CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à ESSEC Business School.*

Comme cela se pratique assez souvent, le texte aurait pu choisir d'identifier les vecteurs colonnes de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ aux listes de $\mathbb{R}^p$ correspondantes, mais il ne l'a désespérément pas fait ! Il faudra donc souvent tourner la tête de $\pi/2$ et ne pas trop craindre le *torticolis*…

Partie 1

1. C'est à la future question c que le texte identifiera le réel a à la matrice d'ordre un $[a]$. Nous pensons qu'il n'est point saugrenu de le faire sur-le-champ.

Nous en voulons pour preuve que, dans ces conditions, les applications x en question sont tout bêtement celles qui sont pilotées par le couple (a,b) et nous saurons nous en souvenir !

a. Les généreux théorèmes généraux de la dérivation assurent la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$ de l'application y et l'on trouve alors aisément que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad y'(t) = 0$$

b. Comme $\mathbb{R}_+$ est un *intervalle*(*) de $\mathbb{R}$, la conclusion de la précédente impose la constance à la fonction y ce qui se traduit immédiatement par

$$\forall t \geqslant 0 \qquad y(t) = y(0)$$

c'est-à-dire

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at} = x(0) + \frac{b}{a}$$

À quelques minimes aménagements près, cela devrait nous permettre d'envisager la suite.

↱ Précisons au demeurant que nous trouvons regrettable de ne pas aller un tout petit peu plus loin. À bien y regarder, nous venons d'établir que si x est une application pilotée par le couple (a,b), il existe une constante réelle, à savoir

$$k = x(0)$$

telle que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad x(t) = -\frac{b}{a} + \left(k + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

Le point important est qu'il y a une réciproque à cela. Il est en effet facile de vérifier que *toutes* les applications ayant le *look*

$$t \longmapsto -\frac{b}{a} + \left(k + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

où k est *n'importe quelle* constante réelle, sont pilotées par le couple (a,b). En conséquence, les applications pilotées par le couple (a,b), sont, ni plus, ni moins, que celles de type

$$t \longmapsto -\frac{b}{a} + \left(k + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

(*) L'argument est crucial ! D'aucuns l'ayant oublié un certain matin du mois de mai 1982 en gardent encore un souvenir très amer…

où k est *n'importe quelle* constante réelle.

c. Comme a n'est décidément pas nul le système en question n'a évidemment qu'un unique équilibre en l'occurrence

$$x^* = -\frac{b}{a}$$

Pour le reste, organisons-nous en deux temps.

– Supposons que x^* soit attractif. La pertinente remarque faite à l'issue de la précédente révèle que l'application

$$x : t \longmapsto -\frac{b}{a} + e^{at}$$

attachée au judicieux choix de la constante

$$k = -\frac{b}{a} + 1$$

est pilotée par le couple (a, b). On déduit alors de l'attractivité que

$$e^{at} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

et les *aficionados exponentiels* savent bien que cela impose inéluctablement la *stricte* négativité de a.

– Supposons, réciproquement, que a soit strictement négatif et annonçons une application x pilotée par le couple (a, b). La question précédente révélant alors que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}$$

il s'ensuit implacablement que

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\frac{b}{a}$$

ce qui ne peut que nous réjouir.

2.*a*. La matrice A étant mentalement inversible — son déterminant vaut 3 — notre système a effectivement un équilibre unique x^* déterminé par l'égalité

$$X^* = -A^{-1} \cdot B = -A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'importante formule des cofacteurs — inverse d'une matrice d'ordre deux — nous apprenant que

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

il s'ensuit aisément que

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et autant dire alors *in fine* que

$$x^* = (1,1) = b$$

b. La matrice A est symétrique réelle d'ordre non nul et grâce au théorème spectral elle est *orthodiagonalisable*. La messe est donc définitivement dite.

Regrettons simplement que le texte n'appelle point un chat un chat. Est-ce un gros mot d'évoquer la notion de « matrice orthogonale » ?

c. Il s'agit de procéder à l'*orthodiagonalisation* de la matrice A et nous espérons que l'impétrant est rompu à ce genre d'activité. Il remarquera à cet effet que

$$A = J_2 - 3I_2$$

où J_2 est l'archi classique matrice $(2,2)$ dont les entrées sont toutes égales à un et comme il est cultivé, il n'ignore sûrement pas que les éléments propres de cette dernière sont

$$\mathrm{Spec}\, J_2 = \{0,2\}$$

puis

$$\mathrm{E}_0(J_2) = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{E}_2(J_2) = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Il s'ensuit alors *affinement* que

$$\mathrm{Spec}\, A = \{-3,-1\}$$

puis

$$\mathrm{E}_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{E}_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à orthonormaliser les bases de nos deux espaces-propres ce qui se fera par exemple *via*

$$\mathrm{E}_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \quad ; \quad \mathrm{E}_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

et l'affaire sera désormais terminée si nous proposons

$$\lambda = -3 \quad ; \quad \mu = -1 \quad ; \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

d. Le chapeau du tout début du texte a défini la dérivation vectorielle de la fameuse façon dite « composante à composante ». Il devrait alors naturellement en résulter que W est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad W'(t) = Q^{\mathsf{T}} \cdot X'(t)$$

Nous laissons à notre valeureux ami le soin de se charger de l'intendance. Passons maintenant à la suite.

i. Soit $t \geqslant 0$. Le pilotage de notre système se traduit par

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B$$

ce que notre orthodiagonalisation transforme en

$$X'(t) = Q \cdot D \cdot Q^{\mathsf{T}} \cdot X(t) + B$$

Multiplions alors à gauche par $Q^{\mathsf{T}} = Q^{-1}$, donnons la parole au *physio* et voilà qu'effectivement

$$W'(t) = D \cdot W(t) + Q^{\mathsf{T}} \cdot B$$

ii. Soit à nouveau $t \geqslant 0$. Comme

$$Q^{\mathsf{T}} \cdot B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la précédente égalité matricielle se détricote en les deux systèmes scalaires

$$w_1'(t) = -3w_1(t) \quad \text{et} \quad w_2'(t) = -w_2(t) + \sqrt{2}$$

respectivement pilotés par les couples

$$(-3, 0) \quad \text{et} \quad (-1, \sqrt{2})$$

L'indiscutable négativité stricte des deux compères λ et μ et la scalaire question 1 sont alors catégoriques. Nous devons attractivement avoir

$$w_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad w_2(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \sqrt{2}$$

à telle enseigne que

$$W(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Comme il est orthogonalement acquis que

$$X(t) = Q \cdot W(t)$$

il s'en déduit(*) très tranquillement que

$$X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} Q \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ce qui, après un rapide calcul mental, devient

$$X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(*) Comme cochon !

chronique d'une attractivité annoncée…

3.a. Il suffit d'appliquer le protocole de *matricialisation*. Nous trouvons alors

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_{p-1} \\ \hline I_1 & 0 \end{array}\right]$$

Les p colonnes de cette matrice sont, à un petit désordre près, les colonnes *canoniques* de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{C})$. Autant dire alors qu'elles forment une famille libre ce qui nous amène tout naturellement à

$$\mathtt{rg}\, A_p = p$$

b. Il ne fait aucun doute que

$$A_p \cdot G = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vdots \\ \varepsilon^{p-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

et comme précisément $\varepsilon^p = 1$ cela se métamorphose très opérationnellement en

$$A_p \cdot G = \varepsilon G$$

Vu sa toute première entrée la colonne G n'est assurément pas nulle(*) et la voilà donc désormais vecteur propre de A_p attachée à la valeur propre ϵ.

c. À bien y regarder, nous venons de démontrer que *toute* racine $p^{ième}$ de l'unité est une valeur propre de A_p et nous savons bien qu'il y en a exactement p différentes. Notre matrice A_p, carrée d'ordre p, possède donc p valeurs propres *différentes* et si l'on en croit une certaine condition suffisante, elle doit impérativement se diagonaliser. Son acolyte u_p est alors prié de faire la même chose. Ajoutons, juste pour causer, que

$$\mathtt{Spec}\, u_p = \mathtt{Spec}\, A_p = \mathbb{U}_p$$

où $\mathbb{U}_p$ désigne l'ensemble des racines $p^{ièmes}$ de l'unité.

d. Écrivons par exemple

$$\mathbb{U}_p = \{z_1, \ldots, z_p\}$$

La récente question c produit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^p$ pour laquelle

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p) = \mathtt{diag}(z_1, \ldots, z_p)$$

égalité qui nous amène diagonalement à

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p^p) = \mathtt{diag}(z_1^p, \ldots, z_p^p) = \mathtt{diag}(1, \ldots, 1) = I_p$$

(*) *Never forget !*

la pénultième égalité profitant de ce que la puissance $p^{ième}$ d'une racine $p^{ième}$...

Il en résulte dans la foulée que

$$u_p^p = \mathrm{Id}$$

et le polynôme $X^p - 1$ est bien annulateur de notre affaire.

Soit pour finir M un polynôme annulateur non nul de u_p. Comme nous n'avons pas égaré l'important thème « annulateur et spectre », il devrait sur-le-champ s'ensuivre

$$\mathrm{Spec}\, u_p \subset \mathrm{root}\; M$$

Les différents complexes $z_1, \ldots, z_p$ sont à présent des racines du polynôme *non nul* M ce qui oblige inéluctablement

$$\deg M \geqslant p$$

La réponse à la question posée est donc irrévocablement non !

