CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à Essec Business School.*

Pour des raisons esthétiques, totalement personnelles, je préfère le graphisme n à son grand frère haut de casse N. J'ai donc, dans le texte qui va suivre, utilisé la *typo* « n » en lieu et place de sa majuscule et j'espère que j'en serai pardonné…

Préliminaire

1. Comme il y a visiblement des hypothèses inutiles d'emblée, nous décidons de transformer l'attaque en annonçant un entier n tout bêtement naturel. Dans la foulée, et histoire de rafraîchir les mémoires *vives*, nous annonçons un autre entier m, lui aussi simplement naturel.

a. Nul ne peut alors ignorer qu'il y a exactement n^m applications d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments et il en résulte en particulier que :

$$|\mathcal{E}_n| = n^n$$

b. Le nombre d'injections d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments est lui aussi bien connu. Il s'agit du nombre d'arrangements A_n^m et nous en déduisons ici que le nombre d'injections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même est :

$$\mathrm{A}_n^n = n!$$

l'égalité supposant que notre sérieux lecteur se soit *arrangé* pour apprendre ses leçons.

Nous rappelons enfin qu'il y a précisément $\binom{n}{m}$ applications strictement croissantes de l'ensemble $[\![1, m]\!]$ dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$ et dans notre cas particulier, il n'y a donc qu'*une seule* application strictement croissante de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

↱ L'hypothèse $n \geqslant 2$ est donc véritablement et définitivement inutile. Tout ce que nous venons de narrer vaut pour tous les entiers naturels du monde, mais bien sûr, si tel ou tel entier est nul, il ne faudra pas avoir le vertige — la peur de l'ensemble vide et de ses affres ! — mais comme nous sommes ici entre grandes personnes…

2. Comme cela se fait fréquemment et plus ou moins officiellement, nous supposerons en outre que :

$$X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$$

Il est cependant bon et important d'avoir capté que toute variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$ qui est *presque sûrement* égale à X se voit également qualifiée de variable exponentielle de paramètre 1, mais peut indéniablement avoir une étendue très différente de $\mathbb{R}_+^*$…

Autre chose, le texte annonce p dans l'ouvert $]0, 1[$ ce qui, au vu et au su de la future question 5.*c*, semble être une réelle maladresse. Ainsi, et si cela ne dérange personne, nous annoncerons tout simplement $p > 0$.

a. Compte tenu de notre récente précision concernant $X(\Omega)$ et de la stricte positivité de p, nous pouvons déjà clamer haut et fort que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. Il suffit de bien connaître l'encadrement standard de la partie entière pour se persuader de l'égalité ensembliste :

$$\big[Y = k\big] = \big[k \leqslant pX < k+1\big]$$

égalité que la *stricte* positivité du réel p transforme immédiatement en :

$$[Y=k]=\left[\frac{k}{p}\leqslant X<\frac{k+1}{p}\right]$$

Il est dit que X est une authentique variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{p})$ et nous sommes alors tenus de savoir(*) que :

$$\left[\frac{k}{p}\leqslant X<\frac{k+1}{p}\right]\in\mathcal{A}$$

En bref, nous avons :

$$[Y=k]\in\mathcal{A}$$

et puisque $\mathbb{N}$ est dénombrable, nous savons que tout cela suffit à justifier que Y est également une *genuine* variable aléatoire discrète sur l'espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{p})$.

Ajoutons alors que X, variable aléatoire à densité, ne charge absolument rien sur son passage et que par conséquent :

$$\mathrm{p}(Y=k)=F_X\left(\frac{k+1}{p}\right)-F_X\left(\frac{k}{p}\right)$$

Les deux réels entre parenthèse étant ouvertement positifs ou nuls, notre parfaite connaissance des répartitions exponentielles amène alors après quelques simplifications et autres aménagements à :

$$\mathrm{p}(Y=k)=\left(1-e^{-1/p}\right)e^{-k/p}$$

b. Nous avons :

$$(Y+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$$

Soit cette fois $k\in\mathbb{N}^*$. Nous avons sans surprise :

$$\mathrm{p}(Y+1=k)=\mathrm{p}(Y=k-1)=\left(1-e^{-1/p}\right)e^{-(k-1)/p}$$

la dernière égalité procédant à la fois de la positivité de $k-1$ et de la précédente question. Tout cela permet alors au *physio* d'asséner que :

$$Y+1\hookrightarrow\mathcal{G}\left(1-e^{-1/p}\right)$$

c. La *géométrie* de la situation fait que la variable $Y+1$ possède une espérance et que :

$$\mathrm{E}(Y+1)=\frac{1}{1-e^{-1/p}}$$

Il en résulte linéairement que Y en possède une aussi et que, tous calculs faits :

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{e^{1/p}-1}$$

(*) Nous sommes en réalité censés ne pas ignorer que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'on a $[X\in I]\in\mathcal{A}$.

Nous rappelons alors une très *stricte* classique selon laquelle :

$$\forall u \in \mathbb{R}^* \qquad e^u > 1 + u$$

et il devrait très rapidement s'ensuivre que :

$$0 < \frac{1}{p} < e^{1/p} - 1$$

Comme l'inversion est *strictement* décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il semble que nous puissions changer de question.

↱ Au cas, très surprenant, où notre lecteur n'aurait jamais croisé la *stricte* classique *supra*, nous lui donnons une idée de route. La fonction $\exp$ ayant la *mega* classe, nos amis Brook et Joseph-Louis assurent dans un élan égalitaire(*) que, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, il existe un réel $c \in \,]0, u[$ tel que :

$$e^u - 1 - u = \frac{u^2}{2} e^c$$

So…

3.a. Soit r et s deux entiers naturels. Nous ne suivrons pas le *hint* du texte pour deux raisons.

– *Primo*, le changement de variable donné est à l'envers. Dagobert, Dagobert !

– *Deuzio*, les preuves d'existences d'intégrale *via* le principe du changement de variable sont souvent sources de regrettables anachronismes.

Nous optons donc pour une approche plus standard. Selon les théorèmes généraux, et parce que s est un *entier*(**) positif, la fonction :

$$x \longmapsto x^r \ln^s x$$

est continue sur le semi-ouvert $]0, 1]$, son intégrale n'est donc impropre qu'une fois et un gentil $x^{1/2}$-*shot* devrait tranquillement venir à bout du problème. En effet, selon nos classiques prépondérances, nous avons :

$$x^{r+(1/2)} \ln^s x \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0$$

la stricte positivité du réel $r + (1/2)$ étant bien sûr sur la scellette et autant dire alors que :

$$x^r \ln^s x = o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) \quad \text{et} \quad \forall x \in \,]0, 1] \quad \frac{1}{x^{1/2}} \geqslant 0$$

Puisque la référence de Riemann :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$$

(*) Nous parlons évidemment de l'*égalité* de Taylor-Lagrange…

(**) Dans le cas contraire, les *aficionados* des fonctions puissances savent que la fonction $\ln^s$ peut n'être *jamais* définie sur $]0,1[$!

est connue pour mener une existence paisible, il en est de même de notre intégrale en remerciant cependant le test de prépondérance en signe positif.

b. Soit à nouveau r et s appartenant à $\mathbb{N}$. Dans l'intégrale :

$$I_{r,s} = \int_0^1 x^r \ln^s x \, dx$$

qui existe depuis peu, et parce que $r+1$ n'est pas nul, nous suggérons le changement de variable :

$$x = e^{-u}$$

Il ne fait aucun doute que la fonction :

$$u \longmapsto e^{-u}$$

réalise une facile bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$ et après un peu de ménage — simplifications, aménagements divers — il résulte déjà du théorème de changement de variable que :

$$I_{r,s} = (-1)^s \int_0^{+\infty} u^s e^{-(r+1)u} du$$

Mais attention, vu ce que nous savons de r, le réel $r+1$ est *strictement* positif et il suffit alors de bien maîtriser ses lois Gamma, plus précisément la loi :

$$\Gamma\big(s+1, (r+1)^{-1}\big)$$

pour en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} u^s e^{-(r+1)u} du = \frac{\Gamma(s+1)}{(r+1)^{s+1}}$$

Oui mais voilà, vu que s est un entier naturel, nul ne peut officiellement ignorer que :

$$\Gamma(s+1) = s!$$

et il s'ensuit alors effectivement que :

$$I_{r,s} = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$$

↱ Le lecteur perspicace pourra constater que le côté entier naturel de r n'a pas vraiment servi dans la bataille. Il est en effet assez facile de constater que toute notre affaire fonctionne encore en l'état pour tout *real* r strictement supérieur à -1. En revanche, le côté *integer* de s…

Partie 1

Nous devons encore une fois rectifier un peu le texte. Il faut savoir en effet qu'il existe des applications T de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telles que $T(X)$ ne soit *pas* une variable aléatoire.

