_n(X^k) = k$. Notons a le coefficient dominant de $T_n(X^k)$ et nous faisons valoir que quasi mentalement

$$\frac{1}{n} X(1-X)\big(T_n(X^k)\big)' = -\frac{ak}{n} X^{k+1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{\text{termes de degré } \leqslant k}$$

(*) Ce sont les nécessités inévitables de la récurrence finie !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 187 13/10/2017 11:35

alors que

$$XT_n(X^k) = aX^{k+1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\textit{termes de degré} \leqslant k}$$

Il ressort de ce magma et de la grosse égalité que

$$T_n(X^{k+1}) = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)aX^{k+1} + \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\textit{termes de degré} \leqslant k}$$

et comme nos hypothèses obligent

$$\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)a \neq 0,$$

notre inductive affaire semble bien engagée.

e. Nous venons d'apprendre à l'instant que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \alpha_{k+1} = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)\alpha_k$$

et il se trouve providentiellement que cette égalité reste d'actualité lorsque $k = 0$. Nous avons donc en réalité

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad \alpha_{k+1} = \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)\alpha_k$$

Il est alors très facile de conjecturer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \alpha_k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{n^k},$$

où A_n^k est l'arrangement bien connu et la preuve de cela s'effectuera par récurrence finie sur $k \in [\![0, n]\!]$, tâche laissée à la charge de notre très dévoué lecteur.

Il reste à causer de diagonalisation. Il résulte de la récente d et du début de la présente, que la matrice H_n de l'endomorphisme T_n dans la base canonique est trigonale supérieure et que les éléments diagonaux de cette matrice sont justement les réels α_k que nous venons de croiser. Seulement voilà, il est très facile de constater qu'en réalité le contexte est le suivant

$$1 = \alpha_0 = \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n,$$

à telle enseigne que les *différentes* valeurs propres de T_n sont au nombre de n et sont exactement

$$1 \quad ; \quad \alpha_2 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \alpha_n.$$

Nous mettons alors en avant deux choses capitales.

▷ Comme depuis le récent 2.*c*, les deux vecteurs 1 et X appartiennent à $\mathrm{E}_1(T_n)$ et parce que la famille $(1, X)$ est libre, nous arguons déjà que

$$\dim \mathrm{E}_1(T_n) \geqslant 2$$

▷ Vu que — *never forget !* — un sous-espace propre n'est jamais nul, nous nous arrogeons également

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \qquad \dim \mathsf{E}_{\alpha_k}(T_n) \geqslant 1.$$

Il en résulte sans trembler que

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) \geqslant n+1,$$

ou encore

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) \geqslant \dim \mathbb{R}_n[X], \qquad (1)$$

et il est maintenant l'heure de rappeler aux amnésiques le dogme suivant :

LA RÈGLE DU NON-DÉPASSEMENT

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et ϕ un endomorphisme de E. Toute somme de dimensions d'espaces « genre » $\mathsf{E}_\lambda(\phi)$ attachés à des scalaires λ deux à deux distincts ne peut, en aucun cas, dépasser la dimension ambiante, en l'occurrence $\dim E$.

Comme nous avons précisé que $1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$, sont précisément deux à deux distincts, il résulte de cette précieuse règle que

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) \leqslant \dim \mathbb{R}_n[X]. \qquad (2)$$

La synthèse des inégalités (1) et (2) est alors élogieuse. Nous avons la superbe

$$\dim \mathsf{E}_1(T_n) + \dim \mathsf{E}_{\alpha_2}(T_n) + \cdots + \dim \mathsf{E}_{\alpha_n}(T_n) = \dim \mathbb{R}_n[X],$$

qui, comme nous le savons bien, est une nécessaire suffisance de diagonalisabilité de T_n appelée parfois « condition du comptable ».

3. Nous commençons par un peu de culture en précisant que les polynômes

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

sont appelés polynômes de Serge Bernstein attachés à la fonction f. Nous allons bientôt découvrir une propriété qui les relie étroitement à la fonction f.

Un peu de patience donc…

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable $\overline{Z}_n$ étant finie, elle possède des moments de tous les ordres et nous avons en particulier la linéaire

$$\mathsf{E}(\overline{Z}_n) = \frac{\mathsf{E}(Z_n)}{n} = z,$$

puis la quadratique

$$\mathsf{V}(\overline{Z}_n) = \frac{\mathsf{V}(Z_n)}{n^2} = \frac{z(1-z)}{n},$$

le côté $\mathcal{B}(n, z)$ de Z_n ayant éveillé quelques uns de nos souvenirs.

Soit alors $\epsilon > 0$. Vu ce que nous venons de narrer, l'inégalité de Jules Bienaymé et Pafnouti Tchebychev, appliquée ici à la variable $\overline{Z}_n$, s'écrit sur-le-champ

$$\mathrm{p}\big(|\overline{Z}_n - z| > \epsilon\big) \leqslant \frac{z(1-z)}{n\epsilon^2},$$

et il en résulte *by squeeze* que

$$\mathrm{p}\big(|\overline{Z}_n - z| > \epsilon\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

chronique d'une convergence en probabilité annoncée...

b. La fonction $|f|$ est, comme sa consœur f, *continue* sur le *segment* $[0, 1]$. Un important théorème d'optimisation de Karl Weierstrass stipule alors qu'elle y possède un maximum.

↱ Nous rassurons notre lecteur en indiquant qu'elle y possède également un minimum, mais que celui-ci ne doit pas passionner les foules à cet endroit...

c. Au vu et au su de son côté binomial, les valeurs de la variable Z_n appartiennent au segment $[0, n]$ et celles de sa dulcinée $\overline{Z}_n$ se situent, quant à elles, dans $[0, 1]$ qui se trouve être précisément le domaine de définition de f. La composition $f(\overline{Z}_n)$ est donc parfaitement définie et c'est une bonne chose.

Cependant l'histoire ne dit pas vraiment pourquoi U_n est véritablement un événement mais, pour ne pas perturber le déroulement des opérations, nous le prendrons pour argent comptant. Procédons au baptême

$$h = 2M\mathbf{1}_{U_n} + \epsilon\,\mathbf{1}_{\overline{U}_n}$$

et annonçons $\omega \in \Omega$. Il nous faut tout d'abord observer que, très *triangulairement*, nous pouvons avancer que

$$\big|f(\overline{Z}_n(\omega)) - f(z)\big| \leqslant \big|f(\overline{Z}_n(\omega))\big| + \big|f(z)\big| \leqslant 2M$$

On passe alors à la phase organisationnelle.

▷ Si ω appartient à U_n, nos *indics* nous informent que

$$\mathbf{1}_{U_n}(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{\overline{U}_n}(\omega) = 0,$$

à telle enseigne que

$$h(\omega) = 2M.$$

Vu un certain triangle *supra*, l'inégalité

$$\big|f(\overline{Z}_n(\omega)) - f(z)\big| \leqslant h(\omega)$$

est d'actualité dans ce premier cas.

