CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à Essec Business School.*

Les propriétés que le texte nous demande d'admettre sont en réalité très faciles à démontrer à partir du moment où l'on maîtrise bien les opérations sur les matrices et tout particulièrement la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley. Nous ne pouvons qu'encourager notre lecteur à s'y essayer sans tarder. Lorsque nous aurons à les utiliser, nous nous y réfèrerons sous l'intitulé d'« analyse matricielle » *parce que, finalement, c'est bien de cela dont il s'agit.*

Partie 1

1. La matrice A est ici la très classique matrice souvent notée J_p dans la littérature et une grande partie de ce qui va suivre va avoir un sérieux goût de réchauffé…

a. La matrice A est symétrique réelle d'ordre supérieur ou égal à 1. Alors merci qui ? Merci *spectral !*

b. On trouve mentalement :

$$AV = pV$$

et comme le vecteur V n'est pas nul(*), l'entier p est une valeur propre de A.

c. Attention, cela est assurément faux si $p = 1$! Décidément, ils se sont tous donnés le mot(**) en l'an 2013…

Il nous faut donc absolument supposer que p est supérieur ou égal à 2, ce que nous faisons sur-le-champ. Les colonnes de A étant toutes égales à la non nulle V, il est indéniable que :

$$\text{rg}\, A = 1 < p$$

l'inégalité *stricte* finale reposant sur notre providentielle rectification. Le test du rang est alors catégorique. La matrice A n'est pas inversible et l'on a donc bien :

$$0 \in \text{Spec}\, A$$

Reste alors à faire appel au théorème du rang qui révèle tout gentiment que :

$$\dim \mathrm{E}_0(A) = p - 1$$

↱ Au risque de radoter, si $p = 1$, cette dimension est nulle ce qui confirme bien que…

d. Nous espérons de blesser personne en affirmant sans autre explication que :

$$A^2 = pA$$

d'où il ressort, *via* une récurrence de Cotonou, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad A^k = p^{k-1}A$$

(*) *Never forget !*

(**) Il y avait en effet une erreur du même acabit dans le sujet d'ecricome…

↱ Attention, cela est bien connu pour être faux lorsque $k = 0$, puisqu'alors $A^0 = I_p$ et tout compte fait, nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad A^k = \begin{cases} p^{k-1}A & \text{si} \quad k \geqslant 1 \\ I_p & \text{si} \quad k = 0 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après ce que nous venons d'apprendre, il est impératif de traiter à part un certain premier terme, et il semble alors bien que :

$$T_{A,n}(x) = I_p + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} p^{k-1}\right) A$$

dont l'appartenance à $\text{Vect}(I_p, A)$...

e. Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme p n'est pas nul, en écrivant tout bêtement :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} p^{k-1} = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(px)^k}{k!} - 1\right)$$

et en ressortant ses connaissances de la classe de première année, nous parvenons très facilement à :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} p^{k-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{e^{px} - 1}{p}$$

et vu ce que nous avons admis de l'*analyse matricielle*, nous avons effectivement :

$$T_{A,n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} I_p + \frac{e^{px} - 1}{p} A$$

f. Nous avons tout d'abord et sans surprise :

$$T_A(0) = I_p$$

Soit maintenant (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$. C'est une simple formalité que de vérifier que :

$$\left(I_p + \frac{e^{px} - 1}{p} A\right)\left(I_p + \frac{e^{py} - 1}{p} A\right) = I_p + \frac{e^{p(x+y)} - 1}{p} A$$

l'égalité $A^2 = pA$ n'étant pas complètement étrangère à l'affaire. Nous avons ainsi :

$$T_A(x)\, T_A(y) = T_A(x + y)$$

Soit encore $x \in \mathbb{R}$. Vu ce que nous avons appris de $T_A(0)$ et l'égalité précédente, il ne fait aucun doute que :

$$T_A(x)\, T_A(-x) = T_A(-x)\, T_A(x) = I_p$$

double égalité qui montre précisément que la matrice $T_A(x)$ est inversible et que son inverse est précisément $T_A(-x)$.

2. Signalons tout d'abord que le maximum, dont il est ici question, existe bien parce qu'il porte sur une famille *finie* et *non vide* de nombres réels. *Everything is therefore under control !*

a. Soit $k \in \mathbb{N}$ et i, j deux entiers de $[\![1, p]\!]$. D'après la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley, nous revendiquons :

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} a_{hj}^{(k)}$$

L'inégalité triangulaire(*) sommatoire prend ensuite le relais en révélant que :

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| \leqslant \sum_{h=1}^{p} |a_{ih}| \left|a_{hj}^{(k)}\right|$$

Maxima obligent, tous les $|a_{ih}|$ sont inférieurs ou égaux à μ_1, les $\left|a_{hj}^{(k)}\right|$ sont, quant à eux, inférieurs ou égaux à μ_k et il ressort positivement de tout cela que :

$$\left|a_{ij}^{(k+1)}\right| \leqslant \sum_{h=1}^{p} \mu_1 \mu_k \quad i.e. \quad \left|a_{ij}^{(k+1)}\right| \leqslant p\mu_1\mu_k$$

Comme cela vaut pour tous les couples (i, j) et que le maximum d'une bande fait partie de la bande, nous déduisons déjà que :

$$\mu_{k+1} \leqslant p\mu_1\mu_k$$

Nous sommes ainsi parvenus à montrer que la suite (μ_k) est *sous-géométrique* et la propriété finale s'obtient alors très classiquement par récurrence — encore une fois de Cotonou — sur l'entier k. Nous laissons donc au lecteur le soin de se charger de l'intendance en se convaicant, cependant, de l'importance de la *positivité* ambiante des uns et des autres !

↱ Étant donné ce qui va se passer dans un futur très proche et si cela ne dérange personne, nous préférons écrire notre récente conclusion sous la forme :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mu_k \leqslant p^{k-1} \mu_1^k$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Au vu et au su de ce que nous venons d'apprendre — et de préférer ! — il ne semble pas incongru d'affirmer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{\mu_k}{k!} |x|^k \leqslant \frac{1}{p} \frac{(p\mu_1|x|)^k}{k!}$$

(*) D'aucuns parlent ici d'inégalité *polygonale* et ils n'ont pas tout à fait tort…

La série exponentielle :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(p\mu_1|x|)^k}{k!}$$

étant officiellement convergente, par comparaison en signe positif, la notre l'est *absolument* et comme toute série absolument convergente converge…

c. Soit x appartenant à $\mathbb{R}$ et i, j appartenant à $[\![1,p]\!]$. Maximum oblige, nous avons cette fois :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{|a_{ij}^{(k)}x^k|}{k!} \leqslant \frac{\mu_k|x|^k}{k!}$$

La précédente question et la sempiternelle comparaison en signe positif amènent, derechef, à une *absolue* conclusion.

d. Soit encore $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et i, j deux éléments de $[\![1,p]\!]$. L'élément en place (i,j) de la matrice $T_{A,n}(x)$ étant indubitablement la providentielle somme partielle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{ij}^{(k)}x^k}{k!}$$

et compte tenu de la *définition* de la convergence des suites matricielles, il semble que tout ait été dit à la question précédente.

