CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur, à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à l'ESSEC Business School.

Nous mettons en place une fois pour toutes la propriété la plus importante de l'adjoint f^* de l'endomorphisme f. Il s'agit de la propriété de « balancement » que voici

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad < f(x) \mid y > = < x \mid f^*(y) >, \tag{ADJ}$$

et qui repose sur l'évidence matricielle

$${}^tY(AX) = {}^t({}^tAY)X$$

couplée à l'incontournable

$${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM,$$

très joliment appelée « *dressing undressing principle* ».

Partie 1

1. La seconde colonne de A est l'opposée de la première, cette dernière n'est apparamment pas nulle et si l'on en croit le test des colonnes on a

$$\mathrm{rg}\, A = 1.$$

On trouve sans antalgique

$$A^2 = A,$$

et l'endomorphisme f est par conséquent un projecteur. Quant à sa diagonalisabilité, la réponse est oui, comme elle l'est pour tous les projecteurs du monde de la dimension finie. Ensuite et par les méthodes de son choix le lecteur devra trouver que

$$\mathrm{Spec}\, A = \{0, 1\},$$

puis

$$\mathrm{E}_0(f) = \mathrm{Vect}(1,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_1(f) = \mathrm{Vect}(1,0).$$

2. On trouve cette fois

$$M = \frac{1+a^2}{(1-a)^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

matrice qui est *spectralement* diagonalisable étant donné sa réelle symétrie.

Passons maintenant à la comparaison des deux noyaux.

- ▷ L'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$ ne doit casser aucune patte de palmipède.
- ▷ Soit x appartenant au noyau de $f^* \circ f$. Nous avons $f^* \circ f(x) = 0$, et *a fortiori*

$$< x \mid f^* \circ f(x) > = 0,$$

égalité qui, moyennant la propriété (ADJ) de notre chapeau, se métamorphose en $\|f(x)\|^2 = 0$. En bref, x appartient à $\mathrm{Ker}\, f$ et voilà donc *in fine* que

$$\mathrm{Ker}\, f^* \circ f = \mathrm{Ker}\, f.$$

Il est enfin assez tranquille de parvenir, *via* une approche matricielle, tout d'abord à

$$\mathrm{Spec}\, s_f = \{0, b\},$$

où, histoire d'alléger un peu l'atmosphère, nous avons noté

$$b = 2\,\frac{1+a^2}{(1-a)^2},$$

puis, en suivant toujours la route matricielle, d'accéder à

$$\mathrm{E}_0(s_f) = \mathrm{Vect}(1,1) \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_b(s_f) = \mathrm{Vect}(1,-1).$$

3. On peut reformuler la question en demandant à quelle condition s_f est un projecteur, et comme il s'agit de nécessité et de suffisance, nous nous organisons en deux temps.

▷ Si s_f est un projecteur, son spectre se doit d'être inclus dans $\{0, 1\}$ ce qui oblige ouvertement $b = 1$ et qui nous amène quasi mentalement à $a = -1$.

▷ Réciproquement, si $a = -1$, on trouve que

$$M^2 = M$$

and Bob's your uncle !

Partie 2

4.*a*. Soit i appartenant à $[\![1, n]\!]$. D'après la formule du produit matriciel, on a tour à tour

$$({}^tAB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} ({}^tA)_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} B_{ji},$$

la dernière égalité procédant d'une simple gestion de transposition, et on en déduit dans la foulée que

$$\mathrm{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} B_{ji}. \qquad (*)$$

b. Nous notons momentanément ϕ cette application et nous procédons en quatre points.

▷ Il est tout d'abord lumineux que ϕ applique bien $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

▷ Grâce à l'égalité $(*)$ du récent a, la symétrie de ϕ ne peut échapper qu'à ceux — ou à celles — qui souffrent de diplopie avancée.