▷ Si ω appartient à $\overline{U}_n$, nous avons *a contrario*

$$\big|f(\overline{Z}_n(\omega)) - f(z)\big| \leqslant \epsilon,$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 190 13/10/2017 11:35

et comme nous sommes cette fois informés que $h(\omega) = \epsilon$, nous pouvons envisager la suite.

d. Nous conservons les dispositions de la question précédente en y apportant l' évidente amélioration selon laquelle

$$\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right| \leqslant 2M\mathbf{1}_{U_n} + \epsilon,$$

les indicatrices ayant rarement l'occasion de dépaser 1 ! La finitude de nos variables nous donnant toute raison d'espérer, la précieuse *linéacroissance* du *green operator* amène tranquillement et dans un premier temps à

$$\mathsf{E}\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right| \leqslant 2M\mathrm{p}(U_n) + \epsilon.$$

L'officielle inégalité triangulaire de l'espérance se charge, quant à elle, de nous rappeler que

$$\left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n) - f(z)\big)\right| \leqslant \mathsf{E}\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right|$$

inégalité qui, profitant d'une gentille linéarisation à gauche, se métamorphose en

$$\left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) - f(z)\right| \leqslant \mathsf{E}\left|f(\overline{Z}_n) - f(z)\right|,$$

ce qui, transitivement, nous amène *in fine* à

$$\left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) - f(z)\right| \leqslant 2M\mathrm{p}(U_n) + \epsilon. \tag{3}$$

La question 3.a nous a permis d'apprendre que

$$\overline{Z}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} z,$$

et le fantastique théorème de la fonction continue(*) assure alors que

$$f(\overline{Z}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{P}} f(z),$$

Il en émane tout naturellement que

$$2M\mathrm{p}(U_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui, de manière *epsilontik*, produit un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 2M\mathrm{p}(U_n) \leqslant \epsilon.$$

Il résulte alors de l'inégalité (3) *supra* que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \left|\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) - f(z)\right| \leqslant 2\epsilon,$$

(*) Il eut cependant officiellement fallu que f soit continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais comme elle l'est sur le *segment* $[0,1]$, il ne doit pas être insurmontable de la prolonger à $\mathbb{R}$, en toute continuité, s'entend…

et même si l'honneur n'est pas sauf — on termine sur 2ϵ et non sur ϵ ! —, nous avons bel et bien fini par établir que

$$\mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z).$$

Il reste alors à ne pas avoir égaré le théorème de transfert qui rend compte de l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big) = f_n(z),$$

qui n'est pas vraiment pour nous déplaire.

↱ Nous avons finalement démontré que, lorsque f est continue sur $[0,1]$, la suite des polynômes de Bernstein converge *simplement* vers f sur $[0,1]$, ce qui signifie tout bêtement que

$$\forall z \in [0,1], \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$$

Ce résultat a été obtenu à la fin du récent d.

Ainsi, pour *toute* fonction f continue sur $[0,1]$, il existe une suite de *polynômes* qui converge *simplement* vers f sur $[0,1]$. Ce résultat pourrait être appelé « théorème d'approximation de Weierstrass » du pauvre, car le vrai, le beau, le grand théorème de Karl assure qu'en réalité, il existe une suite de *polynômes* qui converge *uniformément*(*) vers f sur $[0,1]$, ce qui est *more amazing !*

4.a. C'est dans un « *grand* » élan *scylabic* que nous proposons

```
function Z = binom(n, z)
    Z = grand(1, 1,'bin', n, z)
endfunction
```

b. Signalons, et pas que pour le *fun*, que la fonction f ici choisie, est bien continue sur le segment $[0,1]$, la raison essentielle étant que, selon une très classique prépondérance, nous avons

$$x \ln x \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0.$$

Cela étant, pour chaque entier $k \in [\![1,N]\!]$, le $k^{\text{ième}}$ passage dans notre boucle **for** ajoute à S une simulation d'une variable aléatoire, mettons $f(\overline{Z}_{n,k})$ de même loi que $f(\overline{Z}_n)$ à telle enseigne que le *display* final simulera

$$\frac{f(\overline{Z}_{n,1}) + f(\overline{Z}_{n,2}) + \cdots + f(\overline{Z}_{n,N})}{N}.$$

En outre, les différents appels à **binom**(n,z) sont *informatiquement* indépendants, et grâce au lemme des coalitions, nous pouvons espérer l'indépendance des $f(\overline{Z}_{n,k})$. La sempiternelle finitude ambiante faisant que $f(\overline{Z}_n)$ possède une variance, la loi faible des grands nombre répond à l'appel en stipulant que

$$\frac{f(\overline{Z}_{n,1}) + f(\overline{Z}_{n,2}) + \cdots + f(\overline{Z}_{n,N})}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{\mathcal{P}} \mathsf{E}\big(f(\overline{Z}_n)\big).$$

(*) Le lecteur curieux désirant savoir ce qu'est une telle convergence pourra avantageusement saisir la locution « convergence uniforme » dans son *favorite search engine* et essayer d'en décrypter toute la nuance !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 192 13/10/2017 11:35

Le code en question affiche donc une valeur approchée de l'espérance de $f(\overline{Z}_n)$, et la méthode employée ici a de sérieuses origines monégasques !

Partie 2

$5.a.$ Nous nous organisons en trois temps.

▷ Quand on sait bien compter, il est clair que Φ applique bien $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, une des raisons essentielles étant que les fonctions polynômes sont définies *partout, partout !*

▷ La linéarité de Φ n'est qu'une formalité s'appuyant uniquement sur les *définitions* des opérations sur les polynômes et sur les listes.

▷ Soit P appartenant à $\operatorname{Ker}\Phi$. Autant dire alors que

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0,$$

ce qui, au vu et au su de nos hypothèses, procure au polynôme P pas moins de $n+1$ racines différentes. Vu sa situation géographique — au cœur de $\mathbb{R}_n[X]$ — son avenir est plutôt sombre et nous avons donc

$$\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}.$$

L'application linéaire Φ est donc désormais injective, mais comme $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont deux espaces vectoriels réels ayant, officiellement, la *même* dimension finie, en l'occurrence l'entier $n+1$, la conclusion passe par la rocambolesque caractérisation des isomorphismes en *même* dimension finie.

$b.$ Soit i appartenant à $[\![0,n]\!]$, grâce au lumineux « *delta* » de Leopold Kronecker, nous avons

$$e_i = (\delta_{ik})_{0\leqslant k\leqslant n}$$

et la désormais bijectivité de Φ cautionne l'existence — et aussi l'unicité ! — de ce polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ qui, vérifie en fin de compte

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad L_i(x_k) = \delta_{ik}. \tag{δ}$$

Il en résulte, en particulier, que les x_k pour lesquels $k \neq i$ sont des racines *différentes* du polynôme L_i, et comme ce dernier est situé dans $\mathbb{R}_n[X]$ et que nous savons bien compter, il doit exister une constante $c \in \mathbb{R}$, telle que

$$L_i = c\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(X - x_k).$$

Comme nous avons également $L_i(x_i) = 1$, on a obligatoirement

$$c = \frac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(x_i - x_k)},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 193 13/10/2017 11:35

à telle enseigne qu'effectivement

$$L_i = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}.$$

↱ Les polynômes L_i sont les fameux polynômes de Joseph-Louis Lagrange attachés à la liste *sans répétition* $(x_0, \ldots, x_n)$. La propriété selon laquelle

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \qquad L_i(x_k) = \delta_{ik},$$

est à n'en pas douter, le plus important attribut de ce genre de polynômes. Nous nous y référerons sous le nom de δ-*property*.

c. Nous attaquons l'affaire en cinq points.

▷ Les fonctions polynomiales étant définies *partout, partout*, il est manifeste que Ψ applique bien $\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.

▷ La symétrie de Ψ se passe de tout commentaire.

▷ On fixe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. La linéarité de l'application

$$P \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

repose essentiellement sur celle de la sommation épaulée au passage par la *définition* des opérations sur les polynômes et par un *nanochouia* de distributivité.

▷ La positivité de Ψ est « genre » le nez au milieu de la figure.

▷ Soit pour finir $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\Psi(P, P) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} P^2(x_k) = 0.$$

Le sempiternel argument des sommes nulles de réels positifs ou nuls obligeant inéluctablement

$$P(x_0) = P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0,$$

nous concluons que $P = 0$ puisqu'il appartient au noyau de l'injection Φ rencontrée, chemin faisant(*), quelques lignes plus haut.