↱ Les initiés auront reconnu en $X^p - 1$ le polynôme *minimal* de l'endomorphisme u_p. Parmi ses annulateurs non nuls, c'est de loin *the best !*

e. Nous repartons de l'égalité

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_p) = \mathrm{diag}(z_1, \ldots, z_p)$$

que nous avons écrite quelques lignes plus haut. Il en résulte cette fois que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(u_p)\big) = \mathrm{diag}\big(P(z_1), \ldots, P(z_p)\big)$$

et par conséquent $P(u_p)$ est diagonalisable, son spectre étant donné par

$$\mathrm{Spec}\, P(u_p) = \big\{P(z_1), \ldots, P(z_p)\big\}$$

quelques répétitions, *here and there*, étant assurément possibles...

4.*a*. Nous avons ici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'impétrant doit prendre l'initiative de calculer le carré de cette dernière ce qui devrait l'amener à

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i. Le *physio* se réveille alors en se réclamant de l'égalité

$$M = \beta A^2 + \alpha A - I_3$$

ce qui nous permet, dans la foulée, de proposer

$$P = \beta X^2 + \alpha X - 1$$

ii. L'ensemble des racines cubiques de l'unité est bien connu. Il s'agit de

$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$$

où le complexe j est au choix

$$j = e^{2i\pi/3} \quad \text{ou} \quad j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La récente question 3.*e* et la précédente stipulent alors de concert que

$$\operatorname{Spec} M = \left\{\beta + \alpha - 1\ ,\ \beta j^2 + \alpha j - 1\ ,\ \beta j + \alpha j^2 - 1\right\}$$

Quelques calculs anodins, laissés à la charge du lecteur dévoué, conduisent alors aux résultats suivants :

valeur propre	$\beta + \alpha - 1$	$\beta j^2 + \alpha j - 1$	$\beta j + \alpha j^2 - 1$
partie réelle	$\beta + \alpha - 1$	$-\dfrac{\alpha + \beta + 2}{2}$	$-\dfrac{\alpha + \beta + 2}{2}$
partie imaginaire	0	$(\alpha - \beta)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$(\beta - \alpha)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. Les hypothèses

$$\alpha + \beta \neq 1 \quad ; \quad \alpha > 0 \quad ; \quad \beta > 0$$

assurent déjà que les parties réelles de nos valeurs propres ne sont pas nulles ce qui, *a fortiori*, oblige

$$0 \notin \operatorname{Spec} M$$

i. Selon le test du spectre la matrice M est inversible et le système en question a effectivement un unique équilibre x^* naturellement cousin de la colonne

$$X^* = -M^{-1} \cdot C$$

Il est évidemment hors de question de chercher à calculer la matrice M^{-1} pour la simple et bonne raison qu'elle doit avoir une têete plus que patibulaire !

Il est préférable de remarquer que la somme des éléments de chaque ligne de M est toujours égale à $\alpha + \beta - 1$. Il s'ensuit alors très classiquement que

$$M \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha + \beta - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$M \cdot C = (\alpha + \beta - 1) \cdot C$$

et comme M est toujours inversible, voilà bien après multiplication à gauche que

$$C = (\alpha + \beta - 1) M^{-1} \cdot C$$

Il a déjà été dit que $\alpha + \beta - 1$ n'est pas nul et nous pouvons alors revendiquer

$$X^* = -\frac{1}{\alpha + \beta - 1} \cdot C$$

C'est maintenant en tournant la tête de $\pi/2$ qu'apparaît *in fine* l'égalité

$$x^* = -\frac{1}{\alpha + \beta - 1} \cdot c$$

ii. L'application x est à coup sûr dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a sans surprise

$$\forall t \geqslant 0 \qquad X'(t) = (\alpha + \beta - 1) e^{(\alpha+\beta-1)t} \cdot C$$

À côté de cela, pour tout réel t positif, l'on a également

$$M \cdot X(t) = M \cdot X^* + e^{(\alpha+\beta-1)t} \cdot M \cdot C$$

Il reste alors à mettre en avant les mentales égalités

$$M \cdot X^* = -C \quad \text{et} \quad M \cdot C = (\alpha + \beta - 1) C$$

pour que le *physio* se mette à clamer que

$$M \cdot X(t) = -C + X'(t)$$

chronique d'un pilotage annoncé…

iii. Supposons que x^* soit attractif. Comme la toute récente x est pilotée par le couple en question, nous devons avoir

$$e^{(\alpha+\beta-1)t} c \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

ce qui, parce que le vecteur c a au moins(*) une entrée non nulle, se doit d'obliger

$$e^{(\alpha+\beta-1)t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Les *aficionados exponentiels* sont à nouveau mis à contribution. *No doubt that*

$$\alpha + \beta - 1 < 0$$

(*) Il en a carrément trois !

Voici donc une condition nécessaire intéressante, à savoir

$$x^* \quad \text{attractif} \qquad \Longrightarrow \quad \alpha+\beta<1$$

↱ Il y a ici un petit souci. Il n'y malheureusement pas *unicité* d'une telle condition puisque par exemple

$$x^* \quad \text{attractif} \qquad \Longrightarrow \quad \alpha+\beta\neq 3$$

ou pire, pour plaisanter un peu

$$x^* \quad \text{attractif} \qquad \Longrightarrow \quad \pi \ \text{ est irrationnel}$$

sont également nécessaires !

L'article défini de la phrase : « On suppose désormais que *la* condition précédente... » est donc quelque part déplacé. Il y avait donc intérêt à tomber d'emblée sur la bonne condition !

c. En ouvrant bien les mirettes, on trouve aisément

$$N=(\alpha+\beta)J_3-(\alpha+\beta+2)I_3$$

où J_3 est ici la matrice carrée d'ordre trois dont toutes les entrées sont égales à 1.

i. *Everybody knows that*

$$\operatorname{Spec} J_3=\{0,3\}$$

et il s'ensuit *affinement* que

$$\operatorname{Spec} N=\{-(\alpha+\beta+2)\ ,\ 2(\alpha+\beta-1)\}$$

ii. Le récent et textuel « désormais » assurant que

$$\alpha+\beta<1$$

le lecteur n'aura aucun mal à se persuader que le réel

$$\theta=1-(\alpha+\beta)$$

fait *farpaitement* l'affaire.

↱ Il est important de noter que le réel -2θ est en réalité la plus grande valeur propre de la matrice N.

d.i. Bien entendu l'application y est tout aussi dérivable sur $\mathbb{R}_+$ que sa copine x et l'on a tranquillement

$$\forall t\geqslant 0 \qquad Y'(t)=X'(t)=M\cdot X(t)+C=M\cdot\big(X(t)-X^*\big)$$

la dernière égalité profitant de ce que depuis une fort belle lurette, nous avons en *équilibre*

$$M\cdot X^*=-C$$

Autant dire alors que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad Y'(t) = M \cdot Y(t)$$

and Bob's your uncle !

ii. Nous avons déjà observé que l'application Y est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et comme

$$\|Y\|^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2$$

il en est généreusement de même de l'application $\|Y\|^2$. En outre et mentalement, nous avons

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \left(\|Y\|^2\right)'(t) = 2Y_1(t)Y_1'(t) + 2Y_2(t)Y_2'(t) + 2Y_3(t)Y_3'(t)$$

ce qui, très *scalairement*, devient la plus jolie

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \left(\|Y\|^2\right)'(t) = 2 < Y(t)\,,\, Y'(t) > = 2 < Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) >$$

puisque l'application y a récemment décidé de copiloter $(M, 0)$. La dérivabilité de φ s'en déduit aussi charitablement et de plus

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \varphi'(t) = e^{2\theta t}\Big(2\theta\|Y(t)\|^2 + 2 < Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) >\Big)$$

la farouche volonté de n'avoir pas mis « 2 » en facteur étant dictée par ce qui va suivre.

Soit alors t positif. La symétrie du produit scalaire autorise l'égalité

$$< Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) > = < M \cdot Y(t)\,,\, Y(t) >$$

et la machinerie canonique se met alors en route en indiquant tout d'abord que

$$\|Y(t)\|^2 = Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot Y(t)$$

en révélant ensuite que

$$< Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) > = Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot \big(M \cdot Y(t)\big) = Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot M \cdot Y(t)$$

et en assénant enfin que

$$< M \cdot Y(t)\,,\, Y(t) > = \big(M \cdot Y(t)\big)^{\mathsf{T}} \cdot Y(t) = Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot M^{\mathsf{T}} \cdot Y(t)$$

la toute dernière égalité reposant sur l'inénarrable « *dressing undressing principle* ».