▷ Soit A une matrice non nulle appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Moyennant encore une fois $(*)$, on a

$$\phi(A, A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}^2,$$

qui est assurément une somme de réels positifs ou nuls, dont au moins l'un d'entre-eux n'est pas nul. Autant dire alors que

$$\phi(A, A) > 0,$$

et nous pouvons songer à la suite.

c. *Here you are !*

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad |\,(\, A \mid B\,)\,| \leqslant \|A\|_2 \times \|B\|_2.$$

Pour la suite, on applique cela à $B = {}^tA$, et comme tout nombre réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue et que visiblement,

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \|M\|_2 = \|{}^tM\|_2,$$

on a effectivement

$$\mathrm{tr}\, A^2 \leqslant \mathrm{tr}({}^tAA).$$

La fin va bien évidemment se *manager* en deux temps.

▷ Si A est symétrique, on a immédiatement l'égalité en question.

▷ Si, réciproquement, on a cette égalité, on s'est fatalement trouvé dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz pour le couple $(A, {}^tA)$ qui finit donc par être lié parce que nous le savons bien. Il existe donc quoi qu'il arrive, un réel μ tel que

$$A = \mu\, {}^tA,$$

information qui, une fois correctement injectée dans notre égalité, donne exactement

$$\mu\|A\|_2^2 = \|A\|_2^2.$$

Maintenant c'est de choses l'une, ou bien $A = 0$, et elle est bien symétrique réelle, ou bien $\mu = 1$ et A est encore symétrique réelle…

5.a. Il suffit de demander. On a

$$A' = P^{-1}AP.$$

b. Les deux bases B_0 et B' sont deux bases orthonormales de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, < \mid >)$, la première parce que nous sommes supposés le savoir, et la seconde car on vient de nous le dire ! Et quand on passe d'une orthonormale à une orthonormale…

c. Selon les deux précédentes question on a

$$A' = {}^tPAP,$$

et grâce au *dressing undressing principle*, il devrait s'ensuivre que

$${}^tA' = {}^tP\,{}^tAP = P^{-1}\,{}^tAP,$$

et *via* le même argument de changement de base qu'au a, il en résulte effectivement que

$${}^tA' = \mathsf{Mat}_{B'}(f^*).$$

6.a. C'est une très classique égalité reposant sur l'incontournable *dressing undressing* et qui profite pleinement du côté *colonne* de la matrice AX.

b. La preuve de l'égalité $\mathsf{Ker}\, f = \mathsf{Ker}\, s_f$ que nous avons donnée lors de la question 2 ne profitait pas ses spécificités locales. Elle est donc encore d'actualité ici et quant à sa voisine, elle se déduit immédiatement du théorème du rang.

c. La matrice de s_f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est par définition notre amie ${}^tAA$ et nous n'avons que deux choses à ajouter :

- ▷ cette base est légendairement orthonormale ;
- ▷ la classique matrice de Gram ${}^tAA$ est très symétrique réelle.

Tout cela fait le bonheur du théorème de caractérisation matricielle de la symétrie.

d. Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$. Il existe une colonne *non nulle*(*) X appartenant à $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$${}^tAAX = \lambda X,$$

et nous en déduisons gentiment que

$${}^tX\,{}^tAAX = \lambda\,{}^tXX.$$

À l'aide du tout proche a, cela devient

$$\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2,$$

et voilà que nous préférons écrire,

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2},$$

en rendant grâce au *never forget*.

e. La toute proche question c déclenche le grand théorème spectral qui produit donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est diagonale, ce qui est déjà un incontestable *scoop* auquel nous devons greffer deux affirmations supplémentaires :

(*) *Never forget !*

▷ le nombre de « 0 » sur cette diagonale est la dimension du noyau de s_f, c'est-à-dire affirmativement $n-r$ comme le démontrent la récente b et le théorème du rang ;

▷ les autres éléments de cette diagonale doivent être *strictement* positifs étant donné la positivité évoquée lors du non moins récent d.