↱ Vu ses origines — authentique limite d'une somme partielle de *série matricielle* — la matrice $T_A(x)$, que d'aucuns écrivent bien sûr :

$$T_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(xA)^k$$

s'appelle « exponentielle » de la matrice xA et c'est tout naturellement que, dans la littérature, elle se note :

$$e^{xA} \qquad \text{ou} \qquad \exp(xA)$$

Nous sommes donc surpris par la notation qui a été retenue ici — ce « $T_A(x)$ » n'a pas vraiment le *look* exponentiel — et peut-être a-t-on simplement voulu brouiller les pistes…

Dans le tout petit cas particulier final, on trouve mentalement :

$$T_A(x) = [e^{ax}]$$

3. Comme D est diagonale, il existe des scalaires $d_1, \ldots, d_p$ tels que :

$$D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_p)$$

et on rappelle qu'alors les puissances de D sont encore diagonales et « même que(*) » :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad D^k = \mathrm{diag}(d_1^k, \ldots, d_p^k)$$

(*) Comme on dit dans les cours de récré !

a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$T_{D,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} D^k$$

Vu ce que nous venons de sortir de notre tout récent chapeau et vu qu'une combinaison linéaire de matrices diagonales l'est également, la « *diagonalitude* » de $T_{D,n}(x)$ semble définitivement acquise.

b. Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Organisons-nous *un poquitín*.

– D'après la question précédente, les entrées non diagonales de la matrice $T_{D,n}(x)$ sont nulles et tendent donc vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

– Soit maintenant $i \in [\![1, p]\!]$. Si l'on en croit le « même que » du dit chapeau, la $i^{ème}$ entrée diagonale de la matrice $T_{D,n}(x)$ n'est autre que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(xd_i)^k}{k!}$$

qui, parce que nous le valons exponentiellement bien, vérifie :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(xd_i)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{d_i x}$$

Vu la définition de la convergence et de la limite d'une suite matricielle, nous venons à l'instant de prouver que :

$$T_D(x) = \mathrm{diag}(e^{d_1 x}, \ldots, e^{d_p x})$$

c. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Il est à peu près clair que la matrice D_r est diagonale et nous oublierons ainsi de parler du comportement de ses entrées non diagonales.

Soit alors $i \in [\![1, p]\!]$. D'après la question précédente, la $i^{ème}$ entrée diagonale de D_r n'est autre que :

$$r(e^{d_i/r} - 1)$$

qui, *because* l'équivalence standard :

$$e^u - 1 \underset{u \to 0}{\sim} u$$

se doit mentalement de vérifier :

$$r(e^{d_i/r} - 1) \xrightarrow[r \to +\infty]{} d_i$$

Nous venons donc bien d'établir que la suite matricielle (D_r) est convergente et que :

$$D_r \xrightarrow[r \to +\infty]{} D$$

4. On rappelle aux fins connaisseurs de la similitude matricielle que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad A'^k = P^{-1} A^k P$$

ce qui fait partie de tous ces « beaux suivis » qui enchantent souvent l'algèbre linéaire.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après ce que nous venons de rappeler, nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} A'^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} P^{-1} A^k P = P^{-1} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} A^k \Big) P$$

la dernière égalité procédant d'une pré-factorisation de P^{-1}, suivie d'une post-factorisation de P et autant dire alors que :

$$T_{A',n}(x) = P^{-1} \cdot T_{A,n}(x) \cdot P$$

Vu ce que nous avons admis à propos de l'*analyse matricielle*, nous sommes autorisés à passer à la limite lorsque n tend vers l'infini et à revendiquer dans la foulée l'égalité :

$$T_{A'}(x) = P^{-1} \cdot T_A(x) \cdot P$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Comme A est diagonalisable, il existe *as usual* une matrice inversible — nous la notons génériquement P — et une matrice diagonale — nous la notons génériquement D — telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Intéressons-nous alors impérativement(*) à la matrice :

$$r^{n+1} \left(T_D\left(\frac{1}{r}\right) - T_{D,n}\left(\frac{1}{r}\right) \right)$$

D'après ce qui a été raconté lors du récent 3.*b*, elle est diagonale comme sa copine D et nous ignorerons donc à nouveau le comportement de ses entrées non diagonales. En revanche, si i appartient à $[\![1,p]\!]$, sa $i^{ème}$ entrée diagonale n'est autre que :

$$r^{n+1} \left(e^{d_i/r} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(d_i/r)^k}{k!} \right)$$

où, à la surprise générale, nous avons encore noté d_i la $i^{ème}$ entrée diagonale de D. Nous avons rappelé plus haut une célèbre équivalence standard. Il va nous falloir ici du beaucoup plus lourd. Grâce au développement limité, à l'ordre $n+1$, de l'exponentielle au voisinage de zéro — que nous connaissons par cœur bien sûr — nous déduisons que :

$$e^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} + o(u^{n+1})$$

(*) Nous trouvons le *hint* du texte pour le moins déplacé, quand on sait à quoi sert réellement une diagonalisation ! Ce n'est donc pas « on pourra » mais plutôt « on devra »…

d'où il ressort, par définition, l'équivalence certes un peu moins standard mais cependant immédiate :

$$e^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \underset{u \to 0}{\sim} \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ce *bazooka* assène alors quasimentalement :

$$r^{n+1}\left(e^{d_i/r} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(d_i/r)^k}{k!}\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{d_i^{n+1}}{(n+1)!}$$

et il semble bien que nous ayons établi que :

$$r^{n+1}\left(T_D\left(\frac{1}{r}\right) - T_{D,n}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{1}{(n+1)!} D^{n+1}$$

ce qui remplit notre *diagonal* contrat. Cela dit, comme nous avons bien retenu les leçons d'*analyse matricielle*, il doit, dans la foulée, s'ensuivre que :

$$r^{n+1}\left(P \cdot T_D\left(\frac{1}{r}\right) \cdot P^{-1} - P \cdot T_{D,n}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot P^{-1}\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{1}{(n+1)!} P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1}$$

Oui mais voilà :

– *primo*, lors de la récente question a, dans laquelle D succède indubitablement à la matrice A' , nous avons rencontré les égalités :

$$P \cdot T_{D,n}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot P^{-1} = T_{A,n}\left(\frac{1}{r}\right) \quad ; \quad P \cdot T_D\left(\frac{1}{r}\right) \cdot P^{-1} = T_A\left(\frac{1}{r}\right)$$

et c'est déjà une première avancée ;

– *deuzio*, nul ne peut *invraisemblablement* avoir oublié que :

$$P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1} = A^{n+1}$$

Il est alors temps de changer de partie.

Partie 2

5.a. Voilà qui ressemble *caïman* à une question de cours !