C'est alors la *tricky* écriture

$$2 < Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) > = < Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) > + < M \cdot Y(t)\,,\, Y(t) >$$

ou, ce qui revient dorénavant au même

$$2 < Y(t)\,,\, M \cdot Y(t) > = Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot M \cdot Y(t) + Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot M^{\mathsf{T}} \cdot Y(t)$$

qui nous amène après ouverture des mirettes à

$$2 < Y(t)\,,\; M \cdot Y(t) > = Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot N \cdot Y(t)$$

Le résultat des courses est alors

$$\varphi'(t) = e^{2\theta t}\Big(2\theta\, Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot Y(t) + Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot N \cdot Y(t)\Big)$$

égalité qu'une bénigne réorganisation métamorphose effectivement en

$$\varphi'(t) = e^{2\theta t} \cdot Y(t)^{\mathsf{T}} \cdot \big(2\theta I_3 + N\big) \cdot Y(t)$$

iii. La matrice N est ouvertement symétrique réelle et nous avons déjà signalé que le réel -2θ est sa plus grande valeur propre. L'importante majoration(*) de Rayleigh-Ritz assure alors que, pour toute colonne X réelle de hauteur 3, l'on a

$$X^{\mathsf{T}} \cdot N \cdot X \leqslant -2\theta\, \|X\|^2$$

ou, ce qui revient quasiment au même

$$X^{\mathsf{T}} \cdot \big(N + 2\theta I_3\big) \cdot X \leqslant 0$$

Soit alors à nouveau $t \geqslant 0$. Il résulte de notre dernier *scoop* et de la légendaire positivité exponentielle que

$$\varphi'(t) \leqslant 0$$

et comme $\mathbb{R}_+$ est un *intervalle*…

iv. La fonction φ est désormais *décroissante* sur $\mathbb{R}_+$ et à bien y regarder elle y est également *minorée* par zéro. Cela déclenche le colossal théorème de la limite monotone et voilà donc que φ a une limite finie en plus l'infini. Comme

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \|Y(t)\|^2 = e^{-2\theta t} \cdot \varphi(t)$$

et parce que θ est *strictement* positif l'on conclut aisément que

$$\|Y(t)\|^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

d'où il ressort très facilement que

$$y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Vu les origines de la fonction y il s'ensuit carrément que

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$$

chronique d'une attractivité annoncée…

↱ Il est alors l'heure de peaufiner la condition nécessaire de la question $4.b.iii$. Nous avons à l'avenir l'équivalence logique

$$x^* \quad \text{attractif} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha + \beta - 1 < 0$$

↱ Nous avons le sentiment qu'il y ait eu un peu de flottement à propos des hypothèses faites au tout début au sujet des réels α et β. Il semble que nous n'ayons utilisé que les conditions

$$\alpha + \beta \neq 1 \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \geqslant 0$$

(*) On rappelle qu'il y a en réalité un encadrement de Rayleigh-Ritz mais sa minoration ne semble pas ici passionner les foules…

Partie 2

5. L'hypothèse $\nu > -1$ a entre-autre avantage de bien définir les fonctions x_1 et x_2 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ ainsi que d'y certifier leur dérivabilité.

a. Soit $t \geqslant 0$. Nous avons

$$x_1'(t) = x_2'(t) = \frac{\nu e^{-t}}{(1+\nu e^{-t})^2}$$

alors que

$$F_1\big(x_1(t), x_2(t)\big) = F_2\big(x_1(t), x_2(t)\big) = \big(1 - x_1(t)\big)x_1(t) = \frac{\nu e^{-t}}{(1+\nu e^{-t})^2}$$

la toute dernière version procédant d'une minuscule réduction au même dénominateur. Nous pouvons donc aller de l'avant.

b. Soit c appartenant à l'ouvert $]0,1[$. Il existe un réel ν strictement positif d'ailleurs tel que

$$\frac{1}{1+\nu} = c$$

et il s'agit ni plus, ni moins que de

$$\nu = \frac{1-c}{c}$$

Les récentes fonctions x_1 et x_2 de la précédente question sont alors ouvertement croissantes et ont pour tableau de variations

t	0		$+\infty$
x_i'		$+$	
x_i	c	$\nearrow$	1

Le couple (x_1, x_2) est depuis peu solution de (S) et il est désormais à valeurs dans l'ensemble

$$\big([c,1]\big)^2$$

Comme l'on a l'inclusion

$$\big([c,1]\big)^2 \subset \big([c,+\infty[\big)^2$$

la conclusion est claire mais on peut légitimement se poser la question de la possible faute de frappe…

c. Procédons par la délicieuse route de l'analyse-synthèse.

– Supposons que (x_1^*, x_2^*) soit un tel couple. Comme il s'agit d'un couple de réels non nuls, nous revendiquons tout d'abord le système

$$\begin{cases} 1 - x_1^* + \rho(x_2^* - x_1^*) = 0 \\ 1 - x_2^* + \rho(x_1^* - x_2^*) = 0 \end{cases}$$

L'addition membre à membre de ces deux égalités conduit gentiment à

$$x_1^* + x_2^* = 2$$

alors que leur soustraction amène en douceur à

$$(2\rho + 1)(x_2^* - x_1^*) = 0$$

Comme le réel $1 + 2\rho$ n'a jamais eu l'intention saugrenue de s'annuler il semble que nous en sommes *in fine* à

$$x_1^* + x_2^* = 2 \quad \text{et} \quad x_1^* = x_2^*$$

d'où il ressort *de memoria* que fatalement

$$x_1^* = x_2^* = 1$$

Cette pertinente conclusion d'analyse montre que, quoi qu'il arrive, unicité il y aura dans notre projet, et nous pouvons alors entamer la synthèse.

– Ce n'est qu'une formalité — nous la laissons *as usual* à l'impétrant — que de vérifier que le couple $(1, 1)$ est profondément convenable et il y a donc effectivement qu'un seul couple digne d'intérêt, en l'occurrence

$$x^* = (1, 1)$$

d. Considérons le couple fonctionnel (x_1, x_2) dont les deux entrées sont égales à l'application nulle. Il est assurément solution de (S) mais pourtant…

La réponse à la question posée est donc définitivement non.

↱ Le verbe « converger » est ici totalement déplacé puisque l'objet concerné n'est ni une suite, ni une série, ni même une intégrale impropre…

6. Il y a dans cette question une ou deux choses non officiellement claires que nous nous empressons de décanter.

DÉFINITION :

Soit n un entier naturel non nul, A une matrice symétrique réelle d'ordre n et q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ attachée à la matrice A. On dit que A est définie positive *si*

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \qquad X^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot X > 0 \qquad (\text{DP})$$

L'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives est internationalement noté

$$\mathrm{S}_n^{+*} \quad \text{ou} \quad \mathrm{S}_n^{++}$$

et il a une importance considérable à de nombreux endroits de la mathématique.

La condition (DP) *s'écrit également*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad q(x) > 0$$

et l'application q prend à son tour le nom de forme quadratique définie positive.

CARACTÉRISATION SPECTRALE :

Soit n un entier naturel non nul et A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On a l'équivalence logique

$$A \in \mathsf{S}_n^{++*} \iff \operatorname{Spec} A \subset \mathbb{R}_+^*$$

ce que le frenchy *traduit en disant qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si, et seulement si, ses valeurs propres sont* strictement *positives.*

a. Soit r un nombre réel. Il est très facile de constater que

$$\operatorname{Spec} Q_r = \{1 - r\,, 1 + r\}$$

Les valeurs propres de Q_r ne sont donc strictement positives qu'à la condition *sine qua non* que le réel r appartienne à l'ouvert $]-1, 1[$. Il résulte alors de nos mises au clair que

$$q_r \quad \text{définie positive} \qquad \iff \quad |r| < 1$$

Poursuivons notre affaire. Si cela ne dérange personne et parce que nous le valons bien nous utiliserons ici(*) les lettres x et y en place de u_1 et u_2 à telle enseigne que nous avons *quadratiquement*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad q_r(x, y) = x^2 + y^2 - 2rxy$$

– Notons alors tout d'abord que

$$q_r(1, 0) = 1$$

ce qui prouve déjà que $\mathcal{C}_r$ est une partie *non vide* de $\mathbb{R}^2$.

– Observons ensuite que les formes quadratiques sur *tous* les $\mathbb{R}^n$ du monde y sont polynomialement continues et que $\mathcal{C}_r$ est précisément l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la forme quadratique q_r. N'en déplaise alors à Felix Hausdorff, l'ensemble $\mathcal{C}_r$ est une partie *fermée* de $\mathbb{R}^2$.

↱ Il est important de constater que ces deux premières propriétés sont d'actualité pour n'importe quelle valeur du réel r. C'est pour la troisième qui va immédiatement suivre que nous annonçons r vérifiant désormais

$$|r| < 1$$

– Ce troisième et dernier point point est un peu plus délicat à négocier. Soit (x, y) appartenant à $\mathcal{C}_r$. Nous avons

$$x^2 + y^2 = 1 + 2rxy$$

(*) Il nous arrivera plus tard de faire également le même choix !

d'où il ressort *absolument* que

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 + 2|xy| \cdot |r| \leqslant 1 + (x^2 + y^2) \cdot |r|$$

la dernière inégalité provenant, positivement, de la très classique majoration

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2$$

remarquablement connue de tous les potaches du collège ! Nous en sommes ainsi à

$$\big(1 - |r|\big)(x^2 + y^2) \leqslant 1$$

Oui mais voilà, il est bien précisé ici que

$$1 - |r| > 0$$

à telle enseigne que

$$x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{1 - |r|}$$

Cela montre imparablement que $\mathcal{C}_r$ est incluse dans une boule fermée de centre l'origine et dont le malicieux lecteur débusquera le rayon. À ce titre l'ensemble $\mathcal{C}_r$ est une authentique partie *bornée* de $\mathbb{R}^2$.