En conséquence, nous dirons plutôt que la loi d'une variable aléatoire Y est accessible depuis X s'il existe une application T de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les *deux* propriétés suivantes :

i. La composée $T(X)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$.

ii. La variable aléatoire $T(X)$ a la même loi que Y.

Autre chose, le texte rappelle l'expression de la densité officielle f_X, mais nous en profitons pour rappeler également celle de la répartition F_X. *Here you are* :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \tag{RX}$$

4. Vu la rectification que nous venons d'opérer il est nécessaire de causer un peu de problématiques *tribales*. Il résulte de la définition de T_a que :

$$\big[T_a(X) = 1\big] = \big[a < X < a + p\big] \in \mathcal{A}$$

l'appartenance finale profitant de ce que X est une *réelle* variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$. Comme l'application $T_a(X)$ ne prend que les deux valeurs 0 et 1 et que les tribus sont stables par complémentation, nous déduisons de tout cela que :

$$\big[T_a(X) = 1\big] \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \big[T_a(X) = 0\big] \in \mathcal{A}$$

et $T_a(X)$ gagne ainsi ses galons d'aléa numérique sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$.

a. Il est maintenant autorisé de parler de probabilité et bien entendu :

$$\mathrm{p}\big[T_a(X) = 1\big] = \mathrm{p}\big[a < X < a + p\big] = F_X(a + p) - F_X(a)$$

puisque, au risque de radoter, les variables à densité ne chargent absolument rien sur leur passage.

La situation géographique de a stipule que les deux réels a et $a + p$ appartiennent au segment $[0, 1]$ et nous avons pris la peine — égalité (RX) — de rappeler l'expression de la répartition de X. Il devrait alors rapidement en résulter que :

$$F_X(a + p) = a + p \quad \text{et} \quad F_X(a) = a$$

de sorte qu'*in fine* :

$$\mathrm{p}\big[T_a(X) = 1\big] = p$$

et la fonction T_a transporte donc X vers la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

↱ Comme il y a vraisemblablement une infinité de valeurs de a autorisées, nous déduisons aisément qu'il y a une infinité de compagnies aériennes assurant la liaison entre X et la loi de Bernoulli de paramètre p. Resterait alors à savoir laquelle est la moins chère…

b. Il est dit que :

$$X(\Omega) =]0,1[\quad \text{et} \quad T_a(X)(\Omega) = \{0,1\}$$

Il devrait aisément s'ensuivre que $X - T_a(X)$ est une variable aléatoire *bornée* et, à ce titre, elle possède tous les moments du monde. La fonction de transport T_a possède donc un coût qui, si l'on en croit un certain théorème de transfert, est donné par :

$$C(T_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - T_a(x)\big)^2 f_X(x)dx$$

ou encore :

$$C(T_a) = \int_0^1 \big(x - T_a(x)\big)^2 dx$$

après une évidente et *uniforme* gestion de facettes. Grâce à nos souvenirs de la classe de quatrième et à une gentille linéarisation, il s'avère déjà que :

$$C(T_a) = \int_0^1 x^2 dx - 2\int_0^1 x\,T_a(x)dx + \int_0^1 \big(T_a(x)\big)^2 dx$$

et comme nous avons déjà eu l'occasion de signaler que $[a, a+p] \subset [0,1]$, l'histoire se facette ensuite en :

$$C(T_a) = \int_0^1 x^2 dx - 2\int_a^{a+p} x\,dx + \int_a^{a+p} dx$$

Les trois intégrales sont maintenant très faciles à calculer et tous calculs faits, il se révèle effectivement que :

$$C(T_a) = \frac{1}{3} - 2ap + pq$$

où, fidèles à nos habitudes bernouliennes, nous avons noté :

$$q = 1 - p$$

c. Comme p est strictement positif et que le réel a est confiné au segment $[0,q]$ la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ est ouvertement :

$$a_0 = q$$

et le coût minimal correspondant est alors :

$$C(T_{a_0}) = \frac{1}{3} - pq$$

5. On note tout d'abord que les applications T_1 et T_2 sont parfaitement définies sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ et comme il est précisé que :

$$X(\Omega) =]0,1[$$

les deux compositions $T_1(X)$ et $T_2(X)$ sont, quant à elles, *farpaitement* définies sur Ω, ce qui est déjà une bonne chose.

a. Prenons nos deux fonctions l'une après l'autre.

– Nous venons déjà d'établir que $T_1(X)$ applique bien Ω dans $\mathbb{R}$ et nous devons maintenant causer de *tribalité* !

Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Les croissances respectives de la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$ et de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ permettent, par double inclusion, d'accéder aisément à l'égalité ensembliste :

$$\left[T_1(X) \leqslant x\right] = \left[X \geqslant e^{-x}\right]$$

et puisque X est une *genuine* variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathfrak{p})$, nous en déduisons alors que :

$$\left[X \geqslant e^{-x}\right] \in \mathcal{A}$$

Tout cela démontre donc déjà que $T_1(X)$ est un véritable aléa numérique sur notre espace ce qui est une nouvelle bonne chose.

Nous pouvons désormais parler de probabilité. La variable à densité X n'ayant aucun atome(*), nous revendiquons l'égalité :

$$F_{T_1(X)}(x) = 1 - F_X\left(e^{-x}\right)$$

et grâce au rappel (RX) *supra* cela devient aisément :

$$F_{T_1(X)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

ce qui permet au *physio* de reconnaître la répartition de la loi exponentielle de paramètre un. Ainsi, la fonction T_1 transporte X vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

– On démontre *mutatis mutandis* que la fonction T_2 transporte également X vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et nous ne pouvons que conseiller à notre dévoué lecteur de se charger d'en rédiger les détails.

↱ Les applications T_1 et T_2 sont bien connues des simulateurs de loi exponentielle. D'ailleurs et en utilisant le vocabulaire de ce texte on démontre dans une *quicky* de l'oral HEC 2012 que T_1 et T_2 sont *les seules* fonctions continues et strictement monotones sur $]0,1[$ qui transportent X vers la loi $\mathcal{E}(1)$.

b. Allons-y derechef à la queue leu leu !

– En ce qui concerne le coût de T_1 et si l'on en croit le théorème de transfert et en ayant mentalement gommé le superflu, nous devons nous pencher sur l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(x + \ln x\right)^2 dx$$

Soit alors $x \in]0,1[$. Depuis l'âge de nos treize ans, nous savons que :

$$\left(x + \ln x\right)^2 = x^2 + 2x \ln x + \ln^2 x$$

(*) Les atomes d'une variable aléatoire sont par définition les points qu'elle charge. Ainsi, *no atom, no charge*, même combat !

et il est acquis depuis longtemps que les trois intégrales :

$$\int_0^1 x^2 dx \quad ; \quad \int_0^1 x \ln x \, dx \quad ; \quad \int_0^1 \ln^2 x \, dx$$

existent puisque cela est totalement évident pour la première — qui soit dit en passant vaut $1/3$ — et que les deux autres sont respectivement les intégrales $I_{1,1}$ et $I_{0,2}$ de la question 3. Il résulte alors du théorème de linéarité que la fonction T_1 possède(*) bel et bien un coût et qu'en outre :

$$C(T_1) = \frac{1}{3} + 2I_{1,1} + I_{0,2}$$

La question 3.b permet de finir le calcul en douceur et l'on trouve *finalmente* :

$$C(T_1) = \frac{11}{6}$$

– Nous pourrions nous réfugier derrière le magique *mutatis mutandis* mais ce serait peut-être exagérer *un poquitín*. L'intégrale en jeu est ici :

$$\int_0^1 \big(x + \ln(1-x)\big)^2 dx$$

et même si nous n'aimons pas trop cela, nous allons, pour une fois, user du délicat principe de changement de variable. La fonction affine :

$$u \longmapsto 1 - u$$

réalise allègrement une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert $]0, 1[$ sur lui-même et du coup les deux intégrales :

$$\int_0^1 \big(x + \ln(1-x)\big)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \big(1 - u + \ln u\big)^2 du$$

sont de même nature et égales de surcroit si la même nature est l'existence. Comme dirait Pierre Albaladejo, les mouches changent donc d'âne et tous les regards se tournent maintenant vers :

$$\int_0^1 \big(1 - u + \ln u\big)^2 du$$

Soit $u \in]0, 1[$, grâce à la formule du carré d'un trinôme, nous avons cette fois :

$$\big(1 - u + \ln u\big)^2 = 1 + u^2 + \ln^2 u - 2u + 2\ln u - 2u \ln u$$

et à partir de là, il n'est pas vraiment outrecuidant de « *mutmuter* ». La fonction T_2 possède également un coup et l'on a :

$$C(T_2) = 1 + \frac{1}{3} + I_{0,2} - 1 + 2I_{0,1} - 2I_{1,1}$$

(*) Nous n'avons pas oublié que le théorème de transfert exige de la convergence *absolue* mais vu le signe de notre intégrande…