– Tout d'abord, il nous semble vaguement nous rappeler que :

$$\dim \mathcal{L}(E) = p^2$$

– Ensuite, comme l'on fait tous les professeurs dans leurs classes, nous considérons la famille d'endomorphismes :

$$\left(\mathrm{Id}, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{p^2}\right)$$

Comme elle est de longueur p^2+1 dans un espace vectoriel de dimension p^2 elle est fatalement liée et il existe donc une famille :

$$(a_0,\ldots,a_{p^2})$$

de scalaires *non tous nuls*, telle que :

$$\sum_{i=0}^{p^2} a_i\varphi^i = 0$$

Comme ses coefficients de sont *pas tous nuls*, le polynôme :

$$P=\sum_{i=0}^{p^2} a_i X^i$$

est un annulateur non nul de l'endomorphisme φ et à la lecture du projet, ses seuls vrais problèmes sont :

– qu'il n'a aucune raison d'être de degré p^2. En revanche, il est assurément de degré entier $d\leqslant p^2$;

– qu'il n'a aucune raison d'être unitaire.

Il est cependant facile — bien que d'un certain côté(*) inutile ! — de récupérer le coup puisque *every body knows that* les multiples polynomiaux d'un annulateur sont encore annulateurs. En conséquence, le polynôme :

$$Q=\frac{X^{p^2-d}\cdot P}{\operatorname{dom} P}$$

où, à la surprise générale dom P désigne le coefficient dominant de P à toutes les qualités requises par le projet. Il est unitaire, de degré exactement p^2, et évidemment annulateur de φ. Vu la situation, l'entier p^2 est supérieur ou égal à 1 et l'une des diverses déclinaisons du théorème de D'Alembert-Gauss assure que Q est produit de facteurs unitaires du *premier* degré. Autant dire qu'il existe effectivement des complexes :

$$z_1,z_2,\ldots,z_{p^2}$$

tels que :

$$Q=\prod_{k=1}^{p^2}(X-z_k)$$

b. Attention, le texte a sûrement voulu dire : « En considérant, pour tout $k\in[\![1,p^2]\!]$, les endomorphismes… » faute de frappe que nous rectifions donc sur-le-champ. Cela étant, et en conservant les notations de la question précédente, nous venons d'établir que :

$$Q(\varphi)=0$$

(*) Le désir d'un annulateur unitaire est très louable bien sûr, mais pourquoi diable en vouloir, à tout prix, un de degré p^2 ?

ce qui, parce que nous connaissons bien nos affaires, s'écrit exactement :

$$\big(\varphi - z_1 \operatorname{Id}\big) \circ \big(\varphi - z_2 \operatorname{Id}\big) \circ \cdots \circ \big(\varphi - z_{p^2} \operatorname{Id}\big) = 0 \qquad (1)$$

Nous allons alors établir par l'absurde qu'au moins l'un de nos z_k est une valeur propre de φ. Supposons donc — merci Zénon — que tel ne soit pas le cas. Comme φ opère sur un espace vectoriel de dimension finie, il devrait rapidement s'ensuivre que, pour tous nos entiers k, l'endomorphisme $\varphi - z_k \operatorname{Id}$ ait un réel parfum de *bijectivité*. Un composé de bijections étant une bijection *itou*, l'égalité (1) déclarerait ainsi bijectif l'endomorphisme nul ! Oui mais voilà, il est dit que l'entier $p = \dim E$ n'est pas nul, l'espace vectoriel E n'est donc pas l'espace nul et dans ces conditions, nul ne peut ignorer que l'endomorphisme nul n'est pas(*) bijectif, chronique d'une contradiction attendue…

↱ Cela ressemble également à une question de cours qui pourrait s'appeler : « non vacuité du spectre d'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie *non nulle* ».

6. Notons d'emblée que $\pi \circ \varphi$, composé de deux endomorphismes de E est également un endomorphisme de E et nous le redirons plus !

a. Nous allons tout d'abord établir que l'endomorphisme $\pi \circ \varphi$ stabilise H. Soit donc un vecteur $x \in H$. À la surprise générale, le vecteur $\varphi(x)$ appartient à E, mais comme π projette providentiellement sur H, le projeté $\pi \circ \varphi(x)$ retourne gentiment au bercail H. Tout cela permet désormais de considérer l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(H)$ induit par $\pi \circ \varphi$. Nous n'avons pas encore tout dit. Comme nous avons par hypothèse l'inégalité *stricte* $k < p$ et comme la formule « dimension d'une somme directe » nous susurre à l'oreille que :

$$\dim H = p - k$$

l'induit u opère sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel — en l'occurrence H — de dimension finie *non nulle*. La non vacuité obtenue à la fin de la précédente question permet alors de proposer pour λ l'une des valeurs propres de u et pour v — bonnet blanc et blanc bonnet — un des vecteurs propres de u attaché à la valeur propre λ, vecteur v dont l'appartenance à H, qui était quelque part le point crucial de l'histoire, est définitivement acquise puisque, au risque de radoter, u opère sur H

↱ On en profite pour rappeler que, *because* la philosophie du non changement d'action, les éléments propres d'un endomorphisme induit sont évidemment aussi éléments propres de son créateur…

b. Comme v appartient à H, l'on a l'inclusion :

$$\operatorname{Vect} v \subset H$$

Il en résulte ainsi que :

$$F \cap \operatorname{Vect} v \subset F \cap H$$

et comme par hypothèse $F \cap H = \{0\}$, l'on a *a fortiori* :

$$F \cap \operatorname{Vect} v = \{0\}$$

(*) Attention, *against all odds*, l'endomorphisme nul de l'espace nul est bijectif ! Cela fait partie des nombreuses bizarreries de ce drôle d'oiseau…

et la somme $F + \operatorname{Vect} v$ est effectivement directe ce qui est déjà un bon début. Nous pourrons donc désormais « cercler » le « + ».

Parlons alors maintenant du vecteur $\varphi(v)$. Nous n'avons bien sûr pas oublié que :

$$\pi\big(\varphi(v)\big) = \lambda v$$

égalité qui, *because* $v \in H$, s'écrit également :

$$\pi\big(\varphi(v)\big) = \lambda \pi(v)$$

puisque, sous les feux des projecteurs, les éléments de H sont définitivement fixés(*) par l'application π. La linéarité de cette dernière permet d'en déduire que :

$$\pi\big(\varphi(v) - \lambda v\big) = 0$$

et nous apprenons ainsi que :

$$\varphi(v) - \lambda v \in \operatorname{Ker} \pi \quad i.e. \quad \varphi(v) - \lambda v \in F$$

notre dernière allégation procédant de l'éternel *parallèle*(**) entre projecteur et noyau. L'écriture :

$$\varphi(v) = \varphi(v) - \lambda v + \lambda v$$

montre alors que :

$$\varphi(v) \in F \oplus \operatorname{Vect} v \qquad (2)$$

ce qui est plutôt rassurant, et nous mettons également en avant que, *because* F est stable par φ, nous avons aussi $\varphi(F) \subset F$ et *a fortiori* :

$$\varphi(F) \subset F \oplus \operatorname{Vect} v \qquad (3)$$

À la linéaire synthèse de (2) et (3), il ne fait plus l'ombre d'un doute que φ stabilise effectivement $F \oplus \operatorname{Vect} v$.

7. La récurrence sur p ne nous semble pas être une bonne idée. Nous préférons changer notre fusil d'épaule en fixant $p \in \mathbb{N}^*$ et en établissant par récurrence finie sur k que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe une famille *libre* $(v_1, \ldots, v_k)$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \qquad \varphi(v_i) \in \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_i)$$

Here we go !