↱ Ce produit scalaire a également son lot de célébrité. C'est celui de Joseph-Louis attaché à la liste

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Il nous faut maintenant causer d'orthonormalité. Nous nous y prenons en deux temps.

(*) *Pan, pan !*

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 194 13/10/2017 11:35

▹ Soit i et j deux entiers appartenant à $[\![0,n]\!]$, Grâce à l'incontournable δ-*property* lagrangienne, nous avons tour à tour

$$\Psi(L_i,L_j)=\sum_{k=0}^{n}L_i(x_k)L_j(x_k)=\sum_{k=0}^{n}\delta_{ik}\delta_{jk},$$

ce qui, après la toujours aussi délicieuse gestion des symboles de Leopold — tout particulièrement le second — se réduit comme peau de chagrin à

$$\Psi(L_i,L_j)=\delta_{ij}.$$

La famille $(L_0,L_1,\ldots,L_n)$ est donc dorénavant orthonormale et c'est une excellente nouvelle.

▹ *Everybody knows* que les familles orthonormales sont libres et notre famille est donc bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puisqu'elle est de surcroît — et ouvertement ! — de longueur *ad hoc* et que nous avons déjà cité l'efficace caractérisation des bases en dimension finie.

↱ Le texte aurait pu caser ici un précieux complément, à savoir l'écriture d'un polynôme quelconque $P\in\mathbb{R}_n[X]$ sur cette prodigieuse base. Nous décidons donc de combler ce manque.

L'officielle propriété « coordonnées dans une base orthonormale » précise qu'ici

$$P=\sum_{i=0}^{n}\Psi(P,L_i)L_i.$$

Seulement voilà, pour chaque entier $i\in[\![0,n]\!]$, nous avons successivement

$$\Psi(P,L_i)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)L_i(x_k)=\sum_{k=0}^{n}P(x_k)\delta_{ik}=P(x_i),$$

la δ-*property* et les délicieuses gestions ayant eu, en core une fois, leur pesant d'arachide. Bref, la réponse à notre préoccupation est

$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\qquad P=\sum_{i=0}^{n}P(x_i)L_i,\tag{IDL}$$

relation fondamentale appelée parfois « formule d'interpolation de Lagrange ».

d. Soit $j\in[\![0,n]\!]$. D'après la magnifique formule (IDL) que nous venons, à l'instant, de mettre sur le marché, nous avons

$$X^j=\sum_{i=0}^{n}x_i^jL_i,$$

et le protocole « passage » qu'il faut impérativement maîtriser, stipule que

$$A=\left[\,x_i^j\,\right]_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 195 13/10/2017 11:35

↱ Cette dernière matrice s'appelle matrice d'Alexandre Théophile Vandermonde attachée à la liste $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et on la trouve dans la littérature sous le *look*

$$\mathbb{V}(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

e. Nous pouvons avantageusement reformuler notre problématique par le biais de l'application Φ du début de cette partie. À bien y regarder, on désire tout simplement l'existence et l'unicité d'un certain polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie

$$\Phi(P_f) = \big(f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)\big),$$

et comme depuis une fort belle lurette, Φ est bijective…

Pour finir, nous profitons de notre dernière pépite (IDL), car elle témoigne déjà de l'égalité

$$P_f = \sum_{i=0}^{n} P_f(x_i) L_i,$$

qui, au travers de la *mission interpol* de P_f, se transfigure *in fine* en

$$P_f = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i.$$

6.a. Les dispositions prises font, entre autres, que

$$P_f \in \mathbb{R}_n[X] \quad ; \quad Q_f \in \mathbb{R}_{n+1}[X],$$

et également

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P_f(x_i) = Q_f(x_i) = f(x_i).$$

Il en résulte que les $n+1$ réels *distincts* $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $Q_f - P_f$ qui, depuis peu, semble appartenir à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Nous sommes donc dans l'obligation d'exiger un réel δ tel que

$$Q_f - P_f = \delta(X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_n),$$

et vu la définition du polynôme w…

↱ On observera qu'en dépit de la timidité du texte, on a en réalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad Q_f(t) - P_f(t) = \delta\, w(t).$$

b. Le tout début de la question procède uniquement de la raison d'être du polynôme interpolateur Q_f. La suite repose sur le classique résultat d'analyse que voilà, qui, même s'il n'est pas totalement officiel, est souvent traité en classe par le professeur !

LE LEMME DE ROLLE

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et m un entier naturel non nul. Soit également f une application de I dans $\mathbb{R}$ qui vérifie

▷ *f est continue sur I ;*

▷ *f est dérivable m fois sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I.*

On suppose que la fonction f s'annule en $m+1$ points distincts de I. Alors,

$$\exists\, c \in \mathring{I}, \qquad f^{(m)}(c) = 0.$$

PREUVE

Nous allons établir par récurrence finie sur i que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, la fonction $f^{(i)}$ s'annule au moins $m-i+1$ fois dans $\mathring{I}$, ce qui, en y choisissant $i = m$, ne pourra que nous combler définitivement.

▷ Nous trions en croissant les $m+1$ annulations de f et nous obtenons ainsi $m+1$ zéros $a_0, \ldots, a_m$ de f dans I tels que

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_m.$$

Nos lumineuses hypothèses font que, pour chaque entier $k \in [\![0, m-1]\!]$, la fonction f satisfait aux quatre nécessités du théorème *originel* de Rolle entre a_k et a_{k+1}, à savoir

$$a_k \neq a_{k+1} \quad ; \quad f(a_k) = f(a_{k+1}),$$

continuité sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$; *dérivabilité sur l'ouvert* $]a_k, a_{k+1}[$.

Il existe donc un réel $c_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que

$$f'(c_k) = 0,$$

et comme nous avons l'interlacement

$$a_0 < c_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < c_{m-1} < a_m,$$

nous sommes bien à la tête de m annulations de f', ouvertement situées dans $\mathring{I}$, et l'initialisation est *in the pocket*.

▷ Supposons maintenant que, pour un entier i vérifiant $1 \leqslant i < m$, la fonction $f^{(i)}$ s'annule en au moins $m-i+1$ points de l'intérieur de I. Comme *supra* nous les trions en croissant, mettons

$$b_0 < \cdots < b_{m-i},$$

et, pour chaque $k \in [\![0, m-i-1]\!]$, les lumineuses permettent d'appliquer cette fois l'originel à $f^{(i)}$ entre b_k et b_{k+1}.

À bien y regarder, cela devrait nous procurer pas moins de $m-i$ annulations de $f^{(i+1)}$, ce qui nous permet de revenir à nos ovins.

La fonction h possède dorénavant $n+2$ zéros distincts situés dans l'intervalle $[a, b]$ et vu l'immense classe des fonctions poynomiales, elle est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ ce qui est beacoup plus qu'il n'en faut pour lui appliquer le précédent lemme en ayant fait les choix judicieux

$$I = [a, b] \quad \text{et} \quad m = n+1.$$

En conséquence, il existe bel et bien un réel — pourquoi ne pas le nommer θ ! — situé dans l'intérieur de $[a,b]$, à savoir

$$\overset{\circ}{I} =]a,b[,$$

qui est tel que $h^{(n+1)}(\theta) = 0$, *and Bob's your uncle !*

c. The tricky guy writes

$$\forall t \in [a,b], \qquad f(t) - P_f(t) = h(t) + Q_f(t) - P_f(t) = h(t) + \delta\, w(t),$$

la dernière égalité procédant du délicieux mais récent a, et après une légale dérivation à l'ordre $n+1$, il apparaît *linéairement* que

$$\forall t \in [a,b], \qquad f^{(n+1)}(t) = h^{(n+1)}(t) + (n+1)!\delta,$$

puisque d'une part, nulle est la dérivée $(n+1)^{ième}$ d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que, d'autre part, celle du *monic polynomial* w, de degré $n+1$, vaut exactement $(n+1)!$ parce que nous le savons bien. L'évaluation au point θ du récent b amène alors sur un plateau la très précieuse égalité

$$\delta = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

qui en révèle un petit peu plus sur le mystérieux δ apparu quelques lignes plus haut.