La question $3.b$ est de nouveau mise à contribution et l'on trouve alors aisément :

$$C(T_2) = \frac{5}{6}$$

No doubt, dans ces conditions, que l'on a :

$$C(T_2) < C(T_1)$$

c. Soit p un réel de l'ouvert $]0, 1[$ et μ un réel strictement positif. Selon la question précédente et avec l'appui de la question 2, nous savons par exemple(*) que :

$$1 + \lfloor \mu T_2(X) \rfloor \longrightarrow \mathcal{G}\big(1 - e^{-1/\mu}\big)$$

Il suffira alors de tout faire pour réaliser l'égalité :

$$1 - e^{-1/\mu} = p$$

et le tour sera définitivement joué. À bien y regarder, le réel :

$$\mu = -\frac{1}{\ln q}$$

est l'homme de la situation, puisque le nombre $-\ln q$ est bel et bien au carrefour de la *stricte* positivité…

En bref, la fonction :

$$x \longmapsto 1 + \left\lfloor -\frac{T_2(x)}{\ln q} \right\rfloor$$

transporte la variable aléatoire X vers la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

↱ C'est ici que se confirme la faiblesse des dispositions de la question 2. Sans notre rectification musclée, il eut été impensable de « *pécho* » *toutes* les lois géométriques !

6. Nous savons que quoi qu'il arrive :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)dt$$

et il est dit ici que la densité f_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Dans ces conditions et selon un toulousain théorème, la fonction F_Y est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f_Y. Il en résulte en particulier que F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F'_Y(x) = f_Y(x)$$

a. D'après nos très récentes tergiversations, la répartition F_Y est *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est dérivable à dérivée *strictement* positive. Comme elle y est également

(*) Nous aurions pu tout aussi bien choisir T_1 mais, depuis peu, T_2 est un peu moins chère. *So*…

continue, le théorème de la bijection est formel. L'application F_Y « *bijecte* » allègrement la droite numérique $\mathbb{R}$ sur l'ouvert :

$$\left]\lim_{-\infty} F_Y\ ,\ \lim_{+\infty} F_Y\right[$$

et comme les limites des fonctions de répartition sont connues comme le *white wolf*…

b. Organisons-nous un petit peu.

– Fonction réciproque oblige, F_Y^{-1} est une application de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ et la composition $F_Y^{-1}(X)$ applique donc bien Ω dans $\mathbb{R}$ vu que, au risque de radoter, il a été précisé que :

$$X(\Omega) =]0,1[$$

– Soit $x \in \mathbb{R}$. La croissance sur $\mathbb{R}$ de F_Y et celle, congénitale, de sa réciproque sur l'ouvert $]0,1[$, justifient de concert et par double inclusion l'égalité :

$$\left[F_Y^{-1}(X) \leqslant x\right] = \left[X \leqslant F_Y(x)\right]$$

Nous commençons à bien connaître les chants *tribaux*. Vu les origines ethniques, de la variable X il ne fait aucun doute que :

$$\left[X \leqslant F_Y(x)\right] \in \mathcal{A}$$

ce qui permet à l'application $F_Y^{-1}(X)$ de revendiquer son titre de variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$.

– Nous sommes désormais autorisés à causer de probabilité et sans l'intention de ne blesser personne nous assénons que :

$$F_{F_Y^{-1}(X)}(x) = F_X\big(F_Y(x)\big)$$

Oui mais voilà, le réel $F_Y(x)$ est assurément situé dans l'ouvert $]0,1[$ et notre sympathique égalité (RX) transforme gentiment cela en :

$$F_{F_Y^{-1}(X)}(x) = F_Y(x)$$

Les deux variables aléatoires $F_Y^{-1}(X)$ et Y ont ainsi la même fonction de répartition et par conséquent la même loi de probabilité, chronique d'un transport *routinier* annoncé…

↱ Nous avons dit *routinier* car la chose est plutôt classique et bien connue des simulateurs de tous bords.

Le texte, sûrement pour simplifier la donne, s'est volontairement limité aux variables aléatoires Y dont la répartition est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ce qui présente l'avantage non négligeable de disposer de la fonction réciproque F_Y^{-1}.

Il est cependant bon de savoir que, pour *n'importe quelle* variable aléatoire U définie sur notre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$, il existe une fonction Q_U appelée « fonction quantile » de U qui transporte remarquablement la variable uniforme X du texte vers la loi de U !

La conclusion de la question $5.c$ n'est donc plus vraiment surprenante. En réalité toutes les lois de la galaxie sont *quantilment* accessibles depuis X…

7. Curieux, n'est-il pas, de noter F_Y la fonction de Gauss notée Φ sous toutes les latitudes, et si personne n'y voit d'inconvénient, nous adopterons la notation planétaire. Nous rappelons aussi, une fois n'est pas coutume, que la répartition Φ possède une classe idyllique — la classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ — et que :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \Phi'(y) = \varphi(y) = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

puisque le texte a traditionnellement et fort heureusement noté φ, celle des densités de Y qui a la bonté d'être *continue* sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Signalons enfin que φ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, ce qui nous place au cœur du contexte de la question précédente et nous pouvons alors attaquer.

a. Vu ce que nous venons de narrer, la fonction :

$$y \longmapsto y\,\Phi(y)\,\varphi(y)$$

est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et l'intégrale proposée est impropre deux fois. Nous devons donc étudier séparément :

$$\int_0^{+\infty} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,dy \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{0} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,dy$$

– En ce qui concerne la première, puisque :

$$\Phi(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 1$$

nous faisons simplement valoir que :

$$y\,\Phi(y)\,\varphi(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y\,\varphi(y) \quad ; \quad \forall y \geqslant 0 \qquad y\,\varphi(y) \geqslant 0$$

Les variables gaussiennes sont bien connues pour posséder tous les moments du monde, voilà donc qu'en particulier l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} y\,\varphi(y)\,dy$$

existe et nous disposons sur le marché d'un test dit d'équivalence en signe positif. Nous pouvons donc passer à la seconde.

– Nous savons bien sûr que :

$$\Phi(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$$

et par conséquent nous avons cette fois :

$$y\,\Phi(y)\,\varphi(y) = o\big(|y|\varphi(y)\big) \quad ; \quad \forall y \leqslant 0 \qquad |y|\varphi(y) \geqslant 0$$

les valuations étant ici présentes pour se prémunir des affres, parfois douloureuses, de la négativité. Il semble, il y a un *moment*, que nous avons rappelé pourquoi l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{0} |y|\,\varphi(y)\,dy$$

existe et sur le marché il y a également un test de prépondérance en signe positif. *So*…

Passons alors à la *integración por partes*. Nous considérons à cet effet les fonctions :

$$u : y \longmapsto \Phi(y) \quad \text{et} \quad v : y \longmapsto -\varphi(y)$$

Classe idyllique oblige, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a sans ambages :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad u'(y) = \varphi(y) \quad \text{et} \quad v'(y) = y\,\varphi(y)$$

En outre, et sans aucune indétermination, le produit :

$$uv : y \longmapsto -\Phi(y) \cdot \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

possède, en plus et en moins l'infini, la limite finie zéro. Il résulte alors du théorème d'intégration impropre(*) *by parts* que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

À bien y regarder l'intégrale du *very right hand side* a quelque complicité avec la loi normale $\mathcal{N}(0, 1/2)$ et nul ne peut ainsi ignorer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$$

Le texte a donc bien raison ! Nous avons bel et bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

b. Il s'agit d'une intégrale visiblement impropre que deux fois et nous allons procéder tranquillement par *segmentation*. Soit pour cela $y \in \mathbb{R}$. Le balbutiant *teenager* nous apprend que :

$$\big(y - \Phi(y)\big)^2 \varphi(y) = y^2\varphi(y) - 2y\,\Phi(y)\,\varphi(y) + \Phi^2(y)\,\varphi(y)$$

et nous faisons valoir que :

(*) Nous rappelons que l'impétrant n'a officiellement pas droit à cette pépite ! Il est condamné à une double partialisation…

– l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,\varphi(y)\,dy$$

existe depuis un bon *moment*, « même que(*) » elle vaut un, puisque Y est *centrée* et *réduite* ;

– nous venons à l'instant de justifier l'existence de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\,\Phi(y)\,\varphi(y)\,dy$$

et nous avons aussi exhibé sa valeur ;

– reste à causer de la troisième frangine, en l'occurrence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^2(y)\,\varphi(y)\,dy$$

La fonction intérieure admet une très providentielle primitive sur $\mathbb{R}$ en la personne de :

$$y \longmapsto \frac{\Phi^3(y)}{3}$$

et cette dernière admet, en plus l'infini et en moins l'infini, les gentilles limites finies respectives $1/3$ et 0. Le test de la primitive est alors formel, la troisième *sister* existe et si l'on en croit Issac Barrow, elle vaut $1/3$.