• Puisque φ est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie *non nulle*, nous savons — non vacuité du 5.b — qu'il possède au moins une valeur propre et donc, bonnet blanc et blanc bonnet, qu'il possède aussi au moins un vecteur propre. C'est alors tout naturellement que nous proposons pour v_1, l'un des vecteurs propres de l'endomorphisme φ. Vecteur propre oblige, nous pouvons assurer que :

(*) On rappelle que l'image d'un projecteur est à la fois le sous-espace sur lequel il projette et l'ensemble de ses points fixes.

(**) On rappelle que le noyau d'un projecteur est le fameux « parallèlement » et nous nous comprenons !

– le vecteur v_1 n'est pas nul, ce qui procure à la famille (v_1) une providentielle liberté ;

– nous avons *properly* l'appartenance :

$$\varphi(v_1) \in \operatorname{Vect} v_1$$

et il semble que nous venions de réussir notre initialisation.

• Supposons désormais que la propriété souhaitée soit acquise pour un entier k qui, récurrence finie impose, vérifie :

$$1 \leqslant k < p$$

Nous faisons valoir que l'hypothèse de récurrence entraîne très gentiment la φ-stabilité du sous-espace :

$$F_k = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$$

et que nous sommes donc *exactement* dans la situation de la précédente question. Il existe donc un vecteur — nous l'appelons ici v_{k+1} bien sûr — tel que la somme :

$$\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k) + \operatorname{Vect} v_{k+1}$$

soit à la fois directe et stable par φ et nous ajoutons qu'à la suprise générale :

$$\operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k) + \operatorname{Vect} v_{k+1} = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$$

Nous terminons alors notre histoire en faisant valoir que :

– selon l'hypothèse de récurrence et cette soudaine « directicité », la famille :

$$(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$$

est indéniablement libre, le vecteur v_{k+1} n'étant sûrement pas combinaison linéaire de ses copains $v_1, v_2, \ldots, v_k$;

– la stabilité par φ du sous-espace :

$$F_{k+1} = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$$

entraîne en particulier l'appartenance :

$$\varphi(v_{k+1}) \in \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$$

qui, couplée à celles données par l'hypothèse de récurrence, ne peut que nous satisfaire. Il reste alors à faire *le bon choix* $k = p$ et à ne pas avoir égaré le théorème de caractérisation des bases en dimension finie que nous préférons rappeler *infra*.

Caractérisation des bases en dimension finie :

Soit n un entier naturel, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathfrak{F}$ une famille finie de vecteurs de V. On a l'équivalence :

$$\mathfrak{F} \text{ est une base de } V \iff \mathfrak{F} \text{ est libre dans } V \text{ et de longueur } n$$

↱ Si l'on en croit le protocole de « matricialisation », dans une telle base $(v_1, \ldots, v_p)$ de l'espace E, c'est-à-dire une base vérifiant les fameuses :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \qquad \varphi(v_k) \in \mathsf{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$$

la matrice de φ est lumineusement *trigonale supérieure*. Nous venons donc, et ce n'est pas rien, d'établir que, pour tout endomorphisme φ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle, il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est trigonale. L'on se doute bien que cela se reformule en disant que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle est *trigonalisable*.

8. Nous venons de dévoiler en avant-première que la matrice M est trigonale supérieure et nous ne manquerons pas de l'utiliser en temps utiles.

a. Soit $k \in [\![2, p]\!]$ et organisons-nous *a little bit*.

– Si $p = 1$, l'ensemble $[\![2, p]\!]$ est vide et il n'y a donc *formellement*(*) rien à prouver.

– Si en revanche, l'entier p est supérieur à deux, nous savons bien — linéarité, linéarité ! — qu'il suffit de prouver que :

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \qquad \varphi(v_i) - m_{kk} v_i \in F_{k-1}$$

ce que nous attaquons sur-le-champ en poursuivant notre organisation :

– si $i \leqslant k - 1$, c'est totalement trivial puisque :

$$v_i \in F_i \quad ; \quad \varphi(v_i) \in F_i$$

et que l'on a l'inclusion $F_i \subset F_{k-1}$;

– Si $i = k$, il est protocolairement limpide que :

$$\varphi(v_k) = \sum_{j=1}^{k} m_{jk} v_j$$

et il en ressort mentalement que :

$$\varphi(v_k) - m_{k,k} v_k = \sum_{j=1}^{k-1} m_{jk} v_j \in F_{k-1}$$

So…

↱ Notons, toujours protocolairement, que :

$$\varphi(v_1) = m_{11} v_1 \quad \textit{i.e.} \quad (\varphi - m_{11}\,\mathrm{Id})(v_1) = 0$$

Du coup, si nous décidons *manu militari* de définir(**) :

$$F_0 = \{0\}$$

(*) La logique formelle nous apprend que toute phrase mathématique commençant par quelque chose du genre : « $\forall$ *machin* $\in \emptyset$ » est fatalement vraie.

(**) Nous déplorons que le texte ne l'ait pas fait depuis belle lurette…

nous avons en réalité :

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \qquad (\varphi - m_{kk}\,\mathrm{Id})(F_k) \subset F_{k-1}$$

et ce, pour n'importe quel $p \geqslant 1$ d'ailleurs.

b. Grâce à l'*improvement* de notre toute récente remarque, nous ne sommes plus tenus de planifier sur p et nous allons établir par récurrence finie *descendante* sur i que :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad (\varphi - m_{ii}\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{pp}\,\mathrm{Id})(E) \subset F_{i-1}$$

Aquí tenemos :

• Lorsque $i = p$, nous venons à l'instant de le faire puisque, sans vouloir nuire à quiconque, nous avons :

$$F_p = E$$

• Supposons que, pour un entier i vérifiant :

$$1 < i \leqslant p$$

on ait effectivement :

$$(\varphi - m_{ii}\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{pp}\,\mathrm{Id})(E) \subset F_{i-1}$$

Il devrait alors dans la foulée s'ensuivre que :

$$(\varphi - m_{i-1,i-1}\,\mathrm{Id}) \circ (\varphi - m_{ii}\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{pp}\,\mathrm{Id})(E) \subset (\varphi - m_{i-1,i-1}\,\mathrm{Id})(F_{i-1})$$

inclusion qui, grâce à nouveau à notre *improvement*, amène transitivement à :

$$(\varphi - m_{i-1,i-1}\,\mathrm{Id}) \circ (\varphi - m_{ii}\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{pp}\,\mathrm{Id})(E) \subset F_{i-2}$$

et ne peut qu'inductivement nous satisfaire. *Le bon choix* est ici $i = 1$ puisqu'il nous apprend que :

$$(\varphi - m_{11}\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{pp}\,\mathrm{Id})(E) \subset F_0$$

c'est-à-dire :

$$(\varphi - m_{11}\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (\varphi - m_{pp}\,\mathrm{Id})(E) = \{0\}$$

Le polynôme :

$$\prod_{k=1}^{p} (X - m_{kk})$$

est donc annulateur de l'endomorphisme φ et il annule également la matrice M puisque cette dernière est une des matrices de φ dans *une* des bases de E.