En résumé, lorsque q_r est définie positive, l'ensemble $\mathcal{C}_r$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^2$ ce qui devrait bientôt intéresser un certain Karl…

b. Nous mettons en avant les deux allégations suivantes.

– Vu l'idyllique position de r, $\mathcal{C}_r$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathbb{R}^2$.

– Au rique de radoter, la forme quadratique q_s est continue sur $\mathbb{R}^2$ et elle l'est donc *a fortiori* sur $\mathcal{C}^r$.

Cela déclenche sur-le-champ l'important théorème d'optimisation de Karl Weierstrass et, sur l'ensemble $\mathcal{C}_r$ s'entend, l'application q_s possède un *maximum* et un *minimum* et puis c'est tout !

↱ Pourquoi diable compliquer les choses en parlant de bornes et d'atteinte ?

c. Nous avons déjà évoqué la continuité des formes quadratiques. Elles ont en réalité beaucoup plus de classe que cela et en particulier la classe $\mathcal{C}^1$. C'est donc le cas de l'application q_r sur le grand ouvert $\mathbb{R}^2$ et nous avons en outre

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad \nabla q_r(u) = 2(u_1 - ru_2, u_2 - ru_1)$$

Soit maintenant u appartenant à $\mathcal{C}_r$ et supposons par l'absurde que

$$\nabla q_r(u) = 0$$

Vu la position géographique de r on en déduit mentalement que u est nul ce qui n'est pas très sérieux puisqu'il se trouve dans $\mathcal{C}_r$…

Bref,

$$\forall u \in \mathcal{C}_r \qquad \nabla q_r(u) \neq 0$$

et tout le monde est ravi.

d. Il suffit de demander !

CONDITION NÉCESSAIRE DU PREMIER ORDRE :

L'application q_s est quadratiquement de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et la contrainte d'appartenance à $\mathcal{C}_r$ est non critique. Dans ces conditions, si l'application q_s admet en un point u de $\mathbb{R}^2$ un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}_r$, il faut *impérativement que*

i. Le point u appartienne à $\mathcal{C}_r$.

ii. Il existe un réel λ tel que

$$\nabla q_s(u) = \lambda \nabla q_r(u)$$

On dit alors que u est un point critique de la fonction q_s sous la contrainte $\mathcal{C}_r$.

e. Nous commençons par rechercher les points critiques de q_s sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ et parce que c'est plus *zouli* nous préférerons encore une fois x et y à u_1 et u_2.

– Supposons que (x, y) soit un tel point. D'après la récente question de cours, nous devons avoir

$$(x, y) \in \mathcal{C}_r$$

et il doit exister un réel λ tel que

$$(x - sy, y - sx) = \lambda(x - ry, y - rx)$$

ce qui peut se consigner dans le système

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + (\lambda r - s)y = 0 \\ (\lambda r - s)x + (1-\lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2rxy = 1 \end{cases}$$

On s'intéresse alors fortement au sous-système linéaire d'ordre deux que forment les deux premières équations. Il ne peut absolument pas être de Cramer sans quoi il n'aurait que la solution $(0, 0)$ en totale opposition avec la troisième équation. Nous apprenons alors que son déterminant est nul, c'est-à-dire

$$(1-\lambda)^2 = (\lambda r - s)^2$$

ou encore

$$1 - \lambda = \lambda r - s \quad \text{ou} \quad 1 - \lambda = s - \lambda r$$

Au vu et au su de l'idéale position du réel r, cela ne laisse que deux possibilités pour le sieur λ, en l'occurrence

$$\lambda_1 = \frac{1+s}{1+r} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1-s}{1-r}$$

– Lorsque $\lambda = \lambda_1$, le report dans la première du système et la providencielle

$$s \neq r$$

conduisent tout d'abord à

$$y = -x$$

égalité qui, injectée dans la troisième, révèle gentiment

$$2x^2(1 + r) = 1$$

c'est-à-dire

$$x = a \quad \text{ou} \quad x = -a$$

où, histoire d'alléger un peu les écritures, nous avons décidé du baptême

$$a = \frac{1}{\sqrt{2(1 + r)}}$$

ouvertement autorisé par la gentille position stratégique de r.

– Lorsque $\lambda = \lambda_2$, c'est *mutatis mutandis* que l'on parvient cette fois à

$$y = x$$

égalité qui, injectée dans la troisième, révèle maintenant

$$2x^2(1 - r) = 1$$

Autant dire alors que

$$x = b \quad \text{ou} \quad x = -b$$

où, histoire de délester le discours, nous avons ici opté pour

$$b = \frac{1}{\sqrt{2(1 - r)}}$$

la position de r étant encore une fois au cœur du débat !

La conclusion de cette belle analyse(*) nous apprend que les points critiques de q_s sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ doivent nécessairement appartenir à l'ensemble

$$\{(a, -a), (-a, a), (b, b), (-b, -b)\}$$

Nous laissons à notre courageux lecteur le soin de se charger de la synthèse et il vérifiera que les quatre acolytes — non anonymes ! — que nous venons de croiser sont effectivement convenables.

Voilà donc que l'application q_s possède définitivement quatre points critiques sous la contrainte $\mathcal{C}_r$ et il s'agit du quatuor mis en évidence quelques lignes plus haut.

(*) Car il s'agit bien d'une analyse !

Maintenant que les *seuils critiques* ont été atteints nous revenons à nos ovins, en l'occurrence le maximum et le minimum de l'application q_s. Selon la condition nécessaire énoncé plus haut ils doivent impérativement être atteints en l'un des points du quatuor et c'est là que nous faisons valoir que

$$q_s(a,-a) = q_s(-a,a) = \frac{1+s}{1+r} \quad \text{et} \quad q_s(b,b) = q_s(-b,-b) = \frac{1-s}{1-r}$$

les calculs se faisant à *la mano*, tout en ajoutant que

$$\frac{1+s}{1+r} < \frac{1-s}{1-r}$$

puisque après réduction au même dénominateur apparaît l'égalité

$$\frac{1-s}{1-r} - \frac{1+s}{1+r} = 2 \cdot \frac{r-s}{1-r^2}$$

Il n'en faut décidément pas plus pour revendiquer les égalités

$$m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r} \quad \text{et} \quad M_{r,s} = \frac{1-s}{1-r}$$

tout en précisant que le minimum n'est atteint qu'aux points $(a,-a)$ et $(-a,a)$ et le maximum aux points (b,b) et $(-b,-b)$.

Soit pour finir u appartenant à $\mathbb{R}^2$ et organisons-nous en deux temps.

- Si $u \neq 0$, la *définiepositivité* de q_r permet de considérer le vecteur

$$\frac{u}{\sqrt{q_r(u)}}$$

qui a *quadratiquement* le bon goût d'appartenir à $\mathcal{C}_r$ à telle enseigne que

$$q_s\left(\frac{u}{\sqrt{q_r(u)}}\right) \leqslant M_{r,s}$$

inégalité qui *requadratiquement* nous amène naturellement à

$$\frac{q_s(u)}{q_r(u)} \leqslant M_{r,s}$$

Un petit coup de positivité plus loin, nous voilà rendus à

$$q_s(u) \leqslant M_{r,s}\, q_r(u)$$

- Si $u = 0$, l'inégalité précédente reste manifestement d'actualité et la proposition

$$\mu = M_{r,s}$$

devra immanquablement satisfaire tout le monde.

↱ Nous venons d'établir que

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad q_s(u) \leqslant M_{r,s}\, q_r(u)$$

ce qui est infiniment plus abouti que la simple existence d'un réel μ vérifiant

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad q_s(u) \leqslant \mu\, q_r(u)$$

Cette simple existence aurait pu aisément s'obtenir à moindre frais…

7.*a*. Quelques développements *remarquablement* collégiens nous persuadent quasi mentalement de l'égalité

$$q_r\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)\right) = (1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2$$

et l'équivalence logique s'en déduit aussitôt sans que, une fois n'est pas coutume, aucune planification ne s'impose.

↱ Nous laissons au dévoué lecteur le soin de découvrir que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui même qui à chaque couple (v_1, v_2) fait correspondre le couple (u_1, u_2) c'est-à-dire l'application $\rho_{\pi/4}$ définie par

$$\forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \qquad \rho_{\pi/4}(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$$

est loin d'être anodine. Il vérifiera quasi mentalement qu'il s'agit d'un *genuine* endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est précisément

$$\mathrm{Mat}_{can}(\rho_{\pi/4}) = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix}$$

puisque tout *trigophile* qui se respecte sait *farpaitement* que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le géomètre dans l'âme aura alors reconnu la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\pi/4$.

Nous ne pouvions évidemment pas passer sous silence d'aussi sérieures et jolies choses…

b. Compte tenu de la fameuse question 7.*a* et de la plus *pythagoricienne* des formules de trigonométrie, l'on se doute que la route choisie va consister à créer un certain nombre de couples (v_1, v_2) — *grosso modo* une centaine ! — pour lesquels

$$\sqrt{1-r} \cdot v_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1+r} \cdot v_2$$

soient respectivement le cosinus et le sinus d'un *même* réel. Il devra alors impérativement s'ensuivre que

$$(1-r)v_1^2 + (1+r)v_2^2 = 1$$

ce qui déposera le couple

$$(u_1, u_2) = \rho(v_1, v_2)$$

dans l'ensemble $\mathcal{C}_r$, l'application ρ ayant eu nos faveurs à l'époque.