Le théorème de linéarité ne fait plus qu'une bouchée de l'affaire. Notre intégrale existe fort bien et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big(y-\Phi(y)\big)^2\varphi(y)\,dy = 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

la dernière égalité procédant d'une simple réduction au même dénominateur. Notons d'ailleurs qu'à la lecture de la question suivante, cela a un parfum plutôt agréable…

c. Nous commençons à avoir l'habitude. L'intégrale au cœur du débat est :

$$\int_0^1 \big(x-\Phi^{-1}(x)\big)^2 dx$$

et nous allons encore une fois nous laisser tenter par le théorème du changement de variable. Étant donné que la fonction :

$$y \longmapsto \Phi(y)$$

réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sur l'ouvert $]0,1[$, nous ne pouvons pas ignorer que les deux intégrales :

$$\int_0^1 \big(x-\Phi^{-1}(x)\big)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\Phi(y)-y\big)^2\varphi(y)\,dy$$

(*) Comme on dit dans les cours de récré !

sont de même nature et fatalement égales en cas d'existence. Or, il se trouve que depuis peu, la seconde existe et vaut précisément :

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Nous pouvons donc définitivement changer de partie.

Partie 2

8.a. Soit k et ℓ deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Puisque les deux suites (d_i) et (a_i) sont croissantes, nous avons quoi qu'il arrive :

$$(d_\ell - d_k)(a_\ell - a_k) \geqslant 0$$

d'où il ressort immédiatement que :

$$d_\ell a_\ell + d_k a_k \geqslant d_k a_\ell + d_\ell a_k \tag{0}$$

ce qui est presque mieux, ou du moins la même chose, que ce qui nous est demandé.

↱ Les croissances *strictes* des suites (d_i) et (a_i) ne servent à rien dans cette première histoire et nous pensons que ce n'est pas fini.

↱ Dans le cas de deux suites (d_i) et (a_i) décroissantes larges, l'inégalité (0) reste d'actualité en l'état, mais en revanche, si nos de suites sont de monotonies larges opposées, l'inégalité reste encore d'actualité à la condition expresse qu'on la renverse, comme certaines crèmes parfois…

b. Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ un *convecteur*(*) de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un de ces vecteur de $\mathbb{R}^n_+$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Soit également et à nouveau deux entiers k et ℓ appartenant à $[\![1, n]\!]$ et repartons des conclusions de la précédente question selon lesquelles :

$$d_\ell a_\ell + d_k a_k \geqslant d_k a_\ell + d_\ell a_k$$

Mutiplions maintenant par le positif $p_k p_\ell$ ce qui nous amène à :

$$p_k p_\ell d_\ell a_\ell + p_k d_k a_k p_\ell \geqslant p_k d_k p_\ell a_\ell + p_\ell d_\ell p_k a_k$$

en ayant choisi de positionner efficacement les différents protagonistes. Ajoutons alors gaiement, les entiers k et ℓ se dandinant de 1 à n. La linéarité de la sommation autorise ainsi à en déduire que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell d_\ell a_\ell + \left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell\right) \sum_{k=1}^{n} p_k d_k a_k \geqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n} p_k d_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell a_\ell\right)$$

(*) Nous les appelons ainsi à cause du rôle crucial qu'ils jouent dans la théorie de la convexité.

le doublement du *right hand side* reposant sur l'évidente égalité :

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell d_\ell\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k a_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k d_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell a_\ell\right)$$

le rôle virtuel des *ghosts* étant à maîtriser en toutes circonstances ! Comme il est dit en outre que :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{\ell=1}^{n} p_\ell = 1$$

ça double également — et derechef de façon *ghostique* — sur le côté gauche, à telle enseigne que nous avons *finalmente* :

$$2\sum_{k=1}^{n} p_k d_k a_k \geqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n} p_k d_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell a_\ell\right)$$

et comme 2 est ici *strictement* positif(*), il s'en déduit effectivement que :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k d_k a_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k d_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^{n} p_\ell a_\ell\right)$$

↱ Cette inégalité est due à Pafnuti Tchebycev, mais sans son compère Irénée-Jules pour une fois. Elle fonctionne en réalité, comme nous venons de le voir, pour deux suites (a_i) et (d_i) monotones *larges* de même sens. Lorsque l'on a affaire à deux suites monotones larges de sens opposés, il est facile de constater qu'elle ne fait que se renverser comme la crème *supra*.

9. Nous allons commencer par deux lemmes, le premier étant bien connu des *aficionados* des suites *strictement* croissantes d'*integers*.

LEMME CROISSANCE STRICTE D'ENTIERS :

Soit m un entier appartenant à $[\![1,n]\!]$ et $(i_k)_{k\in[\![m,n]\!]}$ une suite strictement *croissante d'entiers inférieurs ou égaux à n. On a alors :*

$$\forall k \in [\![m,n]\!] \qquad i_k \leqslant k$$

La preuve se fait assurément par récurrence descendante finie sur k, l'argument *intégralement* au cœur du débat étant le suivant. Lorsque k et h sont deux *entiers* quelconques, on a l'implication :

$$h < k \quad\Longrightarrow\quad h \leqslant k-1$$

implication dans laquelle, contrairement à ce que nous a fait le texte depuis le début, il est important de bien maîtriser le *strict vs large*. Nous laissons bien sûr à notre dévoué lecteur le soin de peaufiner les détails de cette très classique induction.

(*) Nous ne plaisantons pas ! Lors du sujet de l'année 2004 de la même école, 2 était nul, et je connais personnellement certains étudiants de l'époque qui ne s'en sont toujours pas remis…

LEMME À TRIBORD TOUTE :

Soit :

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

une suite finie de réels *quelconques que l'on suppose triée en croissant. On a donc :*

$$\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$$

Soit m appartenant à $[\![1, n]\!]$ et :

$$(\alpha_{i_m}, \ldots, \alpha_{i_n})$$

une sous-suite de la liste α, ce qui, sous-liste oblige, impose par définition que :

$$1 \leqslant i_m < \cdots < i_n \leqslant n$$

On a alors :

$$\alpha_{i_m} + \cdots + \alpha_{i_n} \leqslant \alpha_m + \cdots + \alpha_n$$

Autrement dit, parmi les sommes de $n - m + 1$ termes(*) issus de la liste α, la plus maousse costaud est celle qui est bloquée à la very *droite c'est-à-dire à tribord toute !*

LA PREUVE :

Vu ce que nous devons justifier, on peut raisonnablement avoir le sentiment d'enfoncer des portes déjà grandes ouvertes, mais comme certaines « évidences » peuvent parfois se révéler retorses, nous sommes prêts à consentir un petit effort.

Soit k appartenant à $[\![m, n]\!]$. Selon le premier lemme nous avons :

$$i_k \leqslant k$$

et comme la liste α est croissante, l'on a également :

$$\alpha_{i_k} \leqslant \alpha_k$$

Il ne reste alors plus qu'à ajouter membre à membre, l'entier k se dandinant de m à n.

↱ Notre perspicace lecteur n'aura aucun mal, ni à imaginer, ni à prouver un lemme du *babord toute*. Nous lui faisons confiance.