Il nous revient maintenant qu'il y a une des textuelles dispositions qui n'a pas encore eu son mot à dire ; nous parlons de l'interpolation de f par Q_f au point $\bar{x}$ grâce à laquelle

$$f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = Q_f(\bar{x}) - P_f(\bar{x}) = \delta\, w(\bar{x}),$$

le *famous and recent* a ayant, encore une fois, été mis à contribution. Le levé de voile concernant δ nous permet alors de clôturer en beauté cette question.

d. Nous commençons par une mise au point qui n'est pas vraiment un *scoop*.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, la fonction $|f^{(n+1)}|$ est continue sur ce segment et selon le théorème d'optimisation de KARL déjà cité plus haut elle y possède carrément un *maximum*(*). Soit t appartenant à $[a,b]$ et organisons-nous en deux temps.

▷ Si t est l'un des x_k, *l'interpolitude* fait que

$$f(t) - P_f(t) = 0,$$

et nous pouvons, *positivement*, passer à la suite.

▷ Si t est différent de $x_0, \ldots, x_n$, nous avons le loisir de choisir $\bar{x} = t$ et il existe donc depuis peu un réel $\theta \in]a,b[$ tel que

$$|f(t) - P_f(t)| = \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times |f^{(n+1)}(\theta)|$$

(*) Au risque de radoter, nous rappelons qu'il est très vexant pour un $\max$, de se faire bassement appeler $\sup$. Nous avons à chaque fois une pensée émue pour Hervé Christiani et sa liberté…

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 198 13/10/2017 11:35

et quand on maîtrise la notion de maximum…

En bref et compte tenu de notre nostalgique rectification, nous revendiquons

$$\forall t \in [a,b], \qquad |f(t) - P_f(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w(t)| \times \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}|.$$

Partie 3

7. Le texte précise que, dorénavant, l'entier n sera autorisé à bouger.

Il il est dès lors très louable d'afficher la dépendance à n des uns et des autres et cela nous amène, par exemple, aux notations « genre » $x_{k,n}$. Comme nous trouvons lourdes ces dispositions *truffées* de n, et si cela ne dérange personne, nous ne les utiliserons pas systématiquement.

Cependant, lorsque n se décidera à jouer véritablement les filles de l'air, nous serons vigilants et nous aviserons !

a. Puisque ρ n'est pas nul, la fonction polynomiale

$$x \mapsto x^2 + \rho^2$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule jamais. Il ne reste donc plus qu'à *culbuter* l'affaire !

b. La fonction f_ρ est nouvellement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à bien y regarder elle semble y manifester une certaine parité. Nul ne peut alors ignorer ignorer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_\rho^{(n)}$ a la même parité que l'entier n et quand la valeur absolue passe par là…

c. Soit x un réel vérifiant $|x| < \rho$ et profitons-en pour définir l'allégé

$$a = -\frac{x^2}{\rho^2}.$$

Puisqu'à l'évidence $|a| < 1$, le *serial geometer* peut exiger avec force la convergence de la série $\sum a^k$, ainsi que l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Le remplacement de a par son vrai visage et quelques minuscules aménagements conduisent alors dans la douceur à

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{\rho^{2k}} = \frac{\rho^2}{x^2+\rho^2},$$

et le salut passe enfin par une gentille division par le non nul ρ^2.

8. Le théorème que le texte admet à cet endroit est un des fondamentaux d'une très belle théorie analytique appelée « étude des *séries entières* ». Nous sommes nombreux à avoir souvent demandé que cette *artillerie lourde* soit au programme de nos classes,

mais malheureusement sans succès et nous sommes donc bel et bien obligés de nous sousmettre…

À côté de cela, et autant le mettre en place tout de suite, le même *serial geometer* justifiera comme au précédent 7.c que l'on a également

$$\forall x \in]-\rho,\rho[,\qquad v(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{\rho^{2k}},$$

égalité que nous gardons sur le feu pour l'instant.

a. Le texte est catégorique. Il a bien dit déterminer « *les* » réels et non déterminer « *des* » réels et il s'agit donc d'une *genuine* problématique d'existence et d'unicité que nous allons gérer par analyse-synthèse.

ANALYSE

Supposons que le couple (p,q) soit convenable. Après une tranquille réduction au même dénominateur il apparaît que

$$\forall x \in]-\rho,\rho[,\qquad (p-q)x+\rho(p+q)=\rho^2.$$

Comme l'ouvert $]-\rho,\rho[$ est un ensemble infini, les deux polynômes

$$(p-q)X+\rho(p+q)\quad \text{et}\quad \rho^2,$$

are infinitely matching et sont donc fatalement égaux. Ils ont ainsi les mêmes coefficients et voilà désormais que

$$p-q=0\quad\text{et}\quad p+q=\rho,$$

puisqu'il est précisé depuis une belle lurette que ρ n'est pas nul. Il s'ensuit obligatoirement que

$$p=q=\frac{\rho}{2},$$

et nous sommes supposés savoir qu'une telle conclusion d'analyse règle inéluctablement la question de l'unicité.

SYNTHÈSE

Ce n'est maintenant qu'une formalité que de contrôler l'*idoinitude* du couple

$$\left(\frac{\rho}{2},\frac{\rho}{2}\right)$$

et nous la laissons, *as usual*, à la charge de notre dévoué lecteur.

b. L'intervalle $]-\rho,\rho[$ est symétrique par rapport à 0 et notre fonction v y est manifestement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et paire. C'est alors exactement comme au récent 7.b, que nous asssénons

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall x\in]-\rho,\rho[,\qquad |v^{(n)}(x)|=|v^{(n)}(-x)|.$$

c. Soit x appartenant à l'ouvert $]-\rho,\rho[$.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 200 13/10/2017 11:35

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce au théorème de dérivation des séries entières — le *bazooka* que nous avons admis ! — la série

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)} \qquad (\text{BAZOO})$$

est convergente et nous avons

$$f_\rho^{(n)}(x) = \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)},$$

où, une fois n'est pas coutume, nous nous sommes autorisés une notation, certes un peu exotique — mais ô combien pratique parfois ! — des dérivées successives.

Nous ressortons maintenant l'égalité qui mijote plus haut au début du 8 et la même *rockette antichar*, nous apprend cette fois que la nouvelle série

$$\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)}, \qquad (\text{ANTICHAR})$$

converge à son tour et que

$$v^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)}.$$

La situation pourrait sembler mal engagée, car nous avons visiblement de méchants problèmes de signe, mais fort heureusement, les questions 7.b et 8.b sont là pour nous persuader que, pour tirer notre épingle du jeu, il suffit à coup sûr de traiter le cas $x \geqslant 0$, ce que nous supposons sur le champ.