Après cela et parce que nous connaissons nos libertés, nous choisirons l'ordre des éléments de notre base diagonalisante de telle sorte que les $n-r$ éléments nuls de la diagonale soient, *manu militari*, propulsés à la queue de cette dernière.

f. Si notre mémoire est bonne, il vient d'être dit que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} s_f$$

et vu l'organisation de notre base C, nous devons avoir

$$\forall j \in [\![r+1, n]\!], \qquad f(\epsilon_j) = 0,$$

et il semble que la première messe soit dite.

Pour la suite, puisque C est orthonormale, la question 5.c assure que la transposée de la matrice $\operatorname{Mat}_C(f)$ n'est autre que $\operatorname{Mat}_C(f^*)$ et comme nous savons que

$$\operatorname{Mat}_C(f^*)\times\operatorname{Mat}_C(f) = \operatorname{Mat}_C(s_f),$$

et comme l'on nous a autorisé certaines actions sur les matrices « bloquées » nous récupérons tout d'abord l'égalité

$$\begin{bmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

et ensuite

$${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D,$$

et toute le monde est content.

7.a. Après avoir mis en avant l'énorme *scoop* indiquant que $(f^*)^* = f$, il résulte de la question 6.b appliquée à f^* en lieu et place de f que

$$\operatorname{rg} \tau_f = \operatorname{rg} f^* \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} \tau_f = \operatorname{Ker} f^*.$$

Seulement voilà, nous avons officiellement *admis* que le rang de toute matrice est égal à celui de sa transposée, à telle enseigne que

$$\operatorname{rg} f^* = \operatorname{rg} f,$$

et après avoir ressorti le 6.b, mais pour f cette fois, on a d'une part

$$\operatorname{rg} s_f = \operatorname{rg} \tau_f,$$

et d'autre part

$$\dim \operatorname{Ker} s_f = \dim \operatorname{Ker} \tau_f$$

en remerciant notre camarade *Durang*.

b. Il est ouvertement dit que

$$f^* \circ f(x) = \lambda x, \tag{1}$$

et par composition à gauche par la linéaire f, il revient au *physio* d'asséner que

$$\tau_f\big(f(x)\big) = \lambda f(x),$$

ce qui est déjà un bon début à celaa près que nous devons absolument nous préoccuper du *never forget*. Mais si, par l'absurde, nous avions $f(x) = 0$, en répercutant dans l'égalité (1) située quelques lignes plus haut, nous aurions

$$\lambda x = 0,$$

alors que ce n'est ni le cas de λ par hypothèse, ni le cas de x, car nous ne l'avons pas oublié…

Considérons maintenant la restriction $\tilde{f}$ de f au sous-espace $\mathsf{E}_\lambda(f)$. Nous devons savoir que

$$\mathsf{Ker}\,\tilde{f} = \mathsf{E}_\lambda(f) \cap \mathsf{Ker}\,f \quad \text{et} \quad \mathsf{Im}\,\tilde{f} = f\big(\mathsf{E}_\lambda(f)\big),$$

mais le réel λ n'étant pas nul il est évident — ou bien connu — que

$$\mathsf{E}_\lambda(f) \cap \mathsf{Ker}\,f = \{0\},$$

à telle enseigne que le théorème du rang appliqué à $\tilde{f}$ s'écrit

$$\dim \mathsf{E}_\lambda(f) = \dim f\big(\mathsf{E}_\lambda(f)\big).$$

Il reste alors à avoir bien capté que le début de la question nous à appris que

$$f\big(\mathsf{E}_\lambda(f) \smallsetminus \{0\}\big) \subset \mathsf{E}_\tau(f),$$

d'où l'on déduit évidemment que

$$f\big(\mathsf{E}_\lambda(f)\big) \subset \mathsf{E}_\tau(f),$$

et à ne pas avoir égaré le théorème du sous-espace vectoriel.