9. Comme $\mathbb{R}$ est soit-disant inclus dans $\mathbb{C}$, on peut, momentanément, considérer A comme une matrice de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$. Le théorème d'existence des bases en dimension finie mettant à

notre disposition une base $\mathcal{C}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, nous savons alors très officiellement qu'il doit exister un endomorphisme $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = A$$

et la précédente question vient, à point nommé, de produire un polynôme complexe unitaire de degré p — que nous baptisons banalement P — annulant l'endomorphisme ψ ainsi que la matrice A par voie de conséquence. Il existe donc des complexes $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ tels que :

$$A^p + \zeta_1 A^{p-1} + \cdots + \zeta_p I_p = 0$$

Oui mais voilà, pour chaque entier $k \in [\![1, p]\!]$, il existe des *réels* a_k et b_k tels que :

$$\zeta_k = a_k + ib_k$$

à telle enseigne que :

$$A^p + a_1 A^{p-1} + \cdots + a_p I_p + i\big(b_1 A^{p-1} + \cdots + b_p I_p\big) = 0$$

et c'est ici que la *réalité* de la matrice A va donner toute sa mesure. En faisant la part du réel et de l'imaginaire, elle impose assez clairement que :

$$A^p + a_1 A^{p-1} + \cdots + a_p I_p = 0 \quad \text{et} \quad b_1 A^{p-1} + \cdots + b_p I_p = 0$$

La seconde égalité ne nous apprend pas grand chose mais, en revanche, la première nous révèle que le polynôme :

$$X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots + a_p$$

satisfait à toutes nos attentes et il est unitaire en plus !

10. Avant toute chose, il nous semble important de signaler deux flagrantes choses :

– *firstly*, le sous-espace $\mathcal{G}_q$ est exactement formé des matrices de type :

$$f(A) \cdot B \quad \text{où} \quad f \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$$

– *secondly*, quand on maîtrise les liens entre l'image d'une matrice et la famille de ses colonnes, il ne fait aucun doute que :

$$\mathcal{G}_q = \mathrm{Im}\, K_q$$

Nous gardons tout cela au chaud, le temps d'avancer quelque peu.

a. Soit $q > p$. Nous allons naturellement procéder par double inclusion.

– L'inclusion :

$$\mathcal{G}_p \subset \mathcal{G}_q$$

ne doit, quant à elle, casser aucune patte de palmipède.

– Soit, réciproquement, $X \in \mathcal{G}_q$. D'après ce qui mijote *supra*, il devrait exister un polynôme $f \in \mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que :

$$X = f(A) \cdot B$$

Oui mais voilà, nous avons magistralement établi que la matrice A possédait un polynôme annulateur — baptisons-le g — réel et de degré p et nous allons procéder à la division euclidienne du polynôme f par son copain — mais néanmoins non nul — polynôme g. Il existe alors un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un polynôme $R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tels que :

$$f = g \cdot Q + R$$

et il en ressort que :

$$f(A) = g(A) \cdot Q(A) + R(A) = R(A)$$

la dernière égalité procédant de l'annulation de A par g. Bref :

$$X = R(A) \cdot B$$

et comme $R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$...

↱ Nous observons que cette égalité est encore d'actualité lorsque $p = q$ bien sûr...

b. Commençons tout d'abord par quelques mises au point.

– Lorsque X et Y sont deux colonnes de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, le réel :

$$X^{\mathsf{T}} \cdot Y$$

n'est autre que le produit scalaire *canonique* de la colonne X par sa copine Y habituellement noté :

$$< X \,, Y >$$

– Si maintenant V et X sont respectivement un sous-espace et une colonne de l'espace euclidien $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on a clairement l'enchaînement logique :

$$X \in V \iff X \in V^{\perp\perp} \iff X \perp V^{\perp}$$

la raison essentielle étant la formule du double orthogonal(*) valable, nous le savons bien, dans tout espace euclidien.

Nous pouvons alors revenir à nos ovins. À bien y regarder, nous recherchons un sous-espace $\mathcal{S}$ de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall G \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \qquad G \in \mathcal{G}_p \iff G \perp \mathcal{S}$$

Au vu et au su de notre seconde mise au point, nous proposons :

$$\mathcal{S} = \mathcal{G}_p^{\perp}$$

and Bob's your uncle !

(*) Bien entendu, tous les orthogonaux que nous écrivons ici sont pris dans l'espace euclidien $(\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}), <\,,\,>)$.

c. Soit donc une suite (G_n) une suite convergente d'élément de $\mathcal{G}_p$ et S une colonne du sous-espace $\mathcal{G}_p^\perp$. Nous venons d'apprendre que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S^\mathsf{T} \cdot G_n = 0$$

Comme par hypothèse :

$$G_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} G$$

et compte tenu de notre dextérité de plus en plus affirmée en analyse matricielle, nous pouvons passer à la limite lorsque l'entier n tend vers l'infini et récupérer ainsi :

$$S^\mathsf{T} \cdot G = 0$$

La précédente question et surtout son « si, et seulement si », fait alors qu'effectivement :

$$G \in \mathcal{G}_p$$

↱ Les affûtés de la topologie sauront en déduire que $\mathcal{G}_p$ est une partie *fermée* de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^p$, si l'on pratique la classique identification. En réalité, tout ce que nous venons de faire aux récentes questions b et c n'est pas du tout réservé au sous-espace $\mathcal{G}_p$. Ce sont des propriétés qui concernent n'importe quel sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ ou de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$…

d. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$T_{A,n}(x) \cdot B = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} A^k \cdot B$$

et nous nous permettons les observations suivantes :

– si $n \leqslant p-1$, nous pensons ne blesser personne en affirmant que :

$$T_{A,n}(x) \cdot B \in \mathcal{G}_p$$

– en revanche, si $n \geqslant p$, nous avons cette fois, attention au décalage :

$$T_{A,n}(x) \cdot B \in \mathcal{G}_{n+1}$$

et c'est ici que la récente a donne de la voix ! Puisque $n+1 > p$, elle affirme que :

$$\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_p$$

Il reste alors à prendre conscience des trois choses que voici :

– *primo*, nous venons à l'instant d'établir que la suite vectorielle $\big(T_{A,n}(x) \cdot B\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du sous-espace $\mathcal{G}_p$.

– *deuzio*, et si l'on en croit nos connaissances d'analyse matricielle, nous avons :

$$T_{A,n}(x) \cdot B \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_A(x) \cdot B$$

– *tertio*, selon la toute récente c, le sous-espace $\mathcal{G}_p$ est fermé — il contient les limites de ses *own* suites convergentes — à telle enseigne que sans l'ombre d'un doute :

$$T_A(x) \cdot B \in \mathcal{G}_p$$

Partie 3

11. Supposons momentanément qu'une telle fonction f veuille bien exister. L'équation différentielle qu'elle vérifie, la continuité de u et les théorèmes généraux font que f' est automatiquement continue sur le segment $[0,1]$ et la fonction f y gagne ainsi ses galons d'une classe $\mathcal{C}^1$ bien méritée. À bon entendeur !

a. Il est question de recherche et c'est tout naturellement que nous allons nous aider d'une analyse-synthèse tout en regrettant que le texte en ait un peu trop dit…

ANALYSE :

Supposons donc que la fonction f soit convenable.