Cette désormais positivité de x a une conséquence énorme pour ne pas dire *maous costaud*. Elle révèle en effet que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left(x^{2k}\right)^{(n)} \geqslant 0,$$

puisque le dérivateur compulsif ne peut ignorer l'*arrangement* selon lequel

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left(x^{2k}\right)^{(n)} = \begin{cases} \mathrm{A}_{2k}^{n}\, x^{2k-n} & \text{si} \quad 2k \geqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces précieuses informations révèlent alors que la série *valuée* de la série (BAZOO) n'est autre que sa voisine (ANTICHAR) et nous en déduisons que la série (BAZOO) est *absolument* convergente. Elle est dorénavant tout à fait favorable à l'inégalité triangulaire(*) et voilà donc au bout du compte que

$$\left|f_\rho^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2k}} \left(x^{2k}\right)^{(n)},$$

(*) On rappelle qu'il est totalement interdit de « trianguler » les séries semi-convergentes et pour cause !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 201 13/10/2017 11:35

ce qui, parce que $v^{(n)}(x)$ est ici positif, s'écrit éxactement

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{\rho^2}|v^{(n)}(x)|.$$

Disons pour finir, que nous avons déjà indiqué que les questions 7.b et 8.b se chargeraient de régler en douceur le cas de la négativité de x, et nous envigeasons maintenant de changer de question.

↱ Indépendamment des *bazookas* et autres *rockettes*, la question est loin d'être anodine. Le *crux* de l'affaire est la légalisation de la « triangulation » de la série définissant $f_\rho^{(n)}(x)$!

Nous pensons qu'il y a sûrement d'autres façons de parvenir à la convergence *absolue* de cette série — arguments « genre » binôme négatif, par exemple — mais nous avons finalement opté pour l'artillerie lourde.

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est très facile — et très classique — de justifier que les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{\rho - x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{\rho + x}$$

ont pour dérivées $n^{\text{ièmes}}$ respectives

$$x \mapsto \frac{n!}{(\rho - x)^{n+1}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(\rho + x)^{n+1}}$$

Nous laissons au lecteur dubitatif le soin de s'en assurer inductivement. Il résulte alors de la toute proche question 8.a, délicatement triangulée, que

$$\forall x \in \,]-\rho, \rho[, \qquad |v^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\rho n!}{2}\Big(\frac{1}{(\rho - x)^{n+1}} + \frac{1}{(\rho + x)^{n+1}}\Big),$$

puisque, *as usual*, les quantités déjà positives, sont dispensées de valuation. Supposons désormais que x soit un élément du segment $[-1, 1]$. La nouvelle situation géographique de ρ obligeant maintenant les *strictement* providentielles

$$0 < \rho - 1 \leqslant \rho - x \quad \text{et} \quad 0 < \rho - 1 \leqslant \rho + x,$$

ce n'est qu'une affaire de *puissante* élévation et de *culbute* que de parvenir à

$$|v^{(n)}(x)| \leqslant \frac{\rho n!}{(\rho - 1)^{n+1}},$$

une gentille simplification par 2 s'étant glissée dans les rouages. La précédente question et une autre aimable simplification conduisent alors aisément au résultat souhaité.

9. Nous rappelons que, au tout début de cette partie **3** et pour des raisons de légèreté, nous avons demandé l'autorisation de noter simplement et sporadiquement x_k le *heavy* $x_{k,n}$. Cela étant et à très bien y regarder, le réel x appartient à la réunion

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} \,]x_i, x_{i+1}[$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 202 13/10/2017 11:35

et comme il s'agit d'une réunion ouvertement « *disjointe* », il existe effectivement un unique entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que x appartienne à $]x_k, x_{k+1}[$. *Everything is therefore under control !*

a. Soit i appartenant à $[\![0, n]\!]$. Nous devons faire la part des choses.

▷ Si $i \leqslant k$, vu la position idyllique de x et la définition des x_i nous avons tour à tour

$$|x - x_i| = x - x_i \leqslant x_{k+1} - x_i = \frac{2}{n}(k - i + 1).$$

▷ Si $i \geqslant k+1$, au su de la même paradisiaque situation, nous avons cette fois

$$|x - x_i| = x_i - x \leqslant x_i - x_k \leqslant \frac{2}{n}(i - k).$$

Étant maintenant entendu que

$$|w_n(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| = \prod_{i=0}^{k} |x - x_i| \times \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i|,$$

c'est dans une douce ambiance de positivité qu'une multiplication membre à membre nous conduit tranquillement à

$$|w_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \prod_{i=0}^{k}(k - i + 1) \times \prod_{i=k+1}^{n}(i - k).$$

Seulement voilà, la *factorielle attitude* est formelle. Nous avons sans conteste

$$\prod_{i=0}^{k}(k - i + 1) = (k+1)! \quad \text{et} \quad \prod_{i=k+1}^{n}(i - k) = (n-k)!,$$

et nous avons déjà fait un bon bout de chemin.

Il nous reste maintenant établir la majoration

$$(k+1)!(n-k)! \leqslant n!,$$

ou, ce qui revient au même,

$$k + 1 \leqslant \binom{n}{k},$$

comme l'affirme une certaine et importante formule dite des « trois factorielles ». Mais profitant également d'une incontestable symétrie binomiale, nous allons plutôt établir que

$$k + 1 \leqslant \binom{n}{n-k}.$$

Here we go !

HEC

CORRIGÉ

SCIENTIFIQUE MATHÉMATIQUES

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 203 13/10/2017 11:35

Nous remarquons tout bêtement que les ensembles

$$[\![1, n-k]\!] \quad ; \quad [\![2, n-k+1]\!] \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad [\![k+1, n]\!],$$

sont de *genuine* parties à $n-k$ éléments de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ et comme k est providentiellement différent de n, elles ont le bon goût d'être distinctes. En conséquence et parce que nous savons bien compter, nous disposons déjà de $k+1$ parties différentes de $[\![1,n]\!]$ ayant, chacune, le cardinal $n-k$ et les zélés dénombreurs savent bien que $[\![1,n]\!]$ a exactement et au total

$$\binom{n}{n-k}$$

sous-ensembles de cardinal $n-k$. *So*…

↱ Nous faisons remarquer que l'hypothèse $k < n$ est loin d'être anodine dans cette affaire. C'est absolument grâce à elle que les ensembles

$$[\![1, n-k]\!] \quad ; \quad [\![2, n-k+1]\!] \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad [\![k+1, n]\!],$$

sont différents et qu'il y en a donc $k+1$. Le lecteur insensible au *vertigo* pourra noter qu'en revanche, si $k=n$, nos ensembles sont tous égaux à l'ensemble vide et il n'y en a donc qu'un seul ! Enfin et histoire d'enfoncer le clou, il pourra également observer que dans ce cas douteux l'inégalité nous avons

$$\binom{n}{n-k} = 1 < k+1 = n+1.$$

b. Notons momentanément (a_n) et (b_n) les deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n \geqslant 1, \qquad a_n = \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times n! \quad \text{et} \quad b_n = \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.$$

La suite (b_n) est nettement à valeurs strictement positives et grâce à l'équivalence de Stirling-de Moivre puis à de spectaculaires simplifications, on trouve très facilement que

$$\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit naturellement que

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et il existe alors un entier $n_0 \geqslant 1$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \frac{a_n}{b_n} \leqslant 1 \quad i.e. \quad a_n \leqslant b_n.$$

Soit maintenant $n \geqslant n_0$ et $x \in [-1,1]$ et organisons-nous gentiment.

▷ Si x est l'un des réels $x_{i,n}$, nous avons $w_n(x) = 0$ et les palmipèdes échappent à la *wooden leg !*

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 204 13/10/2017 11:35

▷ Si x n'est pas l'un des $x_{i,n}$, la récente question a s'est chargée de mettre en avant

$$|w_n(x)| \leqslant a_n,$$

ce qui, transitivement, et parce que n est plus grand que n_0, débouche sur

$$|w_n(x)| \leqslant b_n,$$

à notre plus grande satisfaction.