c. Si nous appliquons ce que nous venons de découvrir à f^* en lieu et place de f, il devrait successivement apparaître que :

▷ l'endomorphisme τ_f est symétrique et donc spectralement diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres ;

▷ si λ est une valeur propre non nulle de τ_f, elle est également valeur propre de s_f tout en vérifiant

$$\dim \mathsf{E}_\lambda(\tau_f) \leqslant \dim \mathsf{E}_\lambda(s_f),$$

ce qui nous permet d'affirmer que, pour tout réel λ on a l'équivalence logique

$$\lambda \in \mathsf{Spec}\, s_f \smallsetminus \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathsf{Spec}\, \tau_f \smallsetminus \{0\},$$

et que dans ce cas

$$\dim \mathsf{E}_\lambda(\tau_f) = \dim \mathsf{E}_\lambda(s_f).$$

Il suffit d'ajouter à cela les dires du 7.*a* qui peuvent se reformuler en

$$0 \in \mathsf{Spec}\, s_f \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \mathsf{Spec}\, \tau_f \quad \text{et} \quad \dim \mathsf{E}_0(\tau_f) = \dim \mathsf{E}_0(s_f),$$

et l'affaire est définitivement emballée.

d. À bien y regarder la question précédente révèle que les deux endomorphismes s_f et τ_f possèdent une liste étendue de valeurs propres *commune* puisque leurs valeurs propres sont les mêmes et que ces dernières se répètent le même nombre de fois. Il n'en faut pas plus pour soutenir que les deux matrices

$$A^tA \quad \text{et} \quad {}^tAA,$$

sont *orthogonalement* semblables à une *même* matrice diagonale $\mathcal{D}$, ce qui signifie qu'il existe deux matrices P et Q appartenant à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^tA = P\mathcal{D}^tP \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = Q^tAA^tQ,$$

d'où il ressort dans la foulée que

$$A^tA = PQ^tAA^tQ^tP,$$

ce qui peut également s'écrire

$$A^tA = PQ^tAA^t(PQ),$$

puisque, au risque de radoter, la transposition obéit au *dressing undressing principle*. On propose donc

$$\Omega = PQ$$

et comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bien connu pour sa stabilité pour le produit matriciel…

8.a. Soit x appartenant à W. On a sans surprise

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant 1,$$

chronique d'une *bornitude* annoncée.

b. La fonction numérique φ est polynomiale à n variables. Elle est par conséquent continue sur W et comme ce dernier est désormais fermé, borné et parfaitement non vide, un important théorème d'optimisation de Weierstrass assume pleinement qu'elle ait un maximum global sur W.

c. Soit x appartenant à $V \setminus U$. L'un des réels x_i est fatalement nul et par conséquent

$$\varphi(x) = 0.$$

d. Observons, par exemple, que $x = (1, 0, \ldots, 0) \in W$ et que $\varphi(x) = 1$. La question précédente suggère que le maximum M n'est assurément pas atteint sur $V \setminus U$ et qu'il n'a donc plus vraiment le choix !

e. Nous notons u l'application

$$u : x \mapsto x_1 + \cdots + x_n,$$

et nous observons que, parce qu'elles sont polynomiales à n variables, les fonctions φ et u sont en réalité de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Cela étant, comme un maximum global est *a fortiori* local, la condition nécessaire du premier ordre d'existence d'un *extremum* local sous contrainte fait que le maximum précédent ne peut être atteint qu'en un un point $a \in U \cap W$ pour lequel il existe un réel λ tel que

$$\nabla\varphi(a) + \lambda\nabla u(a) = 0.$$

Cela se détaille mentalement en

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad a_1 \cdots a_{i-1}a_{i+1} \cdots a_n + \lambda = 0,$$

ce qui oblige le *by product* $\lambda \neq 0$, et qui peut donc également s'écrire

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad a_i = -\frac{\varphi(a)}{\lambda}.$$

Les réels a_i sont tous égaux et au vu et au su de la contrainte, on doit impérativement avoir

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n} \quad i.e. \quad a = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1).$$

Et en ce qui concerne M, il ne peut échapper à

$$M = \frac{1}{n^n}.$$

f. La matrice S, spectralement diagonalisable, possède bien une liste étendue de valeurs propres, et comme deux matrice semblables ont la même trace, nous espérons pouvoir souhaiter l'égalité

$$\operatorname{tr} S = \mu_1 + \cdots + \mu_n.$$

Nous nous organisons.