Selon les généreux théorèmes généraux — encore eux ! — la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ tout comme sa copine f et à la surprise générale, l'on a :

$$\forall x \in [0,1] \qquad h'(x) = e^{-ax}\big(f'(x) - a f(x)\big) = b\, u(x) e^{-ax}$$

la dernière égalité reposant, à l'évidence, sur l'équation différentielle vérifiée par f. Soit alors t appartenant à $[0,1]$. Les continuités des unes et des autres autorisent l'intégration sur le segment $[0,t]$ et les ténors du Barrow l'écrivent bien entendu sous la forme(*) :

$$h(t) - h(0) = b \int_0^t u(x) e^{-ax} dx$$

Tout comme f, h s'annule en zéro, et voilà donc que :

$$f(t) e^{-at} = b \int_0^t u(x) e^{-ax} dx$$

égalité qui, grâce au même *picochouia*, amène effectivement à :

$$f(t) = b \int_0^t u(x) e^{a(t-x)} dx \qquad (**)$$

et c'est là que l'on peut regretter la largesse du texte. Il était en effet finalement très facile de parvenir par soi-même à cette expression…

↱ Cette conclusion d'analyse à savoir « si f est convenable, elle est fatalement donnée par $(**)$ » montre l'unicité de notre projet. Il ne pourra donc y avoir qu'une *seule* fonction convenable et c'est maintenant à la synthèse de décider de la fin de l'histoire !

(*) Au prix d'un *picochouia* de linéarité cependant…

SYNTHÈSE :

Contre toute attente, nous proposons pour f la fonction définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t) = b\int_0^t u(x)e^{a(t-x)}dx = be^{at}\int_0^t u(x)e^{-ax}dx$$

la seconde écriture — *no t inside* pour les initiés — étant plus propice à la révélation des qualités analytiques de f. Il reste à prouver que cette proposition est *farpaitement* convenable. *Here we go !*

– Selon Gaston Darboux, la fonction :

$$t \longmapsto \int_0^t u(x)e^{-ax}dx$$

n'est autre qu'une *primitive* sur $[0,1]$ de la fonction *continue :*

$$t \longmapsto u(t)e^{-at}$$

et à ce titre elle y possède la classe $\mathcal{C}^1$ et nous n'allons pas nous en plaindre. Cela devrait *généreusement* suffire à justifier la dérivabilité de f.

– L'annulation en zéro de f ne mérite, quant à elle, rien de plus que *no comment !*

– La vérification de l'équation différentielle n'est enfin qu'une formalité — simple dérivation d'un produit — et nous nous permettons de la laisser à la charge de notre dévoué lecteur.

Bref, il n'y a qu'une fonction f convenable et c'est effectivement celle qui est conforme à $(**)$.

b. Signalons avant de commencer qu'il nous semble étrange d'écrire : « telle que *toute* fonction f… » puisque nous venons d'apprendre à l'instant qu'il n'y en a qu'*une* ! Bizarre, comme c'est bizarre… Cela étant, nous ne nous prendrons pas le choux et nous poursuivrons l'aventure !

Soit à nouveau $t \in [0,1]$. Nous nous permettons de noter encore u la valeur de la constante en question et dans ces conditions :

$$f(t) = bu\int_0^t e^{a(t-x)}dx$$

En prenant toutes les précautions nécessaires en ce qui concerne le réel a, la petite histoire s'achève alors sur :

$$f(t) = \begin{cases} bu\dfrac{e^{at}-1}{a} & \text{si} \quad a \neq 0 \\ but \quad \text{si} & \quad a = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous attend maintenant étant une condition nécessaire et suffisante, nous savons ce qui nous reste à faire.

– Supposons que le couple (a, b) soit sous contrôle. Choisissons $y = 1$. Il doit alors exister une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ telle que pour « toute fonction f » comme ils disent, on ait l'égalité $f(1) = 1$, c'est-à-dire :

$$1 = b\int_0^1 u(x)e^{a(1-x)}dx$$

ce qui, à l'évidence, oblige bien :

$$b \neq 0$$

– Supposons réciproquement que $b \neq 0$ et soit alors $y \in \mathbb{R}$. Il nous faut alors reprendre notre plan sur le réel a.

– Si a est nul, nous proposons pour u la fonction constante :

$$u : x \longmapsto \frac{y}{b}$$

– Si a n'est pas nul, le réel $e^a - 1$ ne l'est pas plus et nous proposons cette fois la fonction constante :

$$u : x \longmapsto \frac{y}{b} \cdot \frac{a}{e^a - 1}$$

et tout le monde devrait y trouver son compte.

12.a. Soit $x \in [0, 1]$. L'appartenance à $\mathcal{G}_p$ de $u(x)W(x)$ repose essentiellement sur la toute dernière question — la 10.d — de la partie précédente et accessoirement — pour le scalaire $u(x)$ — sur la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{G}_p$.

Poursuivons en annonçant un entier $k \in [\![1, p]\!]$. D'après ce que le texte nous a demandé d'admettre et un *chouia* de théorèmes généraux, la fonction uW_k est continue sur le segment $[0, 1]$ et si l'on en croit le théorème de Darboux-Riemann nous devrions avoir :

$$\int_0^1 u(x)W_k(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u\Big(\frac{i}{n}\Big)W_k\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

Le passage en colonne se fait en douceur et vu tout ce que nous savons des limites de suites vectorielles, nous revendiquons :

$$\int_0^1 u(x)W(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u\Big(\frac{i}{n}\Big)W\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

Oui mais voilà, il résulte aisément du début de la question que la suite vectorielle :

$$n \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u\Big(\frac{i}{n}\Big)W\Big(\frac{i}{n}\Big)$$

est à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}_p$ et comme ce dernier est définitivement fermé(*), sa limite appartient également à $\mathcal{G}_p$ et l'on a donc effectivement l'appartenance :

$$\int_0^1 u(x)W(x)dx \in \mathcal{G}_p$$

(*) Au risque de radoter, c'est le sens topologique de la question 10.c. L'espace vectoriel $\mathcal{G}_p$ contient les limites de ses propres suites convergentes.

b. D'après ce que nous avons admis — la continuité des fonctions W_k —, la fonction :

$$u : t \longmapsto Z^{\mathsf{T}} \cdot W(x) = < Z\,,\, W(x) > = \sum_{k=1}^{p} z_k W_k(x)$$

les notations parlant d'elles-mêmes, appartient assurément à $\mathcal{C}^0$ et du coup :

$$\int_0^1 \left(Z^{\mathsf{T}} \cdot W(x)\right)^2 dx = 0$$

Nous mettons alors en avant les réalités suivantes :

– les bornes d'intégration sont différentes ;

– la fonction intérieure — la fameuse *intégrande* — est continue et de signe constant sur le segment $[0, 1]$.