↱ Cette question 9.b a une formulation *hyper précise*. Sa quantification ressemble à quelque chose du genre

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall x \in [-1,1], \qquad \ldots$$

et un tel ordre dans l'empilement des quantificateurs interdit de proposer un entier n_0 dépendant d'un éventuel réel x et c'est fort heureusement le cas de notre n_0 dévoilé *supra*. Le lecteur curieux ayant pris le temps de creuser l'*uniforme* remarque suivant la question 3.d rapprochera ses tergiversations de cette non dépendance…

c. Soit à nouveau $n \geqslant n_0$, $x \in [-1,1]$ et supposons *suffisamment* que

$$\rho > 1 + \frac{2}{e}. \tag{S}$$

D'après la question 6.d, dans laquelle nous faisons les choix légitimes et judicieux

$$a = -1 \quad ; \quad b = 1 \quad ; \quad f = f_\rho,$$

nous avons déjà

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \times |w_n(x)| \times \max_{[-1,1]} |f_\rho^{(n+1)}|.$$

Les questions 8.d et 9.b ont, quant à elles, apporté les précieuses informations suivantes

$$|w_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \quad \text{et} \quad \max_{[-1,1]} |f_\rho^{(n+1)}| \leqslant \frac{1}{\rho} \times \frac{(n+1)!}{(\rho-1)^{n+2}},$$

la 8.d étant tout à fait opérationnelle car la *suffisance* (S) oblige $\rho > 1$. On place tout cela dans le *shaker*, on agite bien, et il devrait en ressortir une chose du genre

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \leqslant \frac{1}{\rho(\rho-1)} \times \left(\frac{2}{e(\rho-1)}\right)^{n+1}.$$

La fameuse *sufficiency* qui nous accompagne réalisant la miraculeuse situation

$$0 \leqslant \frac{2}{e(\rho-1)} < 1,$$

tout individu ayant assidûment suivi la classe de première scientifique pourra conclure par *squeeze* que

$$f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 205 13/10/2017 11:35

ce qui n'est pas pour nous défriser !

↱ Nous relançons encore une fois le lecteur avide en lui faisant remarquer, qu'ici, la suite de polynômes $(P_{f_\rho,n})$ converge *uniformément* vers f_ρ sur $[-1, 1]$.

10. Nous faisons valoir que, lorsque ρ n'est pas nul, la fonction

$$t \mapsto \ln(t^2 + \rho^2)$$

est carrément de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le *segment* $[-1, 1]$. Elle y est donc assurément continue et notre intégrale est d'une netteté impeccable ce qui est, pour le moins, une excellente nouvelle.

En outre, et parce que l'intégrande est lumineusement paire, nous n'ignorons pas que

$$H(\rho) = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(t^2 + \rho^2)dt.$$

a. En partie grâce à ce que nous venons de narrer, les deux fonctions

$$u : t \mapsto \ln(t^2 + \rho^2) \quad \text{et} \quad v : t \mapsto t$$

sont ouvertement de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$ et nous avons

$$\forall t \in [0, 1], \qquad u'(t) = \frac{2t}{t^2 + \rho^2} \quad \text{et} \quad v'(t) = 1.$$

L'officiel théorème d'intégration par parties stipule alors que

$$\int_0^1 \ln(t^2 + \rho^2)dt = \ln(1 + \rho^2) - 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2 + \rho^2}dt,$$

et en vertu de la *tricky* du siècle selon laquelle

$$\forall t \in [0, 1], \qquad \frac{t^2}{t^2 + \rho^2} = 1 - \frac{\rho^2}{t^2 + \rho^2},$$

c'est très linéairement que nous revendiquons

$$\int_0^1 \ln(t^2 + \rho^2)dt = \ln(1 + \rho^2) - 2 + 2\rho^2\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \rho^2}.$$

Comme il se fait tard, nous demandons à notre lecteur compréhensif d'accepter docilement la facile intégration(*)

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 + \rho^2} = \left[\frac{1}{\rho}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{\rho}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\rho}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

(*) Il peut être bon de connaître par cœur les primitives de $t \mapsto (t^2 + a^2)^{-1}$ lorsque a est non nul.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 206 13/10/2017 11:35

à telle enseigne que le résultat des courses devrait finalement être

$$H(\rho) = \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1 + \rho\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\cdot$$

Si nous ajoutons à cela que sans l'ombre d'un doute

$$\ln(1+\rho^2) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}]{} \frac{\pi}{2},$$

il est assez difficile de s'opposer à

$$H(\rho) \xrightarrow[\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}]{} -1,$$

et nous réussissons effectivement le prolongement par continuité souhaité en décrétant que $H(0) = -1$.

b. Vu les propriétés de classe des logarithmes et autres arctangentes, la fonction H est ouvertement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on trouve aisément

$$\forall \rho > 0, \qquad H'(\rho) = \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{\rho}\Big) > 0.$$

En outre, et maintenant qu'elle a été joliment prolongée, la fonction H est également continue sur $\mathbb{R}_+$. Nous rappelons alors simplement le fin théorème de Lagrange que voici.

CONTINUITÉ, DÉRIVABILITÉ, STRICTE MONOTONIE

Soit I un intervalle *de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

i. f est continue sur I ;

ii. f est dérivable sur l'intérieur $\mathring{I}$ de I ;

iii. on a

$$\forall x \in \mathring{I}, \qquad f'(x) > 0.$$

Alors, l'application f est strictement croissante sur I.

Grâce à ce très fonctionnel théorème — il devrait figurer dans tous les cours de première année ! — la fonction H est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme il est *positivement* incontestable que

$$\forall \rho > 0, \qquad H(\rho) \geqslant \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2) - 1,$$

nous avons sans l'aide d'aucun antalgique

$$H(\rho) \xrightarrow[\rho\to+\infty]{} +\infty.$$

Toutes ces précieuses informations et le grand théorème de la bijection font alors, inéluctablement, que H réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1, +\infty[$.

↱ Il se trouve, en réalité, que H est ici dérivable en zéro et que $H'(0) > 0$. Nous aurions donc pu nous dispenser des finesses du théorème de Lagrange évoqué plus haut, mais pourquoi se priver d'un outil qui se moque, comme de sa première chemise, des faiblesses de dérivabilité aux bornes de l'intervalle I ?

c. Le réel $-1 + \ln 2$ appartient à l'*ouvert* $]-1, +\infty[$ et, bijection oblige, il existe effectivement un unique réel ρ_0 dans l'*ouvert* $\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$H(\rho_0) = -1 + \ln 2.$$

Nous allons alors, en avant-première, utiliser la fonction G qui pointera son bout de nez à la prochaine question 11, en l'occurence la différence

$$G : x \mapsto H(x) - (\ln 2 - 1),$$

dont le tableau de signe devrait facilement ressembler à

x	0		ρ_0		$+\infty$
G		$-$	0	$+$	

Comme $\operatorname{Arctan} 1 = \pi/4$, nous avons ensuite

$$G(1) = \frac{\pi - 2\ln 2}{4} > 0,$$

cette stricte positivité provenant, mentalement, des deux évidences

$$\pi > 3 \quad ; \quad 2\ln 2 < 2\ln e = 2,$$

la première étant carrément connue de l'homme de la rue ! Un simple coup d'œil à notre tabeau de signe fait alors qu'il est indubitable que $\rho_0 < 1$.