Il est maintenant temps de revenir à nos petits ovins.

a. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Nous commençons par trier en croissant la sous-liste :

$$\big(t(m), \ldots, t(n)\big)$$

L'on obtient ainsi une sous-liste de longueur $n - m + 1$ de la liste triée totale $\hat{t}$, sous liste que nous notons :

$$\big(\hat{t}(i_m), \ldots, \hat{t}(i_n)\big)$$

(*) Quand on se déplace de m à n, il y a $n-m+1$ termes. C'est un émouvant souvenir d'arbres et d'intervalles…

où, comme nous l'avons déjà indiqué, l'on a bien sûr :

$$1 \leqslant i_m < \cdots < i_n \leqslant n$$

Puisqu'il n'y a eu rien d'autre qu'un simple tri, il est bien sûr évident que :

$$\sum_{k=m}^{n} a_{t(k)} = \sum_{k=m}^{n} a_{\hat{t}(i_k)}$$

et la fin de l'histoire passe par l'application du deuxième lemme à la liste :

$$\alpha = \left(a_{\hat{t}(1)}, \ldots, a_{\hat{t}(n)}\right)$$

qui à bien y regarder, n'est autre que la composée :

$$\alpha = a \circ \hat{t}$$

et dont l'indispensable croissance résulte, sans souci, de celles des deux copines a et $\hat{t}$.

b. Puisque l'on a donné un sens à d_0 et d'après la formule d'inversion des sommations, nous pouvons écrire :

$$\sum_{m=1}^{n} (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^{n} a_{t(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_{t(k)} \sum_{m=1}^{k} (d_m - d_{m-1})$$

la liaison de curseurs étant bien sûr tranquillement gérée, et un sympathique télescopage vient alors à bout de l'affaire puisqu'il a été décrété que d_0 est nul.

c. Soit $m \in [\![1, n]\!]$. La pénultième question a révélé que :

$$\sum_{k=m}^{n} a_{t(k)} \leqslant \sum_{k=m}^{n} a_{\hat{t}(k)}$$

et la nouvelle suite (d_i) — celle qui démarre à zéro — est tout aussi croissante que l'ancienne. On peut alors multiplier par le désormais positif $d_m - d_{m-1}$ et ajouter dans la foulée, l'entier m baguenodant de 1 à n. Il devrait ainsi rapidement s'ensuivre que :

$$\sum_{m=1}^{n} (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^{n} a_{t(k)} \leqslant \sum_{m=1}^{n} (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^{n} a_{\hat{t}(k)}$$

Le *left hand side* est depuis peu égal à :

$$\sum_{m=1}^{n} d_n a_{t(n)}$$

Concernant le *right*, nous décidons d'appliquer le récent b après avoir pris soin, en toute légalité bien entendu, d'y remplacer l'application t par sa cousine $\hat{t}$ et voilà ainsi que :

$$\sum_{m=1}^{n} (d_m - d_{m-1}) \sum_{k=m}^{n} a_{\hat{t}(k)} = \sum_{m=1}^{n} d_n a_{\hat{t}(n)}$$

Tout cela, du moins nous l'espérons, devrait satisfaire tout le monde !

↱ Nous observons encore une fois que les *strictes* croissances des suites (a_i) et (d_i) n'ont toujours aucune utilité…

↱ L'inégalité (2) est également une célébrité. Dans la littérature elle s'appelle « inégalité de réordonnement » ou « inégalité de réarrangement ».

10. Les ensembles de ce texte ont n éléments la plupart du temps. Nous sommes alors d'accord pour supposer, mais dans cette question uniquement, que l'on a :

$$a_1 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad d_1 < \cdots < d_n \qquad (\text{BV})$$

à telle enseigne que l'on aura du coup :

$$|D| = |A| = n$$

Soit T un programme de transport. Le potache ressort ses identités remarquables, il linéarise un *chouia* et voilà que :

$$C(T) = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} d_k T(d_k) + \sum_{k=1}^{n} T^2(d_k)$$

Comme T est une bijection de D sur A, il existe une application $t \in \mathcal{E}_n$ réalisant l'égalité de listes :

$$\big(T(d_1), \ldots, T(d_n)\big) = \big(a_{t(1)}, \ldots, a_{t(n)}\big)$$

application t qui, grâce à notre bon vouloir (BV) *supra*, se trouve être ici une bijection dont la réordonnée $\hat{t}$ n'est autre que l'identité. Il résulte alors de tout cela ainsi que de la récente question c que d'une part :

$$\sum_{k=1}^{n} T^2(d_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{t(k)}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \widehat{T}^2(d_k)$$

et que d'autre part :

$$\sum_{k=1}^{n} d_k T(k) = \sum_{k=1}^{n} d_k a_{t(k)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} d_k a_{\hat{t}(k)} = \sum_{k=1}^{n} d_k a_k = \sum_{k=1}^{n} d_k \widehat{T}(k)$$

et tout cela sans autre d'explication bien sûr puisque $\hat{t} = \mathrm{Id}$.

Il s'ensuit alors très tranquillement que :

$$C(T) \geqslant \sum_{k=1}^{n} d_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} d_k \widehat{T}(d_k) + \sum_{k=1}^{n} \widehat{T}^2(d_k)$$

C'est maintenant le moment de linéariser derechef et de réveiller le collégien de sa sieste pour effectivement revendiquer :

$$C(T) \geqslant C(\widehat{T})$$

11. Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. À la surprise générale nous noterons $n \geqslant 1$ ce nombre fini, nous noterons également $x_1, \ldots, x_n$ ces fameuses valeurs, tout en les supposant triées de telle sorte que :

$$x_1 < \cdots < x_n$$

En outre, et pour parachever l'édifice, il sera décidé que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'on ait :

$$\mathsf{p}(X = x_k) = p_k$$

Signalons enfin que toutes les variables aléatoires que nous allons rencontrer ne vont prendre qu'un nombre fini de valeurs et ce ne sera donc pas le *moment* de trop se prendre la tête…

a. D'après le théorème de transfert, nous avons :

$$\mathsf{E}\big(Xh(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k h(x_k)$$

et nous mettons l'accent sur les réalités suivantes :

- il a déjà été précisé que :

$$x_1 < \cdots < x_n$$

- comme h est croissante sur $\mathbb{R}$, nous avons également :

$$h(x_1) \leqslant \cdots \leqslant h(x_n)$$

- loi de probabilité oblige, nous avons enfin :

$$(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Tout est alors en place pour appliquer l'inégalité (1) de Pafnuti, en laissant au lecteur le soin de deviner les suites (a_i) et (d_i) que nous avons choisies. Il s'ensuit ainsi que :

$$\mathsf{E}\big(Xh(X)\big) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k h(x_k)\right)$$

ce qui s'écrit effectivement :

$$\mathsf{E}\big(Xh(X)\big) \geqslant \mathsf{E}(X)\mathsf{E}\big(h(X)\big)$$

↱ Cette inégalité est un cas très particulier d'une fameuse inégalité probabiliste appelée inégalité FKG du nom de ses auteurs Fortuin, Kasteleyn et Ginibre.

↱ La suite $\big(h(x_i)\big)$ n'a aucune raison d'être *strictement* croissante et nous avons donc eu raison d'aménager un peu l'inégalité de Tchebycev. Tout cela est assez regrettable…

b. En ouvrant correctement les mirettes, l'inégalité précédente peut également s'écrire :

$$\mathsf{cov}\big(X, h(X)\big) \geqslant 0$$

Du coup, si les variances de X et $h(X)$ sont non nulles, il s'en déduit(*) que :

$$\rho_{X,h(X)} \geqslant 0$$

c. Nous conservons bien entendu les notations mises en place dans notre chapeau du début de question, en y ajoutant ici que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad x_k = k \quad \text{et} \quad p_k = \frac{1}{n}$$

Cependant, pour coller exactement au texte, nous ne remplacerons pas les x_k par leur vrai visage et nous écrirons donc :

$$\mathsf{E}\big(h(X)t(X)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(x_k)x_{t(k)}$$

ainsi que :

$$\mathsf{E}\big(h(X)\hat{t}(X)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h(x_k)x_{\hat{t}(k)}$$

Vu que :

$$x_1 < \cdots < x_n \quad \text{et} \quad h(x_1) \leqslant \cdots \leqslant h(x_n)$$

et que t appartient à $\mathcal{E}_n$, la question 9.*c* et son inégalité (2) sont formelles. Nous avons bien :

$$\mathsf{E}\big(h(X)t(X)\big) \leqslant \mathsf{E}\big(h(X)\hat{t}(X)\big)$$

et nous pouvons donc changer de partie.

Partie 3

12. Nous commençons par rappeler que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \lfloor 1 + x \rfloor = 1 + \lfloor x \rfloor$$

égalité qui montre que l'athermique réel 1 peut, au choix, se placer à l'intérieur ou à l'extérieur de la partie entière et nous aurons d'ailleurs tendance à le placer plutôt à l'extérieur. Poursuivons.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est assez clair que X_n applique bien Ω dans $\mathbb{R}$ et nous allons tout d'abord nous pencher sur les valeurs qu'elle veut bien prendre.

(*) Comme cochon !