Une incontournable contraposition indique alors que l'intégrande est identiquement nulle sur notre segment d'où il ressort sans l'ombre d'un doute que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad Z^{\mathsf{T}} \cdot W(x) = 0$$

↱ Pourquoi Z est-elle non nulle ? Encore de l'*étrangitude*…

c. Ressortons, comme ils le disent, la fameuse question 4.b, et choisissons-y, parce que nous le pouvons bien :

$$n = p - 1$$

Il s'avère ainsi que :

$$r^p \left(T_A\left(\frac{1}{r}\right) - T_{A,p-1}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{1}{p!} A^p$$

limite que notre dextérité analytique matricielle métamorphose tout d'abord en :

$$r^p \left(Z^{\mathsf{T}} \cdot T_A\left(\frac{1}{r}\right) \cdot B - Z^{\mathsf{T}} \cdot T_{A,p-1}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot B\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{1}{p!} Z^{\mathsf{T}} \cdot A^p \cdot B$$

puis, après ouverture des mirettes, en :

$$r^p \left(Z^{\mathsf{T}} \cdot W\left(\frac{1}{r}\right) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{r^k k!} Z^{\mathsf{T}} \cdot A^k \cdot B\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{1}{p!} Z^{\mathsf{T}} \cdot A^p \cdot B$$

Oui mais voilà, vu l'idyllique position géographique de l'inverse de l'entier r, il semble que nous venions d'apprendre à l'instant que :

$$Z^{\mathsf{T}} \cdot W\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

de telle sorte qu'*in fine* :

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k r^{p-k} \xrightarrow[r \to +\infty]{} -\frac{1}{p!} Z^{\mathsf{T}} \cdot A^p \cdot B$$

où, manière d'alléger un peu l'atmosphère, pour chaque entier k concerné nous avons noté :

$$a_k = \frac{1}{k!} Z^{\mathsf{T}} \cdot A^k \cdot B$$

quantité qui, malgré ses apparences matricielles, n'est finalement qu'un bien brave réel !

Du coup, si nous notons P le polynôme réel :

$$P = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^{p-k} = a_0 X^p + \cdots + a_{p-1} X$$

nous venons finalement d'apprendre que $P(r)$ a une limite finie quand l'entier r tend vers plus l'infini. Connaissant les propriétés *limites* des polynômes, P est fatalement constant et comme visiblement son terme constant est nul, il ne fait plus l'ombre d'un doute que :

$$P = 0$$

Ses coefficients sont donc tous nuls et vu ce que cachent les a_k :

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \qquad Z^{\mathsf{T}} \cdot A^k \cdot B = 0$$

conclusion qui, à un léger décalage près, ne peut que satisfaire tout le monde.

↱ Vu ce que sont les colonnes de la matrice K_p, nos dernières allégations peuvent puissamment se reformuler en :

$$Z^{\mathsf{T}} \cdot K_p = 0$$

et nous essaierons de ne pas l'oublier.

d. Nous voici donc encore une fois embarqués dans une équivalence logique.

– Supposons que le couple (A, B) soit *under control* et annonçons $Y \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Nous savons par définition qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ telle que :

$$Y = \int_0^1 u(x)W(x)dx$$

Oui mais voilà, la très récente 12.a nous a soufflé à l'oreille que :

$$\int_0^1 u(x)W(x)dx \in \mathcal{G}_p$$

à telle enseigne qu'*in fine :*

$$Y \in \mathcal{G}_p$$

Nous avons donc assurément établi que :

$$\mathcal{G}_p = \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

mais vu les liens très étroits entre $\mathcal{G}_p$ et l'image de la matrice de Kalman K_p cela se reformule en :

$$\mathrm{Im}\, K_p = \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

et le test de l'image est formel. La matrice *carrée* K_p est bel et bien inversible.

– Supposons réciproquement que la matrice K_p soit inversible et notons V l'ensemble :

$$V = \left\{ \int_0^1 u(x)W(x)dx \mid u \in \mathcal{C}^0 \right\}$$

Il est très facile — nous le laissons *as usual* à la charge de l'impétrant — de vérifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, la *facile* linéarité de l'intégration matricielle étant évidemment sollicitée.

Soit alors $Z \in V^\perp$. À y regarder de très très près, les récentes questions b et c et notre pertinente remarque de la fin de cette dernière, permettent d'en déduire que :

$$Z^{\mathsf{T}} \cdot K_p = 0$$

d'où il ressort immédiatement que $Z = 0$ puisque K_p est supposée inversible. Nous venons donc d'établir que :

$$V^\perp = \{0\}$$

que le passage à l'orthogonal transforme magiquement en :

$$V = \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

puisque, dans un euclidien, le double orthogonal… Nous tenons désormais le *bambou !* Soit en effet Y appartenant à $\mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. C'est donc maintenant un élément de V et par définition de ce dernier, il existe effectivement une fonction $u \in \mathcal{C}^0$ telle que :

$$\int_0^1 u(x)W(x)dx = Y$$

chronique d'une *controllability* annoncée…

13.a. En calculant les premiers termes de la suite $(X_{s,k})$, on arrive aisément à conjecturer que :

$$\forall k \in [\![1,q]\!] \qquad X_{s,k} = s_k B + s_{k-1}AB + \cdots + s_1 A^{k-1}B$$

ce qui se confirme rapidement par une récurrence de Cotonou laissée, *as usual*, à la charge de notre dévoué lecteur. Il s'ensuit en particulier que :

$$X_{s,q} = s_q B + s_{q-1}AB + \cdots + s_1 A^{q-1}B$$

et comme les colonnes :

$$B \quad ; \quad AB \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad A^{q-1}B$$

sont justement celles de la matrice K_q, il est facile de voir — c'est purement métamécanique — que la colonne :

$$C_s = \begin{bmatrix} s_q \\ \vdots \\ s_2 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

convient parfaitement.

b. Avant d'attaquer l'affaire nous rassemblons quelques faits d'armes qui vont bientôt participer à une argumentation massue !

– *Primo*, nous savons depuis belle lurette que :

$$\operatorname{Im} K_q = \mathcal{G}_q$$

– *Deuzio*, au vu et au su de l'inégalité $q \geqslant p$, nous savons depuis la 10.a que :

$$\mathcal{G}_g = \mathcal{G}_p$$

– *Tertio*, puisqu'il est précisé que K_p est inversible, nous avons déjà dit que :

$$\mathcal{G}_p = \operatorname{Im} K_p = \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

En bref :

$$\operatorname{Im} K_q = \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

Laissons cela mijoter quelques instants et annonçons $Y \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Rechercher une liste $s \in \mathbb{R}^q$ ou la colonne $C_s \in \mathrm{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ que nous venons de lui attacher est du bonnet blanc et blanc bonnet à cela près, cependant, qu'il y a du *up side down* dans l'air et qu'il faudra donc y prêter attention. Quoi qu'il en soit, on nous demande donc d'établir l'existence d'une colonne $C_s \in \mathrm{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$K_q \cdot C_s = Y$$

et vu la dernière égalité sur le feu *supra*...