↱ Notons que nous n'avons pas eu la nécessité d'utiliser l'approximation de $\ln 2$ fournie par le texte qui avait pourtant mis le paquet avec pas moins de trois décimales !

d. Les racines du polynôme w_n sont visibles à l'oeil nu. Il s'agit des fameux *réels* $x_{k,n}$. Seulement voilà, vu que ρ n'est pas nul, $i\rho$ n'est pas réel et par conséquent $w_n(i\rho)$ n'est pas nul et l'on a fatalement

$$|w_n(i\rho)| > 0.$$

Remarquons pour la suite que

$$w_n(i\rho) = \prod_{k=0}^{n} (i\rho - x_{k,n}),$$

et que par conjugaison de ce produit, nous avons également

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n} (-i\rho - x_{k,n}),$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 208 13/10/2017 11:35

les quantités déjà réelles étant, *as usual*, dispensées de conjugaison. Il en résulte mécaniquement que

$$|w_n(i\rho)|^2 = w_n(i\rho)\times\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n})(-i\rho - x_{k,n}),$$

ce qu'une identité remarquable du *teenager* transforme magnifiquement en

$$|w_n(i\rho)|^2 = \prod_{k=0}^{n}(\rho^2 + x_{k,n}^2).$$

↱ Notons, au passage, que cette égalité fournit une nouvelle preuve de la première partie de la question. La prise de logarithme, doublement légitimée, et une division par le non nul n, conduisent alors facilement à

$$\frac{1}{n}\ln|w_n(i\rho)| = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\ln(\rho^2 + x_{k,n}^2) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{l}\Big(-1+2\frac{k}{n}\Big),$$

où, histoire de mettre un peu de beurre dans les épinards, nous nous sommes autorisés la notation $\mathfrak{l}$ pour une fonction qui nous hante depuis quelques lignes, en l'occurrence

$$\mathfrak{l} : t \mapsto \frac{1}{4}\ln(\rho^2 + t^2).$$

Il y a maintenant de la somme de Riemann dans l'air ! En effet, et depuis la nuit des temps, le partage

$$(x_{0,n}, x_{1,n}, \ldots, x_{n,n})$$

est la subdivion régulière du segment $[-1, 1]$ en n parts et comme $\mathfrak{l}$ est providentiellement continue sur ce segment, l'important théorème de Darboux-Riemann stipule sans sourciller que

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{l}(x_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(\rho),$$

et puisque

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{l}(x_{k,n}) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathfrak{l}(x_{k,n}) + \frac{2\mathfrak{l}(1)}{n},$$

nous avons à l'avenant

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{l}(x_{k,n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} H(\rho),$$

et il nous semble urgent de changer de question.

↱ Nous nous devons d'insister sur un point de cours particulièrement important. Le professeur a dû préciser en classe qu'il y a, *grosso modo*, deux types de sommes de Riemann de rang n et qui ont les *looks* respectifs

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big) \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big)$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 209 13/10/2017 11:35

et ce sont elles qui sont concernées par le théorème de Darboux-Riemann. Une somme de genre

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\Big(a+\frac{k}{n}(b-a)\Big)$$

n'est pas, au sens académique du terme, une somme de Riemann, et c'est ce qui explique nos petits ajustements *supra*.

11.a. Juste pour le *fun* nous vous suggérons de la jouer en *qcm* avec les trois réponses possibles que voici :

i. la méthode rose ;

ii. la méthode Coué ;

iii. la méthode de dichotomie.

Cela étant, on décrypte sur la première ligne de code que, mettons pour un $x > 0$, on a

$$G(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ln}\Big(\frac{1+x^2}{4}\Big) + x\,\mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{x}\Big) = H(x) + 1 - \mathrm{ln}\,2,$$

la dernière égalité reposant sur une intervension musclée du *physio*.

Comme le rôle de la *méthode*, forcément sélectionnée par nos gagnants de *qcm*, est de donner des valeurs approchées de certains zéros fonctionnels, le programme en question est *a priori* chargé d'approximer à 10^{-3} près une solution de l'équation $G(x) = 0$ mais qui, vu la deuxième ligne de code, devrait se situer entre 0.25 et 1. Depuis notre avant-première de la question $10.c$ nous connaissons un zéro de G, en la personne de ρ_0, pour l'instant situé dans l'ouvert $]0,1[$, et le dénouement de l'affaire doit passer par la recherche de la position de ρ_0 par rapport à 0.25.

Comme, à l'époque, nous avons mis en place un très précieux tableau de signe, c'est tout naturellement que notre regard se porte sur $G(0.25)$ et un calcul moins fatiguant que poétique révèle que

$$G\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ln}\Big(1+\frac{1}{16}\Big) - \mathrm{ln}\,2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{Arctan}\,4.$$

Everybody knows the classical

$$\forall u > -1, \qquad \mathrm{ln}(1+u) \leqslant u.$$

On sait également qu'un arctangente est toujours inférieur à $\pi/2$ et selon l'approximation de $\mathrm{ln}\,2$ textuellement fournie, on peut espérer que $\mathrm{ln}\,2 \geqslant 0.6$. Comme enfin, l'homme de la rue sait que $\pi \leqslant 3.2$, il devrait émerger de ce cruel magma que

$$G\Big(\frac{1}{4}\Big) \leqslant -\frac{27}{160} < 0,$$

et notre ρ_0 est définitivement situé entre 0.25 et 1.

En conclusion notre code donne une valeur approchée à 10^{-3} près du fameux ρ_0 *alias* s_0.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 210 13/10/2017 11:35

↱ Il se trouve que $1/3$ pouvait également faire l'affaire en lieu et place de 0.25 et les calculs à virgules auraient été un petit peu plus simples, mais à peine…

b. Nous pensons avoir déjà répondu à cette question !

12. Remarquons avant tout que S_n est un polynôme et aux dernières nouvelles il devrait même appartenir à $\mathbb{R}_{n+2}[X]$. Nous saurons nous en souvenir…

a. Soit k appartenant à $[\![0,n]\!]$. Interpolation oblige, nous avons

$$P_{f_\rho,n}(x_k) = f_\rho(x_k) = \frac{1}{x_k^2+\rho^2},$$

et il s'ensuit dans la foulée que

$$S_n(x_k) = 0.$$

Les x_k sont donc désormais des zéros de S_n, et comme ils sont différents…

b. Il y a une chose que nous n'avons pas eu l'occasion d'utiliser jusqu'ici et qui, par la suite, va avoir énormément de poids. Il s'agit de la remarque, judicieuse et facile, selon laquelle

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad -x_k = x_{n-k}, \tag{SYM}$$

que nous avons baptisée (SYM) parce qu'elle signifie que les réels x_k et x_{n-k} sont symétriques par rapport à 0. Il est alors assez facile — le lecteur habile en changements d'indices et autres classiques manipulations s'en sortira très bien — d'en déduire que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_{k,n}(-x) = L_{n-k,n}(x),$$

précieuse propriété qui va bientôt avoir son pesant d'arachide. Soit alors x un nombre réel. Nous avons

$$P_{f_\rho,n}(-x) = \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_k)L_{k,n}(-x),$$

que la toute récente et précieuse métamorphose en

$$P_{f_\rho,n}(-x) = \sum_{k=0}^{n} f_\rho(x_k)L_{n-k,n}(x).$$

L'éternel changement d'indice de lecture à rebours, *say* $k := n-k$, la propriété (SYM) et la parité de f_ρ font alors qu'au bout du compte

$$P_{f_\rho,n}(-x) = P_{f_\rho,n}(x),$$

chronique d'une parité annoncée…

c. On trouve très facilement

$$|w_n(y_n)| = \frac{1}{n^{n+1}} \prod_{k=1}^{n}(2k-1),$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 211 13/10/2017 11:35

le sempiternel changement d'indice *countdown* ayant encore une fois été mis à contribution, et comme nul ne peut ignorer les formules dites des doubles factorielles rappelées *infra*, on obtient déjà

$$|w_n(y_n)| = \frac{(2n)!}{2^n\, n!\, n^{n+1}}.$$

Il suffit alors de déterrer l'équivalence de James et Abraham pour voir apparaître en beauté

$$|w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

quelques spectaculaires simplifications ayant, deci delà, jalonné le parcours. Les réels strictement positifs

$$\tau = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{2}{e},$$

sont donc assurément les bienvenus !