Allons donc voir avec impatience si c'est bien ce que fait le fameux code…

Nous ne nous attardons pas sur la première instruction qui se passe de tout commentaire(*) et nous prenons alors les autres instructions les unes après les autres :

– après avoir consulté la manuel des *scilabeurs juniors* nous affirmons que la commande (2) place dans la matrice ligne **theta** les cent points formant la subdivision uniforme — ou régulière — du segment $[0, 2\pi]$. Si l'on ne tombe pas dans l'éternel panneau du « poteaux *versus* intervalles », l'on en déduit que ces cent points sont les

$$\vartheta_k = k \cdot \frac{2\pi}{99} \quad \text{où} \quad k \in [\![0, 99]\!]$$

et c'est d'ailleurs pour cette raison que nous aurions préféré $n = 101$…

– l'instruction (3) place alors dans la matrice ligne nommée **ct** les réels

$$\cos\vartheta_k \quad \text{où} \quad k \in [\![0, 99]\!]$$

– de la même façon, l'instruction (4) place dans la matrice ligne **st** les réels

$$\sin\vartheta_k \quad \text{où} \quad k \in [\![0, 99]\!]$$

À ce stade là du code nous disposons de délicieux couples, en l'occurrence les

$$(\cos\vartheta_k, \sin\vartheta_k) \quad \text{où} \quad k \in [\![0, 99]\!]$$

formés, comme prévu *supra*, de cosinus et de sinus d'un *même* réel.

Comme les réels $1-r$ et $1+r$ sont depuis longtemps *strictement* positifs(**) nous pouvons définir les couples (v_{1k}, v_{2k}) par les relations

$$\sqrt{1-r} \cdot v_{1k} = \cos\vartheta_k \quad \text{et} \quad \sqrt{1+r} \cdot v_{2k} = \sin\vartheta_k$$

puis récupérer leurs images (u_{1k}, u_{2k}) par l'application ρ qui sont définies par

$$u_{1k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r}} \cos\vartheta_k - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sin\vartheta_k \qquad (\mathrm{S}_1)$$

puis

$$u_{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r}} \cos\vartheta_k + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r}} \sin\vartheta_k \qquad (\mathrm{S}_2)$$

(*) À cela près que nous aurions préféré n=101… *Nobody's perfect !*

(**) Nous n'avons évidemment pas oublié que r vaut ici $1/2$ mais c'est pour des raisons purement stratégiques que nous préférons prendre notre temps…

Nous décidons seulement maintenant d'aller plus loin en faisant valoir que r vaut ici $1/2$ et que quelques tranquilles simplifications métamorphosent ainsi ces données en

$$u_{1k} = \cos\vartheta_k - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\vartheta \quad \text{et} \quad u_{2k} = \cos\vartheta_k + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\vartheta$$

– en ouvrant parfaitement les mirettes, l'intruction (5) remplit une matrice à deux lignes et 100 colonnes dont les entrées de la $k^{\text{ième}}$ colonne sont *miraculeusement* les deux réels

$$\cos\vartheta_k - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\vartheta_k \quad ; \quad \cos\vartheta_k + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\vartheta_k$$

c'est-à-dire précisément u_{1k} et u_{2k} et dès lors

$$(u_{1k}, u_{2k}) \in \mathcal{C}_r$$

puisque tout s'est déroulé comme nous l'avions organisé quelques lignes plus haut.

– l'instruction (6) se charge pour finir de la partie *artistique* de l'affaire et, à la manière de Seurat, Signac, Pissaro et autres Verhaeren, la commande **plot** va imprimer les cent points

$$(u_{1k}, u_{2k}) \quad \text{où} \quad k \in [\![0, 99]\!]$$

de l'ellipse(*) $\mathcal{C}_r$ et donner ainsi le *zouli* dessin figurant dans le texte.

↱ La chose que l'on peut cependant déplorer est cette curieuse attitude qu'a eu *scilab* de ne pas placer les axes à la croisée des chemins…

c. La ligne de niveau z_0 de la fonction q_s est, par définition, l'ensemble de tous les couples $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$q_s(u_1, u_2) = z_0$$

Comme q_s est une forme quadratique et que z_0 est *strictement* positif, il s'agit également de l'ensemble des couples (u_1, u_2) pour lequels

$$q_s\left(\frac{1}{\sqrt{z_0}}(u_1, u_2)\right) = 1 \quad \textit{i.e.} \quad \frac{1}{\sqrt{z_0}}(u_1, u_2) \in \mathcal{C}_s$$

Nous avons bien compris comment la question *b* a géré le cas de $\mathcal{C}_r$ *and, sure, we aren't be borned yesterday*. Nous décidons donc de ressortir les deux formules stratégiques (S) *supra*, d'y remplacer bêtement r par $s = 1/4$ et d'y changer les u_{ik} en

$$\frac{u_{ik}}{\sqrt{z_0}}$$

Cela nous amène quasimentalement aux nouvelles égalités

$$u_{1k} = \sqrt{z_0}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_k - \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\vartheta_k\right] \quad ; \quad u_{2k} = \sqrt{z_0}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta_k + \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\vartheta_k\right]$$

(*) Il se trouve que $\mathcal{C}_r$ fait partie de la bande des fameuses coniques étudiées entre autres par Blaise Pascal et qui compte les ellipses, les paraboles et les hyperboles.

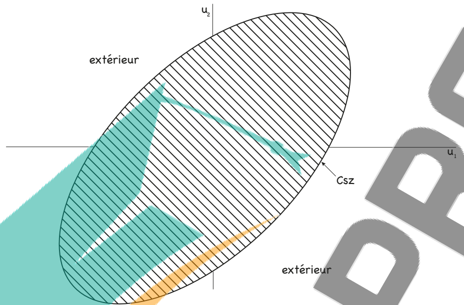
La complétion de la ligne (7) se fait alors en reconnaissant les siens. *Here you are !*

$$\textbf{Csz} = [\, sqrt(z) * (sqrt(2/3) * \textbf{ct} - sqrt(2/5) * \textbf{st})\ ;$$

$$sqrt(z) * (sqrt(2/3) * \textbf{ct} + sqrt(2/5) * \textbf{st})]\ ;$$

instruction que nous avons dû écrire sur deux lignes parce qu'elle était décidément trop longue et nous prions du coup le lecteur de bien vouloir nous pardonner ce désagrément !

d. Nous ne disposons pas du *hawk-eye* pour être vraiment sûr que les deux ellipses se rencontrent mais nous allons être obligés de supposer que c'est la plus pure des réalités et nous allons être également contraints de lire(*) sur le dessin que l'ellipse $\mathcal{C}_r$ est entièrement située dans la partie extérieure de sa cousine $\mathcal{C}_{sz}$ représentée sur la figure ci-dessous.



L'ellipse $\mathcal{C}_{sz}$ fait en réalité apparaître trois régions du plan :

– l'ellipse proprement dite, formée par les point u de $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$q_s(u) = z_0$$

– la partie intérieure — hachurée sur la figure — correspondant aux points u de $\mathbb{R}^2$ satisfaisant à

$$q_s(u) \leqslant z_0$$

et il s'agit évidemment d'une partie intérieure au sens large, c'est-à-dire ellipse comprise.

– la fameuse partie extérieure — au sens large *again* — décrite par les points u du plan pour lesquels

$$q_s(u) \geqslant z_0$$

Au vu et au su de ce que nos lectures graphiques nous ont apprises il semble inévitable que

$$\forall u \in \mathcal{C}_r \qquad q_s(u) \geqslant z_0$$

(*) Bien que cela soit totalement prohibé par l'académie, nous n'avons ici pas le choix. Nous devons nous appuyer sur un croquis pour obtenir des informations fiables !

ce qui veut déjà dire que z_0 minore la fonction q_s sur l'ensemble $\mathcal{C}_r$ et comme nous avons bien deviné que les deux ellipses en question s'effleurent, notre minorant est atteint en au moins un point de $\mathcal{C}_r$ à telle enseigne que

$$z_0 = \min_{\mathcal{C}_r} q_s \quad i.e. \quad z_0 = m_{r,s}$$

puisque nous n'avons pas égaré les notations adoptées lors de la sixième question. En outre et si l'on en croit l'*alinea* 6.e il semble que

$$m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r}$$

et puisque nous sommes censés avoir supposé que

$$r = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad s = \frac{1}{4}$$

le résultat des courses est finalement

$$z_0 = \frac{5}{6}$$

Reste pour finir à causer de tangentes communes. Nous nous calons derechef sur l'éternel *alinea* 6.e qui permet d'affirmer que les points d'atteinte de notre minimum — les fameux points d'affleurement — sont

$$(a, -a) \quad \text{et} \quad (-a, a) \quad \text{où} \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

puisque, dans cette question r est définitivement égal à $1/2$, et que dans le cas général

$$a = \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}$$

Nous allons maintenant tourner la tête de $\pi/4$ dans le sens des aiguilles d'une montre et travailler ainsi dans un nouveau repère dont les formules de changement se déduisent aisément de la *rotationnelle* remarque que nous avons faite à l'issue de la question 7.a, à savoir

$$(u_1, u_2) = \rho_{\pi/4}(v_1, v_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$$

ou si l'on préfère l'envers du décor

$$(v_1, v_2) = \rho_{-\pi/4}(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1 + u_2, u_1 - u_2)$$