14. Nous trouvons curieux d'*admettre* que la matrice $K_q \cdot K_q^{\mathsf{T}}$ est inversible puisque :

– vu que la matrice K_p est *réelle*, nous savons officiellement que :

$$\operatorname{Ker}(K_q \cdot K_q^{\mathsf{T}}) = \operatorname{Ker} K_q^{\mathsf{T}}$$

c'est en effet une égalité facile que l'on rencontre en classe lorsque l'on étudie la minimisation de :

$$\|AX - B\|^2$$

– le théorème du rang appliqué à la matrice rectangulaire K_q^{T} de format (q,p) assure que :

$$p = \dim \operatorname{Ker} K_q^{\mathsf{T}} + \operatorname{rg} K_q^{\mathsf{T}}$$

– vu que le rang d'une matrice est légendairement égal à celui de sa transposée et puisque dans la marmite :

$$\operatorname{Im} K_q = \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$

on a :

$$\operatorname{rg} K_q^{\mathsf{T}} = \operatorname{rg} K_q = \dim \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{R}) = p$$

Il résulte de ces trois choses que :

$$\operatorname{Ker}(K_q \cdot K_q^{\mathsf{T}}) = \{0\}$$

et la matrice $K_q \cdot K_q^{\mathsf{T}}$ est désormais *carrée* à noyau nul. Selon le test du noyau, elle est bel et bien inversible.

a. Nous allons commencer par revisiter le théorème officiel d'optimisation sous contrainte en le mettant un peu au goût du jour. Il met en jeu une fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^q$, puis p formes linéaires $g_1, \ldots, g_p$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^q$ et enfin une liste $(b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^p$. Connaissant parfaitement la structure des formes linéaires sur $\mathbb{R}^q$, nous devons savoir que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe une liste :

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{iq}) \in \mathbb{R}^q$$

telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^q \qquad g_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{iq}x_q$$

Les p contraintes linéaires de notre théorème, en l'occurrence :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad g_i(x) = b_i$$

peuvent alors se rassembler en la seule contrainte matricielle :

$$Ax = b$$

où A est la matrice :

$$A = \Big[\, a_{ij} \,\Big]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$$

joliment appelée, dans la littérature, « *jacobienne* » de la fonction vectorielle :

$$g = (g_1, \ldots, g_p)$$

et où, comme cela se pratique fréquemment, nous avons identifié les listes aux colonnes correspondantes. Un point critique de cette optimisation sous contrainte est alors, par définition, un vecteur $x \in U$ vérifiant simultanément :

$$Ax = b \quad \text{et} \quad \nabla f(x) \in \operatorname{Vect}(\nabla g_1, \ldots, \nabla g_p)$$

ou encore, et c'est là que se manifeste le goût du jour :

$$Ax = b \quad \text{et} \quad \nabla f(x) \in \operatorname{Im} A^{\mathsf{T}} \qquad \text{(CRIT)}$$

en ne perdant toujours pas de vue que nous *identifions* $\mathbb{R}^q$ à $\mathrm{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ et que par conséquent *tous* nos vecteurs — et en particulier les gradients — sont écrit en colonnes(*).

Revenons alors à notre affaire et annonçons un peu la couleur.

(*) Quand on les écrit à l'horizontale les gradients des g_i sont, *grosso modo* les lignes de A, mais quand on les passe à la verticale ils deviennent les colonnes de sa transposée. Ceci explique cela…

– La fonction J, polynomiale à q variables, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^q$ et l'on a *de memoria :*

$$\forall s \in \mathbb{R}^q \qquad \nabla J(s) = \begin{bmatrix} 2s_1 \\ \vdots \\ 2s_q \end{bmatrix} = 2s$$

puisque nous avons définitivement décidé de la jouer *colonne*…

– La contrainte matricielle :

$$K_q C_s = Y$$

rentre bien dans le cadre de notre nouvelle façon d'aborder les choses à cela près — mais ce n'est pas rien — qu'elle s'écrit *via* une colonne qui a un peu perdu la tête à telle enseigne que la *supra* caractérisation (CRIT) de concept de point critique s doit s'adapter au *up side down* de la colonne C_s de la suivante façon. *Here you are :*

$$K_q C_s = Y \quad \text{et} \quad 2C_s \in \operatorname{Im} {K_q}^{\mathsf{T}} \qquad \text{(CRIT USD)}$$

Nous pouvons désormais attaquer véritablement la question et il était temps…

Comme cela est toujours fortement conseillé nous recherchons nos point critiques *via* une analyse-synthèse.

– Supposons donc que s^* soit un point critique de l'optimisation sous contrainte en question. D'après ce que nous venons de narrer, sa cousine C_{s^*} se doit de vérifier les deux conditions :

$$K_q C_{s^*} = Y \quad \text{et} \quad 2C_{s^*} \in \operatorname{Im} {K_q}^{\mathsf{T}}$$

et il existe donc une colonne U telle que :

$$2C_{s^*} = {K_q}^{\mathsf{T}} \cdot U$$

égalité qui, répercutée deux lignes plus haut, amène déjà à :

$$\frac{1}{2} K_q \cdot {K_q}^{\mathsf{T}} \cdot U = Y$$

La matrice $K_q \cdot {K_q}^{\mathsf{T}}$ étant désormais inversible, il en ressort que :

$$U = 2\left(K_q \cdot {K_q}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \cdot Y \quad \text{puis} \quad {K_q}^{\mathsf{T}} \cdot U = 2{K_q}^{\mathsf{T}} \cdot \left(K_q \cdot {K_q}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \cdot Y$$

et après une gentille simplification par deux, apparaît effectivement :

$$C_{s^*} = {K_q}^{\mathsf{T}} \cdot \left(K_q \cdot {K_q}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \cdot Y$$

↱ *As usual*, cette conclusion d'analyse montre l'*unicité* de notre projet.

– Ce n'est maintenant qu'une formalité que de contrôler que la colonne :

$$C_{s^*} = {K_q}^{\mathsf{T}} \cdot \left(K_q \cdot {K_q}^{\mathsf{T}}\right)^{-1} \cdot Y$$

vérifie les deux conditions de la caractérisation (CRIT USD) écrite quelques lignes plus haut et nous pouvons alors envisager la toute dernière question…

b. Soit h appartenant à $\mathbb{R}^q$ tel que $s^* + h$ vérifie la contrainte bien sûr. Nous observons alors qu'à bien y regarder :

$$\forall s \in \mathbb{R}^q \qquad J(s) = \|s\|^2$$

où $\| \ \|$ est assez facile à débusquer, à telle enseigne que :

$$J(s^* + h) - J(s^*) = \|s^* + h\|^2 - \|s^*\|^2$$

Un petit coup d'égalité d'Al Kashi et *hop* :

$$J(s^* + h) - J(s^*) = 2 < s^* \, , \, h > + \|h\|^2$$

Oui mais c'est toujours la même histoire, puisque s^* est critique(*) et que $s^* + h$ vérifie la contrainte, nul ne peut ignorer — c'est l'*autre* façon officielle de *critiquer* l'affaire — que :

$$< \nabla J(s^*) \, , \, h > = 0$$

ce qui, ici, s'écrit providentiellement :

$$2 < s^* \, , \, h > = 0$$

Bref :

$$J(s^* + h) - J(s^*) = \|h\|^2 \geqslant 0$$

ce qui ne peut que nous ravir et qui, de surcroît, révèle ouvertement le côté *strict* de notre minimum global.

(*) Sous contrainte évidemment !