Soit donc $\omega \in \Omega$. Facettes obligent, nous nous organisons en conséquence.

– Si $0 \leqslant U(\omega) < 1$, nous avons :

$$0 \leqslant nU(\omega) < n$$

et comme n est un *integer*, il ne fait aucun doute que :

$$0 \leqslant \lfloor nU(\omega) \rfloor \leqslant n-1$$

Il s'avère donc, dans ce premier cas, que :

$$X_n(\omega) \in [\![1,n]\!]$$

– Si $U(\omega) = 1$, il est dit que $X_n(\omega) = n$.

Nous pouvons ainsi conclure que l'application X_n prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et nous pouvons alors véritablement attaquer.

a. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et organisons-nous à nouveau :

– si $k \in [\![1,n-1]\!]$, nous avons tour à tour :

$$[X_n = k] = [\lfloor nU \rfloor = k-1] = [k-1 \leqslant nU < k] = \left[\frac{k-1}{n} \leqslant U < \frac{k}{n}\right]$$

puisque nous maîtrisons totalement et *entièrement* la situation et que la facette basse de l'application X_n n'a pas ici droit de cité.

– si $k = n$, il y a en revanche, mais à l'évidence, deux *disjointes* possibilités se traduisant par les égalités :

$$[X_n = n] = [n-1 \leqslant nU < n] \cup [U = 1] = \left[\frac{n-1}{n} \leqslant U \leqslant 1\right]$$

qui ne nécessitent aucune explication supplémentaire.

Comme U est une *genuine* variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$, nous devons savoir que les ensembles :

$$\left[\frac{k-1}{n} \leqslant U < \frac{k}{n}\right] \quad \text{où } k \in [\![1,n-1]\!] \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{n-1}{n} \leqslant U \leqslant 1\right]$$

appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$ et il en ressort que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad [X_n = k] \in \mathcal{A}$$

à telle enseigne que X_n est désormais une variable aléatoire sur notre espace. Il est désormais possible et fortement recommandé de passer aux probabilités.

Soit donc à nouveau $k \in [\![1,n]\!]$. Comme la variable aléatoire U ne charge personne sur son passage, nous nous permettons d'asséner que les deux cas précédents peuvent *probablement* se recoller et nous avons alors :

$$\mathrm{p}(X_n = k) = F_U\left(\frac{k}{n}\right) - F_U\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

Les deux réels k/n et $(k-1)/n$ appartiennent à coup sûr au segment $[0,1]$ et la fonction de répartition de U est exactement la même que celle de sa cousine germaine X rencontrée en début de texte et donc définie par la fameuse (RX) de l'époque. Autant dire alors que :

$$F_U\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad F_U\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{k-1}{n}$$

et il en ressort *in fine* que :

$$\mathrm{p}(X_n = k) = \frac{1}{n}$$

En bref, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, ce que nous résumons en :

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$$

b. La fonction g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$, elle y est largement justiciable de l'inégalité des accroisement finis et nous pouvons alors tranquillement affirmer que :

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall y \in [0,1] \qquad \left|g(x) - g(y)\right| \leqslant \max_{[0,1]} |g'| \cdot |x-y|$$

inégalité que nous gardons précieusement sur le feu. Soit maintenant et à nouveau $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$. Si l'on note :

$$X_n(\omega) = k$$

il résulte de nos tribulations précédentes que dans les deux cas, l'on a toujours :

$$\frac{k-1}{n} \leqslant U(\omega) \leqslant \frac{k}{n}$$

ce qui devrait impliquer que :

$$\left|U(\omega) - \frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

ou encore :

$$\left|U(\omega) - \frac{X_n(\omega)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Grâce à l'inégalité qui mijote et aux idylliques positions géographiques des uns et des autres nous pouvons revendiquer :

$$\left|Z(\omega) - Y_n(\omega)\right| \leqslant \max_{[0,1]} |g'| \cdot \left|U(\omega) - \frac{X_n(\omega)}{n}\right|$$

puisque :

$$g\big(U(\omega)\big) = Z(\omega) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{X_n(\omega)}{n}\right) = Y_n(\omega)$$

et il en ressort transitivement et positivement que :

$$\left|Z(\omega) - Y_n(\omega)\right| \leqslant \max_{[0,1]} |g'| \cdot \frac{1}{n}$$

On propose alors :

$$\lambda = \max_{[0,1]} |g'| + 1$$

qui est bien un réel *strictement* positif indépendant de n et l'on a bien sûr :

$$\big|Z(\omega) - Y_n(\omega)\big| \leqslant \frac{\lambda}{n}$$

↱ Nous avons ajouté 1 au réel $\max |g'|$ pous obtenir un réel λ *strictement* positif puisque tel doit être le réel exigé par le texte. Reste à savoir si cette stricte positivité aura dans les minutes à venir un rôle crucial. Affaire à suivre…

c. Soit encore $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$. La variable aléatoire Y étant à densité elle ne charge rien de rien et donc

$$F_Y\Big(y - \frac{\lambda}{n}\Big) = \mathrm{p}\Big(Y < y - \frac{\lambda}{n}\Big) = \mathrm{p}\Big(Z + \frac{\lambda}{n} < y\Big)$$

la dernière égalité profitant essentiellement de ce que la variable Z a par hypothèse la même loi que Y. Oui mais voilà, la précédente question nous a appris que :

$$\big|Z - Y_n\big| \leqslant \frac{\lambda}{n} \quad i.e. \quad -\frac{\lambda}{n} \leqslant Z - Y_n \leqslant \frac{\lambda}{n}$$

d'où il découle en particulier que :

$$Y_n \leqslant Z + \frac{\lambda}{n}$$

Il s'ensuit alors quasi mentalement que :

$$\Big[Z + \frac{\lambda}{n} < y\Big] \subset \big[Y_n < y\big]$$

et l'importante croissance de la probabilité termine allègrement l'affaire.

13. Soit *again* $n \in \mathbb{N}^*$. Comme :

$$X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$$

les dispositions du texte, en l'occurrence :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad t_n(k) = g\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

font évidemment que :

$$Y_n(\Omega) = \Big\{t_n(1), \ldots, t_n(n)\Big\}$$

où, une fois n'est pas coutume, il peut y avoir « de la répétition » entre les accolades. En outre, comme le chapeau ne fait que mettre de l'ordre, nous avons également :

$$Y_n(\Omega) = \Big\{\hat{t}_n(1), \ldots, \hat{t}_n(n)\Big\}$$

et il existe bien sûr une *permutation* $(i_1, \ldots, i_n)$ des entiers de la liste $(1, \ldots, n)$ telle que :

$$\forall r \in [\![1, n]\!] \qquad \hat{t}_n(r) = g\Big(\frac{i_r}{n}\Big)$$

a. Soit alors $k \in [\![1, n]\!]$. L'inégalité de gauche provient immédiatement de la précédente en y choisissant :

$$y = \hat{t}_n(k)$$

Quant à celle de droite, elle repose sur la facile inclusion :

$$\big[Y_n < \hat{t}_n(k)\big] \subset \big[X_n \in \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}\big]$$

que nous justifions sur-le-champ.

Soit donc $\omega \in \big[Y_n < \hat{t}_n(k)\big]$ et supposons par l'absurde que :

$$X_n(\omega) \notin \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$$

Il devrait alors exister un entier $r \in [\![k, n]\!]$ tel que $X_n(\omega) = i_r$ et l'on aurait du coup $Y_n(\omega) = \hat{t}_n(r)$ ce qui, puisque r est supérieur ou égal à k, impliquerait :

$$Y_n(\omega) \geqslant \hat{t}_n(k)$$

inégalité intolérable vu que, dès le départ, nous avons supposé :

$$Y_n(\omega) < \hat{t}_n(k)$$

Nous avons donc bien :

$$\big[Y_n < \hat{t}_n(k)\big] \subset \big[X_n \in \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}\big]$$

La croissance de la probabilité prend alors le relais en révélant que :

$$\mathrm{p}\big(Y_n < \hat{t}_n(k)\big) \leqslant \mathrm{p}\Big(\bigcup_{r=1}^{k-1} [X_n = i_r]\Big)$$

C'est alors l'inégalité de Boole(*) qui permet d'enchaîner, puisqu'elle affirme que :

$$\mathrm{p}\Big(\bigcup_{r=1}^{k-1} [X_n = i_r]\Big) \leqslant \sum_{r=1}^{k-1} \mathrm{p}\big(X_n = i_r\big)$$

et comme, uniformité oblige, les $\mathrm{p}\big(X_n = i_r\big)$ sont tous égaux à $1/n$, il semble transitivement s'ensuivre que :

$$\mathrm{p}\big(Y_n < \hat{t}_n(k)\big) \leqslant \frac{k-1}{n}$$

(*) La probabilité d'une réunion d'événements est, quoi qu'il arrive, inférieure ou égale à la somme de leurs probabilités.