Dans ce nouveau décor, les choses vont se passer de la façon suivante

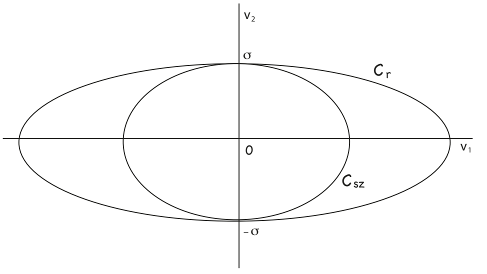


figure elliptique

une des raisons essentielles étant que les fameux points d'affleurement ont aisément pour nouvelle adresse

$$\rho_{-\pi/4}(a,-a) \quad ; \quad \rho_{-\pi/4}(-a,a) \quad \text{où} \quad a=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

c'est-à-dire

$$(0,\sigma) \quad ; \quad (0,-\sigma) \quad \text{où} \quad \sigma=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Nous mettons en outre en avant deux choses :

– au vu et au su de la question 7.a — encore elle ! — la toute nouvelle équation de l'ellipse $\mathcal{C}_r$ est

$$\frac{1}{2}v_1^2+\frac{3}{2}v_2^2=1$$

– grâce à la même source mais légèrement modifiée, celle de l'ellipse $\mathcal{C}_{sz}$ est à son tour

$$\frac{3}{4}v_1^2+\frac{5}{4}v_2^2=\frac{5}{6}$$

puisque nous avons récemment découvert que z_0 se doit de valoir $5/6$.

Considérons alors la partie *nord* de la figure elliptique précédente — celle située au nord de l'axe des abscisses — qui met en scène deux demi-ellipses dont il est facile de constater que ce sont les représentations graphiques des fonctions

$$v_1 \longmapsto \sigma\sqrt{1-\frac{v_1^2}{2}} \quad \text{et} \quad v_1 \longmapsto \sigma\sqrt{1-\frac{9\,v_1^2}{10}}$$

où σ a été défini quelques lignes plus haut. Nous laissons désormais au lecteur le soin de vérifier que ce sont deux applications dérivables en zéro et dont les dérivées en zéro sont *nulles*. Les deux courbes ont donc à leur pôle *nord* $(0,\sigma)$ la *même* tangente horizontale.

Les événements du *sud* n'auront droit, quant à eux, qu'aux deux mots magiques que sont les compères *mutatis* et *mutandis*.

8. Comme x_1 et x_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$, il en est évidemment de même de y_1 et y_2 puis ensuite de f parce que

$$f=y_1^2+y_2^2-2sy_1y_2$$

Everything is therefore under control !

↱ Nous sommes permis au passage de raisonner fonctionnellement ce qui permet de gommer les pollueurs « (t) » et dans la foulée, de nous faire des vacances !

↱ Comme ρ est strictement positif il en est de même de $\rho+1$ et sa place au dénominateur n'est donc pas usurpée. Nous ne le redirons plus !

a. On trouve aisément

$$f' = 2y_1'(y_1 - sy_2) + 2y_2'(y_2 - sy_1)$$

et nous allons nous occuper séparément des deux compères du *right hand side*.

– Solution de (S) oblige, nous avons par hypothèse

$$y_1' = x_1' = x_1\big(\rho(x_2 - x_1) - (x_1 - 1)\big) = x_1\big(\rho(y_2 - y_1) - y_1\big)$$

la dernière égalité ne réclamant que les mirettes dans l'axe des verres ! Il suffit alors de bien capter que tour à tour

$$\rho(y_2 - y_1) - y_1 = \rho y_2 - (\rho+1)y_1 = -(\rho+1)(y_1 - sy_2)$$

pour apprendre que s'agissant de notre premier compère l'on a

$$2y_1'(y_1 - sy_2) = -2(\rho+1)x_1(y_1 - sy_2)^2$$

– On démontre *mutatis mutandis* que

$$2y_2'(y_2 - sy_1) = -2(\rho+1)x_2(y_2 - sy_1)^2$$

et nous pouvons ainsi envisager la suite.

b. Nous continuons à gommer les « (t) ». Il vient d'être dit que

$$x_1 \geqslant c \quad \text{et} \quad x_2 \geqslant c$$

et vu le signe des uns et des autres nous ne tardons pas de déduire de la précédente que

$$f' \leqslant -2c(1+\rho)\big((y_2 - sy_1)^2 + (y_2 - sy_1)^2\big)$$

ce qui, une fois que le potache a fait le ménage, devient

$$f' \leqslant -2c(1+\rho)\big((1+s^2)(y_1^2 + y_2^2) - 4sy_1y_2\big)$$

Une fois le réel $1+s^2$ mis tout à fait légalement en facteur, le *physio* assène

$$f' \leqslant -2c(1+\rho)(1+s^2)q_r(y_1, y_2)$$

la notation $q_r(y_1, y_2)$ étant empruntée aux probabilistes qui n'ont jamais voulu utiliser le « $\circ$ » pour exprimer une composition. La destination est proche. Pour l'atteindre, il reste à accepter gentiment les deux égalités

$$1+\rho = \frac{1}{1-s} \quad \text{et} \quad 1 - r = 1 - \frac{2s}{1+s^2} = \frac{(1-s)^2}{1+s^2}$$

desquelles on déduit *de memoria* que

$$(1+\rho)(1+s^2) = \frac{1-s}{1-r}$$

et l'on a donc effecivement

$$f' \leqslant -2c \cdot \frac{1-s}{1-r} \cdot q_r(y_1, y_2)$$

c. Nous laissons au lecteur le soin de s'assurer des inégalités

$$0 < s < r < 1$$

qui réveillent la récente question 6.*e* à tel point que

$$q_r(y_1, y_2) \geqslant \frac{1-r}{1-s} q_s(y_1, y_2)$$

La multiplication par un *négatif* opérant un naturel retournement de situation nous en déduisons effectivement

$$f' \leqslant -2cf$$

Comme nous ne changeons pas une équipe qui gagne, nous allons nous inspirer fortement de ce qui s'est passé à la fin de la question 4.*d*.

À cet effet, nous considérons la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \phi(t) = e^{2ct} f(t)$$

Elle y est manifestement dérivable et l'on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \phi'(t) = e^{2t}\big(f'(t) + 2cf(t)\big) \leqslant 0$$

la négativité provenant précisément de ce que nous venons d'apprendre à l'instant.

– Comme *supra* l'application ϕ décroit sur $\mathbb{R}_+$.
– Comme *supra* elle possède une limite finie en plus l'infini.

Il reste alors à observer que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f(t) = e^{-2ct} \cdot \phi(t)$$

et à ne pas avoir perdu de vue que c est *strictement* positif.

↱ Le texte a imposé $c < 1$, ce qui est visiblement totalement inutile… À bon entendeur !

9. Soit x une telle solution de (S). Il existe donc deux réels *strictement* positifs c_1 et c_2 tels que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad x_1(t) \geqslant c_1 \quad \text{et} \quad x_2(t) \geqslant c_2$$

Le réel

$$c = \min(c_1, c_2)$$

vérifie par construction

$$c > 0 \quad ; \quad \forall t \geqslant 0 \qquad x_1(t) \geqslant c \quad \text{et} \quad x_2(t) \geqslant c$$

et nous nous retrouvons ainsi dans le nouveau cadre — simplifié par nos soins ! — de la précédente dont nous conservons bien entendu toutes les notations. Le résultat des courses est alors

$$q_s\big(y(t)\big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

C'est cette fois la minoration de Rayleigh-Ritz qui va terminer l'affaire. Elle révèle en effet que

$$\forall t \geqslant 0 \qquad m\,\|y(t)\|^2 \leqslant q_s\big(y(t)\big)$$

où m est la plus petite valeur propre de la matrice Q_s. Cette dernière étant définie positive il s'ensuit que m est *strictement* positive et nous avons par *séquent con*(*),

$$\forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \|y(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{m} \cdot q_s\big(y(t)\big)$$

Il en résulte aisément par *squeeze* que

$$y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

et comme x et y sont liés par la relation

$$x = x^* + y$$

voilà que fatalement

$$x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x^*$$

En conclusion, toute solution x de (S) dont les entrées sont minorées par des réels *strictement* positifs se doit de vérifier

$$x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} x^*$$

Partie 3

Les deux dernières lignes du chapeau de cette troisième partie signalent en particulier que A est diagonalisable et que

$$\operatorname{Spec} A \subset]-1, 1[$$

10. Comme le spectre de A est inclus dans l'ouvert $]-1, 1[$, il en résulte *affinement* que

$$\operatorname{Spec}(I_p - A) \subset]0, 2[$$

et la matrice $I_p - A$ devient alors inversible puisque 0 n'appartient pas à son spectre. Dans ces conditions l'équation

$$(I_p - A) \cdot X^* = B$$

(*) Déductif typiquement toulousain !

a effectivement une unique solution en la personne de

$$X^* = (I_p - A)^{-1} \cdot B$$

11. Nous commençons par quelques petites mises au point.

i. La suite $\big(Y(n)\big)$ est parfaitement définie, c'est indéniable, mais nous allons préciser par induction que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le vecteur aléatoire $Y(n)$ est fonction des aléas numériques $U_1, \ldots, U_n$.