↱ Cette présentation d'équivalence demandée par le texte n'est pas du tout opérationnelle. Étant entendu que

$$\ln\frac{2}{e} = \ln 2 - 1 = H(\rho_0),$$

nous préférons et de loin la nouvelle version

$$|w_n(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n} e^{nH(\rho_0)}.$$

Nous la ressortirons en temps utiles.

Voici maintenant comme promis une petite piqûre de rappel.

LA DOUBLE FACTORIELLE

Soit n un entier naturel. La classique factorielle descend les marches une par une alors que la double factorielle les descend deux par deux. Elle est notée avec deux points d'exclamation. Ainsi

$$n!! = n\times(n-2)\times\cdots\times *$$

où l'étoile finale « $*$ » est égale à 1 si n est un naturel impair et à 2 si n est un entier pair supérieur ou égal à 2.

On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les archiclassiques factorialisations

$$(2p)!! = 2\times4\times\cdots\times(2p) = 2^p p! \quad \text{et} \quad (2p-1)!! = 1\times3\times\cdots\times(2p-1) = \frac{(2p)!}{2^p\, p!},$$

que le lecteur, s'il ne les a jamais pratiquées, retrouvera sans peine muni d'un crayon à papier et d'un confetti

d. Attention, le résultat admis est faux ! On a en réalité

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln|w_n(i\rho)| - nH(\rho)\right) = \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2),$$

mais, fort heureusement, cela ne va pas chambouler le cours de l'histoire. La sempiternelle continuité de la fonction exponentielle et notre légendaire habileté en *expologmania* doivent normalement nous conduire à

$$\frac{|w_n(i\rho)|}{e^{nH(\rho)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{1+\rho^2},$$

et comme les « flèches » vers des limites *non nulles*(*) peuvent se transformer allègrement en équivalence, nous nous permettons de revendiquer

$$|w_n(i\rho)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\rho^2}\, e^{nH(\rho)},$$

et le nouvel aspect de l'équivalence du récent c nous dépose en douceur sur

$$\frac{|w_n(y_n)|}{|w_n(i\rho)|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{1+\rho^2}} \times \frac{e^{n(H(\rho_0)-H(\rho))}}{n}.$$

13.a. Comme nous l'avons déjà découvert lors de la question 10.d nous avons

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(-i\rho - x_{k,n}),$$

égalité qui, lorsque l'on sait compter de 0 à n pourrait se décliner en

$$\overline{w_n(i\rho)} = (-1)^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(i\rho + x_{k,n}) = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{n-k,n}),$$

la dernière version reposant sur la toute nouvelle *imparité* de n et sur la savoureuse propriété (SYM) de nos amis $x_{k,n}$. C'est alors *via* l'inévitable changement d'indice *cuenta atrás* et à la pertinence du *physio* que nous débouchons sur

$$\overline{w_n(i\rho)} = \prod_{k=0}^{n}(i\rho - x_{k,n}) = w_n(i\rho).$$

Étant égal à son conjugué, le complexe $w_n(i\rho)$ est profondément réel et comme il est non nul depuis une fort belle lurette, nous avons bien l'appartenance

$$w_n(i\rho) \in \mathbb{R}^*,$$

et c'est déjà un bon début.

Depuis les conclusions de la question 12.a, le poynôme w_n divise le polynôme S_n et nous nous rappelons que

$$\deg w_n = n+1 \quad \text{et} \quad \deg S_n \leqslant n+2,$$

(*) Limites nulles s'abstenir ! !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 213 13/10/2017 11:35

à telle enseigne qu'il doit indéniablement exister deux réels a et b tels que

$$S_n = (aX + b)w_n.$$

Comme il est patent que $S_n(i\rho) = 1$, de sorte que

$$ai\rho + b = \frac{1}{w_n(i\rho)},$$

puisque, au risque de battre la breloque, notre ami $w_n(i\rho)$ n'est pas nul. Comme notre camarade est depuis peu foncièrement réel et, comme depuis beaucoup plus longtemps, le réel ρ n'est pas nul, il s'avère que

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{w_n(i\rho)},$$

à telle enseigne que

$$S_n = \frac{w_n}{w_n(i\rho)}.$$

b. Soit x appartenant au segment $[-1, 1]$. Nous avons sans détour

$$f_\rho(x)\, S_n(x) = f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x),$$

égalité que le récent *a* renouvelle en

$$f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) = f_\rho(x) \times \frac{w_n(x)}{w_n(i\rho)}.$$

Il ne reste plus qu'à valuer l'affaire sans omettre la positivité d'un certain $f_\rho(x)$.

↱ À bien y regarder le domaine de validité de la précédente égalité n'est pas seulement le segment $[-1, 1]$, c'est en réalité la totalité de $\mathbb{R}$!

14. Dans ce qui suit et sans que nous en fassions tout un *pataques*, lorsque nous écrirons des limites ou des équivalences sur n, il sera entendu qu'elles porteront sur des sous-suites tacitement impaires. Nous noterons ainsi tout simplement $\lim\limits_{n\to+\infty}$ ce que nous devrions noter

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ impair}}},$$

et nous ferons de même pour l'équivalence, tout cela, bien sûr, dans l'unique but louable de ne pas surcharger les écritures.

a. D'après la fin de la question 13, nous avons

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| = f_\rho(y_n) \times \frac{|w_n(y_n)|}{|w_n(i\rho)|},$$

et comme il semble bien que

$$f_\rho(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1+\rho^2},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 214 13/10/2017 11:35

nous sommes en droit d'espérer que

$$f_\rho(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1+\rho^2},$$

puisque les « flèches vers les non nuls »…

Mezalor, en rapprochant cela de l'équivalence de la $13.d$, nous proclamons haut et fort

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \kappa \times \frac{e^{n(H(\rho_0)-H(\rho))}}{n},$$

où κ est une constante strictement positive que, pour des raisons purement esthétiques, nous ne jugeons pas nécessaire d'étaler. Seulement voilà, il est ici précisé que $0 < \rho < \rho_0$, et si l'on en croit une certaine croissance stricte, il devrait se révéler que

$$H(\rho_0) - H(\rho) > 0.$$

Comme il existe sur le marché un arsenal de prépondérances classiques appelé parfois catalogue des « croissances comparées », nous nous devons d'asséner que

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

b. La fonction $|f_\rho - P_{f_\rho,n}|$ est, depuis belle lurette, continue sur le *segment* $[-1,1]$. Selon l'important théorème d'optimisation de Weierstrass déjà cité plusieurs fois, elle y possède carrément un *maximum* et nous avons déjà eu l'occasion de signaler que…

Cela étant, et parce que y_n appartient au segment $[-1,1]$, une vraie lapalissade précise que

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \leqslant \max_{[-1,1]} |f_\rho - P_{f_\rho,n}|.$$

Le récent a et un somptueux *squeeze* à l'infini amènent définitivement à

$$\max_{[-1,1]} |f_\rho - P_{f_\rho,n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

↱ Cette pathologie, découverte en 1901 par le mathématicien Carl David Tolmé Runge, a mis un sacré coup de pied dans la fourmilière, confirmant que nos inspirations ont parfois leurs limites.

Qui pourrait en effet imaginer perdre de la précision en démultipliant le nombre de points d'une interpolation ? *And yet…*

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 215 13/10/2017 11:35