Nous avons donc assurément :

$$\mathrm{p}\big(Y_n < \hat{t}_n(k)\big) < \frac{k}{n}$$

mais nous faisons la petite observation que voici.

↱ L'inégalité *stricte* entre Y_n et $\hat{t}_n(k)$ est de la plus haute importance et vraiment bien vue. En revanche la *stricte* entre $\mathrm{p}\big(Y_n < \hat{t}_n(k)\big)$ et k/n semble plutôt relever du gaspillage comme nous n'allons pas tarder à le constater. Le *strict versus large* continue donc à flotter sur la marmite et nous ne pouvons malheureusement que le déplorer…

b. Nous commençons, *as usual*, par apporter un peu d'eau fraîche à notre moulin. La densité f_Y est donnée *continue* sur le segment $[\alpha, \beta]$ et le théorème de Darboux est alors formel. La répartition F_Y est, sur notre segment, une primitive de f_Y, elle y est donc en particulier dérivable et l'on a :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \qquad F_Y'(x) = f_Y(x) > 0$$

la strice positivité finale faisant également partie des textuelles hypothèses. Nous sommes alors tenus de savoir que F_Y est continue et *strictement* croissante sur $[\alpha, \beta]$ et un important et *monotone* théorème assure ainsi qu'elle réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur le segment $\big[F_Y(\alpha), F_Y(\beta)\big]$. En outre et *because* f_Y est nulle en dehors de notre segment, nous revendiquons :

$$F_Y(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f_Y(t)dt = 0$$

puis :

$$F_Y(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)dt = 1$$

Bref, la *restriction* de la fonction F_Y au segment $[\alpha, \beta]$ est une bijection de ce dernier sur le segment $[0, 1]$ et nous tâcherons de nous en souvenir !

↱ Tout d'abord et pour alléger un peu, nous décidons de noter S le segment $[\alpha, \beta]$. Nous observons maintenant que le texte ose noter F_Y^{-1} la réciproque de notre restriction à S ce qui est totalement abusif et insidieux, pour nos amis candidats j'entends, pour la simple et bonne raison que F_Y^{-1} n'existe pas le moins du monde ! Du coup, et si cela ne dérange personne, nous noterons :

$$F_{Y|S}$$

la restriction en question et nous préférons noter Q sa réciproque d'autant que les initiés pourront aisément constater qu'il s'agit exactement de la fonction *quantile* de la variable aléatoire Y.

Nous résumons nos nouvelles dispositions en rappelant que schématiquement :

$$F_{Y|S} : [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, 1] \quad \text{et} \quad Q : [0, 1] \longrightarrow [\alpha, \beta]$$

et que :

$$\forall u \in [0, 1] \qquad F_{Y|S} \circ Q(u) = u \quad \text{et} \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \qquad Q \circ F_{Y|S}(x) = x$$

↱↱ Le lecteur *réciproquement curieux* pourra, si cela l'amuse, découvrir cependant que :

$$\forall u \in [0,1] \qquad F_Y \circ Q(u) = u$$

alors que, généralement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Q \circ F_Y(x) \neq x$$

ce qui, s'il en était encore besoin, confirme que Q n'est pas l'immonde F_Y^{-1} et que l'amalgamme entre F_Y et sa restriction $F_{Y|S}$ relevait plutôt du…

Revenons maintenant à nos affaires en annonçant, une dernière fois, $n \in \mathbb{N}^*$. Nous profitons tout d'abord de l'inégalité de réordonnement de la question $9.c$ qui affirme sans sourciller que :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, t_n(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\, \hat{t}_n(k)$$

puisque la liste :

$$(1, 2, \ldots, n)$$

est évidemment triée en croissant, et il en résulte alors immédiatement que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\, t_n(k) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\, \hat{t}_n(k)$$

Soit maintenant $k \in [\![1, n]\!]$. Nous venons d'apprendre à l'instant que :

$$F_Y\left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}\right) \leqslant \frac{k}{n}$$

puisque nous avons définitivement décidé de ne pas galvauder les inégalités strictes inutiles et nous pouvons même, *de visu*, ajouter qu'en réalité :

$$0 \leqslant F_Y\left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}\right) \leqslant \frac{k}{n} \leqslant 1$$

Nous sommes alors en droit de composer à gauche par Q — nous avons justifié un peu plus haut sa parfaite définition sur $[0,1]$ — ce qui devrait dans un premier temps nous amener à :

$$Q \circ F_Y\left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}\right) \leqslant Q\left(\frac{k}{n}\right)$$

puisque nul ne peut ignorer qu'une fonction monotone bijective et sa réciproque ont le même sens de variation.

Mais attention, vu la très précise définition de la fonction Q — réciproque de la *restriction* à $[\alpha, \beta]$ de F_Y — il y a un léger souci en ce qui concerne la position géographique du réel :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}$$

et nous nous en expliquons.

Comme il est dit que la fonction g est à valeurs dans le segment $[\alpha, \beta]$, les réels $t_n(k)$ et surtout son cousin $\hat{t}_n(k)$ sont situés entre α et β et comme λ est positif, le réel :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}$$

est certainement et *a fortiori* inférieur ou égal à β. Oui mais voilà, et c'est là notre souci, rien, absolument rien ne dit qu'il soit supérieur ou égal à α d'où le déclenchement du plan suivant :

– Si l'on a :

$$\alpha \leqslant \hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \leqslant \beta$$

nous avons :

$$Q \circ F_Y\left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}\right) = Q \circ F_{Y|S}\left(\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}\right) = \hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n}$$

puisque le protagoniste clef est idéalement situé, ce qui nous amène gentiment à :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \leqslant F_Y^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$$

– Si maintenant :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} < \alpha$$

l'inégalité :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} \leqslant Q\left(\frac{k}{n}\right)$$

reste trivialement d'actualité puisque cette fois :

$$\hat{t}_n(k) - \frac{\lambda}{n} < \alpha \leqslant Q\left(\frac{k}{n}\right)$$

étant donné que, depuis des lustres, Q est à valeurs dans le segment $[\alpha, \beta]$.

Nous avons donc en bref et quoi qu'il arrive :

$$\hat{t}_n(k) \leqslant Q\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}$$

L'on en déduit d'abord positivement puis par sommation, l'entier k se dandinant de 1 à n, que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,\hat{t}_n(k) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(Q\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}\right)$$

et comme l'ordre jouit de la propriété de transitivité…

↱ Nous rappelons à notre lecteur que nous avons banni la dangeureuse notation F_Y^{-1} et que nous lui avons préféré la notation *quantilienne* Q. Nous ne le redirons plus !

c. Au prix d'une bénigne linéarisation, nous venons à l'instant d'apprendre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,g\Big(\frac{k}{n}\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,Q\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{\lambda}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k$$

ce que la plus célèbre des formules de Bernoulli-Faulhaber transforme en :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,g\Big(\frac{k}{n}\Big) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,Q\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{\lambda(n+1)}{2n^2} \qquad (1)$$

et le *physio* n'aura sûrement pas manqué de reconnaître par ci, par là, d'authentiques sommes de Riemann. C'est à cet effet que nous mettons maintenant en avant les réalités suivantes.

– Puisqu'il est dit que la fonction g est continue sur le segment $[0,1]$, il en est évidemment de même de l'application :

$$t \longmapsto tg(t)$$

Vu la reconnaissance du *physio* et le magnifique théorème de Darboux-Riemann, nous assénons déjà que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,g\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 tg(t)dt$$

– Nous sommes également supposés savoir — nous l'avons en réalité admis — que selon le théorème de continuité d'une réciproque, la fonction Q est continue sur le segment $[0,1]$, tout comme d'ailleurs sa copine :

$$t \longmapsto t\,Q(t)$$

et le même trio *physio-Darboux-Riemann* assure cette fois que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\,Q\Big(\frac{k}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t\,Q(t)dt$$

– Signalons enfin qu'à la générale surprise nous avons :

$$\frac{\lambda(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Tout est alors en place pour légaliser, puis effectuer, le passage à la limite dans la récente inégalité (1) lorsque l'entier n tend vers l'infini *and this yields :*

$$\int_0^1 tg(t)dt \leqslant \int_0^1 tQ(t)dt$$

ce qui, à la lumière de l'uniformité de la variable U et de l'incontournable théorème de transfert, s'écrit exactement :

$$\mathsf{E}\big(Ug(U)\big) \leqslant \mathsf{E}\big(UQ(U)\big)$$

et nous n'allons sûrement pas nous en plaindre…

14. L'énoncé donne des signes de faiblesse en cette fin de parcours. Il aurait dû plus précisément parler de fonction de transport de U vers la loi de Y qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[\alpha,\beta]$. Il s'agit donc exactement des applications que le texte a décidé de noter g depuis le tout début de la partie **3** et c'est tout naturellement que *nous* les appellerons transports en « *première classe* ».

a. Vu sa soudaine notoriété, nous avons la faiblesse de penser que Q pourrait être l'un des hommes que nous recherchons, à la condition *sine qua non* cependant, que la fonction Q soit un authentique transport en *première*. C'est donc la première chose qui va nous occuper — nous allons voir ce n'est pas la moindre ! — et nous y allons pas à pas…

– *Primo*, cela fait longtemps que nous savons qu'elle applique le segment $[0,1]$ dans le segment $[\alpha,\beta]$ et c'est un bon début.