• Au vu et au su de l'égalité

$$Y(1) = \big(A + U_1 I_p\big) \cdot X(0) + B$$

l'initialisation est *in the pocket*.

• Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction(*) ϕ telle que :

$$Y(n) = \phi(U_1, \ldots, U_n)$$

Puisqu'alors

$$Y(n+1) = \big(A + U_{n+1} I_p\big) \cdot \phi(U_1, \ldots, U_n) + B$$

il semble que la messe soit dite.

ii. Nous observerons ensuite que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout couple (i,j) d'éléments de $[\![1,p]\!]$, l'élément en place (i,j) de la matrice aléatoire $A + U_k \cdot I_p$ n'est autre que

$$A_{ij} + \delta_{ij} U_k$$

où l'on ne présente plus le fameux « delta » de Leopold Kronecker.

iii. Une dernière chose, le texte parle avec beaucoup de légèreté de l'espérance des vecteurs $y(n)$, sans savoir si ces derniers ont vraiment des raisons d'espérer. Nous devrons donc être vigilants et sur-le-champ d'ailleurs…

a. Nous allons derechef nous affranchir de nos récentes craintes par récurrence et nous y parlerons également de calcul.

• Soit alors $i \in [\![1,p]\!]$. D'après ce que nous venons de narrer et la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley, il semble que

$$Y_i(1) = \sum_{j=1}^{p} \big(A_{ij} + \delta_{ij} U_1\big) X_j(0) + b_i$$

Comme la variable U_1 possède une espérance il résulte du théorème de linéarité que c'est aussi le cas de $Y_i(1)$ « même que(**) », selon la formule de linéarité l'on devrait avoir

$$\mathsf{E}\big(Y_i(1)\big) = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} x_j(0) + b_i$$

(*) Nous laissons au lecteur le soin de préciser son départ et son arrivée…
(**) Comme on dit dans les cours de récré !

puisqu'il a été précisé que U_1 est centrée. Autant dire alors en compactant cela que

$$\mathrm{E}\big(Y(1)\big) = A \cdot X(0) + B = X(1)$$

la dernière égalité reposant sur la définition inductive de la suite $\big(X(n)\big)$.

L'initialisation est initialisée…

• Supposons que pour un entier $n \geqslant 1$ le vecteur $Y(n)$ possède une espérance et annonçons un élément i de $[\![1, p]\!]$. La même argumentation que celle développée pendant le *délit d'initié* dévoile cette fois que

$$Y_i(n+1) = \sum_{j=1}^{p} \big(A_{ij} + \delta_{ij} U_{n+1}\big) Y_j(n) + b_i$$

Selon l'hypothèse de récurrence et notre première mise au point nous sommes en mesure d'affirmer que

- les variables $Y_j(n)$ sont des fonctions de $U_1, \ldots, U_n$;
- selon le lemme des coalitions la variable U_{n+1} est indépendante des $Y_j(n)$;
- les variables $Y_j(n)$ possèdent une espérance ;
- selon le *genious* théorème « espérance du produit de variables indépendantes » les produits $U_{n+1} Y_j(n)$ possèdent également une espérance puisque c'est le cas de la variable U_{n+1} et qu'une certaine indépendance mentionnée quelques lignes plus haut est là pour nous conforter. En outre

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \qquad \mathrm{E}\big(U_{n+1} Y_j(n)\big) = \mathrm{E}\big(U_{n+1}\big)\mathrm{E}\big(Y_j(n)\big) = 0$$

puisque la variable U_{n+1} est centrée. Le théorème de linéarité assure alors une espérance à la variable $Y_i(n+1)$ ainsi que l'égalité

$$\mathrm{E}\big(Y_i(n+1)\big) = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} \mathrm{E}\big(Y_j(n)\big) + b_i$$

et tout cela se compacte matriciellement en

$$\mathrm{E}\big(Y(n+1)\big) = A \cdot \mathrm{E}\big(Y(n)\big) + B$$

Il est également dit depuis une fort belle lurette que

$$X^* = A \cdot X^* + B$$

et une simple soustraction membre à membre amène définitivement à

$$\mathrm{E}\big(Y(n+1)\big) - X^* = A \cdot \Big(\mathrm{E}\big(Y(n)\big) - X^*\Big)$$

↱ La suite vectorielle $\big(Y(n)\big)$ est depuis peu arithmético-géométrique et il se trouve que le vecteur X^* est précisément son point fixe. Tout cela n'est donc pas vraiment très étonnant…

b. Bien qu'il s'agisse de suites vectorielles, *l'arithmético-géomètre* se doit d'accepter inductivement que

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathsf{E}\big(Y(n)\big) - X^* = A^{n-1} \cdot \Big(\mathsf{E}\big(Y(1)\big) - X^*\Big)$$

Soit alors $n \geqslant 1$. Les *pros* de la diagonalisation savent bien que

$$A^{n-1} = Q \cdot D^{n-1} \cdot Q^{-1}$$

ainsi que

$$D^{n-1} = \mathtt{diag}\big(\lambda_1^{n-1}, \ldots, \lambda_p^{n-1}\big)$$

La situation rêvée des réels λ_i réveille en nous de bons souvenires de la classe de première scientifique à telle enseigne que

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad \lambda_i^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Nous en déduisons tout d'abord que

$$D^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

puis dans la foulée que

$$A^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

où, histoire de compléter le tableau du tout début du texte, nous définissons, composante à composante, la notion de limite d'une suite de matrices.

Il en résulte alors aisément que

$$Y(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} X^*$$

ce qui, une fois que la tête a pivoté de $\pi/2$, devient comme promis

$$y(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^*$$

12. Grâce à l'égalité de diagonalisation

$$A = QDQ^{-1}$$

il est très facile de déduire le fonctionnement de la suite $\big(Z(n)\big)$ de celui de sa proche cousine $\big(Y(n)\big)$ et le résultat des courses est le suivant :

$$\begin{cases} Z(1) = \big(D + U_1 I_p\big) Q^{-1} X(0) + Q^{-1} B \\ \forall n \geqslant 1 \quad Z(n+1) = \big(D + U_{n+1} I_p\big) Z(n) + Q^{-1} B \end{cases}$$

Gardons cela au chaud quelques instants et mettons-nous en route.

a. Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Il y a encore un peu vigilance à avoir puisqu'il n'est pas totalement clair que les $z_k(n)$ possèdent réellement une variance. Nous allons, comme *supra*, nous en assurer par induction sur n tout en menant dans la foulée les aspects calculatoires de l'affaire.

• Notons α_k et β_k les $k^{ièmes}$ entrées repectives des colonnes $Q^{-1}X(0)$ et $Q^{-1}B$. Il résulte de la définition inductive de la suite $\big(Z(n)\big)$ que

$$z_k(1) = \alpha_k\big(\lambda_k + U_1\big) + \beta_k$$

les finesses *métamécaniques*(*) des effets des multiplications par les matrices diagonales étant supposées maîtrisées par l'impétrant. Comme il est dit que U_1 possède une variance, il en résulte immédiatement que $z_k(1)$ — fonction affine de U_1 — en a une également mais nous ne la calculerons pas pour la simple et bonne raison qu'elle ne le mérite pas !

• Supposons que, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable $z_k(n)$ dispose d'une variance. Commençons par signaler que la même définition inductive et les mêmes finesses métamécaniques permettent, cette fois, de revendiquer l'égalité

$$z_k(n+1) = \big(\lambda_k + U_{n+1}\big)z_k(n) + \beta_k$$

où le réel β_k a déjà été présenté plus haut. Occupons-nous alors de la variable

$$\zeta = \big(\lambda_k + U_{n+1}\big)z_k(n)$$

et également de son carré

$$\zeta^2 = \big(\lambda_k + U_{n+1}\big)^2 z_k^2(n)$$

Nous faisons à leur égard les remarques suivantes :

– en ce qui concerne ζ nous faisons valoir trois choses ;

– comme U_{n+1} est centrée, la variable $\lambda_k + U_{n+1}$ possède une espérance et

$$\mathrm{E}\big(\lambda_k + U_{n+1}\big) = \lambda_k$$

un certain théorème de linéarité étant assurément derrière tout cela ;

– selon l'hypothèse de récurrence, il est dit que $z_k(n)$ possède une variance. Elle possède ainsi fatalement une espérance ;

– une dernière chose et non des moindres passe par l'indépendance, déjà justifiée, des variables U_{n+1} et $Y(n)$. Le lemme des coalitions est alors catégorique, les variables

$$U_{n+1} \quad \text{et} \quad Z(n) = Q^{-1}Y(n)$$

le sont également tout comme dans la foulée U_{n+1} et $z_k(n)$. En coalisant derechef, nous parvenons enfin à l'indépendance des variables

$$\lambda_k + U_{n+1} \quad \text{et} \quad z_k(n)$$

(*) Il s'agit de cette habileté, ce *know how*, permettant de mener les calculs matriciels avec le plus de légèreté possible…

L'important théorème « espérance du produit de variables indépendantes » pointe son nez pour la deuxième fois et voici donc que ζ possède une espérance et que

$$\mathsf{E}(\zeta) = \lambda_k \mathsf{E}\big(z_k(n)\big)$$

– nous passons maintenant à la copine ζ^2 et aux allégations suivantes :

– le *remarquable* potache *ado* révèle que

$$\big(\lambda_k + U_{n+1}\big)^2 = \lambda_k^2 + 2\lambda_k U_{n+1} + U_{n+1}^2$$

et nous n'avons pas oublié que U_{n+1} est centrée et qu'elle possède un moment d'ordre deux(*) égal à v_{n+1}. Nous pouvons ainsi linéairement asséner que $\big(\lambda_k + U_{n+1}\big)^2$ possède une espérance et que

$$\mathsf{E}\big(\lambda_k + U_{n+1}\big)^2 = \lambda_k^2 + v_{n+1}$$

– l'hypothèse de récurrence assure une variance à la variable $z_k(n)$, elle lui procure dans la foulée un moment d'ordre deux ;

– nous venons quelques lignes plus haut de mentionner l'indépendance des aléas U_{n+1} et $z_k(n)$. La frénésie coalisatrice entraîne cette fois celle des variables

$$\big(\lambda_k + U_{n+1}\big)^2 \quad \text{et} \quad z_k^2(n)$$

qui déclenche instantanément et pour la troisième fois le théorème « espérance du produit… ».