– *Deuzio*, primitive sur $[\alpha,\beta]$ de la fonction continue f_Y, la fonction F_Y y est de classe $\mathcal{C}^1$ et nous avons déjà eu l'occasion de signaler que sa dérivée ne s'y annulait *jamais, jamais*. Une parfaite maîtrise du théorème de dérivabilité d'une réciproque(*) devrait alors révéler que Q est bel et bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, chronique d'une place en *première* souhaitée.

– Il nous reste alors le *tertio*, à savoir que le *jet* assure bien la liaison entre U et la loi de la variable Y.

Soit à cet effet $x \in \mathbb{R}$, intéressons-nous de très très près à l'ensemble :

$$\big[Q(U) \leqslant x\big]$$

et planifions *un poquitín* en n'oubliant pas que Q prend ses valeurs entre les deux réels α et β.

– Si $x < \alpha$, nous avons bien sûr :

$$\big[Q(U) \leqslant x\big] = \varnothing$$

– À l'opposé, si $x > \beta$, nous avons cette fois :

$$\big[Q(U) \leqslant x\big] = \Omega$$

– Supposons, pour finir, que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Une simple double inclusion permet d'établir que :

$$\big[Q(U) \leqslant x\big] = \big[U \leqslant F_Y(x)\big]$$

(*) Nous sommes conscients qu'il s'agit d'un théorème délicat, voire très souvent mal aimé, mais nous n'avons pas vraiment le choix…

les raisons essentielles étant les croissances respectives de $F_{Y|S}$ sur $[\alpha, \beta]$ et de Q sur le segment $[0, 1]$, le philosophique « non changement d'action » grâce auquel :

$$F_{Y|S}(x) = F_Y(x)$$

ainsi bien sûr que l'inéluctable :

$$Q = \left(F_{Y|S}\right)^{-1}$$

En résumé :

$$\big[Q(U) \leqslant x\big] = \begin{cases} \varnothing & \text{si} \quad x < \alpha \\ \big[U \leqslant F_Y(x)\big] & \text{si} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ \Omega & \text{si} \quad x > \beta \end{cases}$$

L'ensemble vide et la partie pleine appartiennent évidemment à la tribu $\mathcal{A}$ et c'est également le cas de l'ensemble :

$$\big[U \leqslant F_Y(x)\big]$$

puisque le texte stipule que U est un *genuine* aléa numérique sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$. Ainsi et pour tous les réels x du monde, nous avons :

$$\big[Q(U) \leqslant x\big] \in \mathcal{A}$$

ce qui montre que $Q(U)$ est également une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{p})$, et qui, à bien y regarder, devait aussi faire partie du *deal*. Nous pouvons maintenant nous occuper de probabilités et nous espérons ne blesser personne en clamant haut et fort que :

$$F_{Q(U)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \alpha \\ F_U\big(F_Y(x)\big) & \text{si} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 1 & \text{si} \quad x > \beta \end{cases}$$

Oui mais voilà, comme les valeurs de F_Y se *répartissent* inéluctablement entre 0 et 1 et vu ce que nous sommes supposés connaître par cœur de la fonction F_U la facette centrale va gentiment se transformer et *boum badaboum un !*

$$F_{Q(U)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < \alpha \\ F_Y(x) & \text{si} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 1 & \text{si} \quad x > \beta \end{cases}$$

Ensuite et parce que nous connaissons *farpaitement* la fonction F_Y les trois facettes vont docilement se recoller et *boum badaboum deux !*

$$F_{Q(U)}(x) = F_Y(x)$$

Bien entendu, cela vaut pour tous les réels x et l'on a donc carrément :

$$F_{Q(U)} = F_Y$$

chronique d'un transport annoncé depuis bien longtemps…

Soit maintenant g un de nos transports de première classe. Le coût de ce transport est donc :

$$\mathcal{C}(g) = \mathrm{E}\big(U - g(U)\big)^2$$

puisque les évidentes *bornitudes* des variables U et $g(U)$ assurent les existence des nombreux moments qui nous intéressent. Après avoir développé et linéarisé, ce coût devient :

$$\mathcal{C}(g) = \mathrm{E}\big(U^2\big) - 2\,\mathrm{E}\big(Ug(U)\big) + \mathrm{E}\big(g^2(U)\big) = \mathrm{E}\big(U^2\big) - 2\,\mathrm{E}\big(Ug(U)\big) + \mathrm{E}\big(Y^2\big)$$

la dernière égalité profitant de ce que — transport oblige — la variable $g(U)$ a la même loi que sa copine Y et ainsi le même moment d'ordre deux.

Maintenant que nous sommes vaillamment battus pour établir que Q est également un transport en première classe ce qui vient de valoir pour g vaut du même coup pour Q et *par séquent con(*)* :

$$\mathcal{C}(Q) = \mathrm{E}\big(U^2\big) - 2\,\mathrm{E}\big(UQ(U)\big) + \mathrm{E}\big(Y^2\big)$$

Après une tranquille différence membre à membre et quelques sympathiques simplifications, voilà que :

$$\mathcal{C}(g) - \mathcal{C}(Q) = 2\left[\mathrm{E}\big(UQ(U)\big) - \mathrm{E}\big(Ug(U)\big)\right]$$

quantité qui, si l'on en croit la précédente question, devrait être assurément positive. Nous apprenons ainsi que :

$$\mathcal{C}(Q) \leqslant \mathcal{C}(g)$$

et, comme nous en avions eu l'intuition depuis le début, le coût du *transporteur* Q est bel et bien minimal parmi les coûts de tous les transports en première. Reste donc à proposer :

$$T^* = Q$$

and Bob's your uncle !

↱ Le texte n'aborde pas la problématique d'unicité d'un tel transporteur *low cost*, nous en sommes navrés ! Une autre fois peut-être…

b. Une officielle stabilité uniforme, très rapidement schématisée en :

$$U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]} \quad \Longleftrightarrow \quad a + (b-a)U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$$

fait déjà que :

$$4U - 2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-2,2]}$$

(*) Déductif toulousain par excellence !

et une autre, certes un peu moins officielle, mais cependant aisée, cette fois schématisée en :

$$V \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-a,a]} \quad \Longrightarrow \quad |V| \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,a]}$$

font, au bout du compte, que :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,2]}$$

Il semble alors que l'on soit en droit de choisir :

$$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = 2 \quad ; \quad S = [0,2]$$

puisque, loi uniforme sur $[0,2]$ oblige, la densité officielle f_Y est nulle en dehors du segment S et sa restriction à ce segment est continue et strictement positive puisqu'elle y est constamment égale à $1/2$. Tout est alors impeccablement dans les clous !

Nous avons appris en classe que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

et du coup la fameuse restriction à S n'est autre que l'application :

$$F_{Y|S} : [0,2] \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \frac{x}{2}$$

La fonction réciproque Q — notre belle *quantile* — de cette application se débusque très tranquillement. Il s'agit bien sûr de :

$$Q : [0,1] \longrightarrow [0,2]$$
$$u \longmapsto 2\,u$$

L'un de nos *transporters low cost* est donc :

$$T^* : [0,1] \longrightarrow [0,2]$$
$$u \longmapsto 2\,u$$

et son coût est :

$$\mathcal{C}(T^*) = \mathrm{E}\Big[\big(T^*(U) - U\big)^2\Big] = \mathrm{E}\big(U^2\big)$$

la dernière égalité se passant allègrement de tout commentaire. On trouve alors et pour finir que :

$$\mathcal{C}(T^*) = \frac{1}{3}$$