En bref, la variable ζ possède un moment d'ordre deux et

$$\mathsf{E}\big(\zeta^2\big) = \mathsf{E}\big(\lambda_k + U_{n+1}\big)^2 \cdot \mathsf{E}\big(z_k^2(n)\big) = \big(\lambda_k^2 + v_{n+1}\big)\mathsf{E}\big(z_k^2(n)\big)$$

la dernière égalité provenant de la première des remarques effectuées *supra*. Il reste à avoir une pensée émue pour un célèbre *tandem* et voilà que ζ possède une variance donnée par

$$\mathsf{V}(\zeta) = \mathsf{E}\big(\zeta^2\big) - \mathsf{E}^2(\zeta)$$

Compte tenu des divers résultats que nous venons d'obtenir, nous revendiquons l'égalité

$$\mathsf{V}(\zeta) = \big(\lambda_k^2 + v_{n+1}\big)\mathsf{E}\big(z_k^2(n)\big) - \lambda_k^2 \mathsf{E}^2\big(z_k(n)\big)$$

Le recours au tour de passe-passe

$$\lambda_k^2 = \big(\lambda_k^2 + v_{n+1}\big) - v_{n+1}$$

nous permet de transformer la chose en

$$\mathsf{V}(\zeta) = \big(\lambda_k^2 + v_{n+1}\big)\Big[\mathsf{E}\big(z_k^2(n)\big) - \mathsf{E}^2\big(z_k(n)\big)\Big] + v_{n+1}\mathsf{E}^2\big(z_k(n)\big)$$

(*) Pour une variable centrée, le moment d'ordre deux ou la variance…

égalité qui, *via* une nouvelle promenade en *tandem*, devient

$$\mathsf{V}(\zeta) = \left(\lambda_k^2 + v_{n+1}\right)\mathsf{V}\big(z_k(n)\big) + v_{n+1}\mathsf{E}^2\big(z_k(n)\big)$$

Il suffit pour finir de ne pas avoir égaré l'origine de la variable ζ, à savoir

$$z_k(n+1) = \zeta + \beta_k$$

ainsi que le fameux théorème « variance et affinité ». La variable $z_k(n+1)$ possède bel et bien une variance et l'on a comme promis

$$\mathsf{V}\big(z_k(n+1)\big) = \left(\lambda_k^2 + v_{n+1}\right)\mathsf{V}\big(z_k(n)\big) + v_{n+1}\mathsf{E}^2\big(z_k(n)\big)$$

b. Soit à nouveau $k \in [\![1, p]\!]$. Nous allons nous appuyer sur deux choses :

– *primo*, il est dit *grosso modo* que

$$\lambda_k^2 + v_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_k^2$$

et nous n'avons pas oublié que λ_k^2 est *strictement* inférieur à un. Il est donc possible de proposer un réel c_k vérifiant

$$\lambda_k^2 < c_k < 1$$

et compte tenu de la précédente limite, la quantité $\lambda_k^2 + v_{n+1}$ sera *un jour* inférieure ou égale à c_k ce qui, mathématiquement dit, se traduit par l'existence d'un entier naturel N tel que

$$\forall n \geqslant N \qquad \lambda_k^2 + v_{n+1} \leqslant c_k \qquad (uno)$$

– *deuzio*, nous venons d'apprendre que la suite vectorielle $\big(\mathsf{E}\big(y(n)\big)\big)$ est convergente. Comme la matrice Q^{-1} est constante, le lecteur motivé en déduira très facilement que la suite $\big(\mathsf{E}\big(z(n)\big)\big)$ est également convergente tout comme, en conséquence directe, la suite $\big(\mathsf{E}\big(z_k(n)\big)\big)$ de ses $k^{\text{ièmes}}$ composantes. Il en résulte alors *carrément* que la suite

$$\Big(\mathsf{E}\big(z_k(n)\big)\Big)^2$$

converge aussi et qui dit convergence dit, *a fortiori*, *bornitude* ! Bref, il existe un réel strictement positif M_k tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \Big(\mathsf{E}\big(z_k(n)\big)\Big)^2 \leqslant M_k \qquad (dos)$$

Comme nous sommes — variances obligent — au carrefour de la positivité, la récente question a et les non moins récentes (*uno*) et (*dos*) permettent, mentalement, de passer à l'assaut final !

13. Commençons par signaler que la convergence de la série

$$\sum v_n$$

et une importante condition nécessaire entraînent obligatoirement

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

à telle enseigne que nous sommes bien dans le cocon de la 12.b ce qui est déjà une excellente chose.

Soit alors $j \in \mathbb{N}$. Après avoir observé que $j+N \geqslant N$, la conclusion du cocon est

$$\mathsf{V}\big(z_k(j+N+1)\big) \leqslant c_k \mathsf{V}\big(z_k(j+N)\big) + M_k v_{j+N+1}$$

que les nouvelles notations adoptées métamorphosent en

$$\alpha_{j+1} - c_k\alpha_j \leqslant w_j$$

au prix d'un décisif rappatriement à gauche et c'est déjà une excellente entrée en matière pour la suite.

a. Soit à nouveau $j \in \mathbb{N}$ et ressortons notre récente avancée, en l'occurrence

$$\alpha_{j+1} - c_k\alpha_j \leqslant w_j$$

Soit maintenant $m \in \mathbb{N}$ et multiplions l'affaire par le *positif* c_k^{m-j} ce qui nous amène gentiment à

$$\underbrace{c_k^{m-j}\alpha_{j+1} - c_k^{m-j+1}\alpha_j}_{j\text{-télescope}} \leqslant w_j c_k^{m-j}$$

Comme nous venons de le souligner cette multiplication a eu le bonheur de mettre en place un télescope. L'addition membre à membre, l'entier j baguenaudant de 0 à m, et les effets magiques du télescopage conduisent alors à

$$\alpha_{m+1} - c_k^{m+1}\alpha_0 \leqslant \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j}$$

ce qui, *grosso modo*, est exactement le but recherché…

b. Soit à nouveau $m \in \mathbb{N}$. Pour soulager un peu les écritures nous adoptons la notation

$$u_m = \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j}$$

et comme il y a ici un fort *sérial perfume*, nous allons carrément nous précipiter sur la série

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n$$

Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et S_n sa somme partielle d'ordre n. Nous avons tour à tour

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} u_m = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j} = \sum_{j=0}^{n} w_j \sum_{m=j}^{n} c_k^{m-j}$$

la toute dernière avancée procédant d'une banale réversion de sommations. Pout y voir un peu plus clair le pointilliste écrira volontiers notre somme partielle sous la forme

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} w_j \left(1 + c_k + \cdots + c_k^{n-j}\right)$$

and due to the ambiant positivity, il ne devrait pas être insurmontable d'en déduire que

$$S_n \leqslant \sum_{j=0}^{n} w_j \left(1 + c_k + \cdots + c_k^{n}\right)$$

ce qui peut finalement s'écrire

$$S_n \leqslant \left(1 + c_k + \cdots + c_k^n\right)\left(w_0 + w_1 + \cdots + w_n\right)$$

Notons alors C_n et W_n les sommes partielles d'ordre n respectives des deux séries

$$\sum_{n\geqslant 0} c_k^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} w_n$$

ce qui permet de transformer notre inégalité en

$$S_n \leqslant C_n W_n$$

Il est maintenant temps de mettre en avant les informations suivantes :

– l'idéale position du réel c_k permet au *serial geometer* de clamer la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} c_k^n$$

et nous notons C sa somme.

– il est également dit que la série de terme général (v_n) converge et il se trouve que par définition

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_n = M_k v_{N+n+1}$$

La convergence de la série de terme général (w_n) s'en déduit immédiatement et nous notons W sa somme. Nous apprenons ainsi que

$$C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} C \quad \text{et} \quad W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} W$$

ces convergences s'effectuant en *croissant* puisque toutes les séries du secteur sont à termes positifs. Voilà donc en définitive que

$$S_n \leqslant CW$$