▷ Si l'un des μ_i est nul, les canards ont leurs pattes intactes, et l'égalité ne se produit que si, et seulement si la trace de S est nulle, ce qui *via* un argument très nautique, se réduit à

$$\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$$

▷ Si les μ_i sont tous *strictement* positifs, il en est de même du réel $\operatorname{tr} S$ à telle enseigne que le point

$$\frac{(\mu_1, \ldots, \mu_n)}{\operatorname{tr} S}$$

appartient à U et vérifie notre contrainte. Il en résulte *maximalement* que

$$\frac{1}{(\operatorname{tr} S)^n} \prod_{i=1}^{n} \mu_i \leqslant \frac{1}{n^n},$$

ce qui, très positivement, clôt la première partie du *deal*. En outre et parce que nous le savons bien, le cas d'égalité ne se produira que si, et seulement si,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\mu_i}{\operatorname{tr} S} = \frac{1}{n},$$

ce qui devrait se résumer *in fine* par

$$\mu_1 = \cdots = \mu_n.$$

g. Soit x un réel positif ou nul. La matrice $xI_n + {}^tAA$ est symétrique réelle d'ordre n et nul ne peut raisonnablement ignorer qu'elle possède

$$(x + \lambda_1, \ldots, x + \lambda_n)$$

comme liste étendue de valeurs propres, liste tout à fait idoine pour s'appuyer sur la question précédente, et qui nous amène déjà à

$$\Delta(x) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(xI_n + {}^tAA)}{n}\right)^n$$

la fin de l'histoire passant par la linéarité de la trace ainsi que par les inéluctables égalités

$$\operatorname{tr}(xI_n) = nx \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}{}^tAA = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Partie 3

9.*a*. Une des propriétés premières des projecteurs est leur fameux côté « $\mathtt{kis}$ » qui signifie ici que

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f,$$

et dans une base obtenue en concaténant une base de $\operatorname{Im} f$ à une base de $\operatorname{Ker} f$ la matrice de f est très classiquement égale à

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

les raisons essentielles étant que $\dim \operatorname{Im} f = r$ et que les points fixes des projecteurs sont exactement les éléments de son image. Comme la trace de cette matrice est bien évidemment égale à r, il en est de même de la trace des autres matrices de f puisque la trace est officiellement invariante par changement de base.

b. Comme $f^2 = f$, on a

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

ce qui après autorisation du produit par bloc devient

$$\begin{bmatrix} A_1^2 & 0_{r,n-r} \\ A_3A_1 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix}.$$

Il en résulte effectivement que $A_1^2 = A_1$. À côté de cela, le récent b assurant que la trace de $\mathtt{Mat}_C(f)$ est égale à r, nous briguons l'égalité $\mathrm{tr}\, A_1 = r$, puisque nos mirettes nous soufflent à l'oreille que

$$\mathrm{tr}\big(\mathtt{Mat}_C(f)\big) = \mathrm{tr}\, A_1.$$

Grâce au récent a, notre A_1 est désormais la matrice d'un projecteur de rang r et comme elle est carrée d'ordre r, elle est fatalement inversible, comme en atteste le test du rang.

Oui mais voilà, vu que au risque de radoter $A_1^2 = A_1$, cela oblige implacablement

$$A_1 = I_r.$$

c. Depuis la question 6 nous savons que

$${}^tAA = \begin{bmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

où D est une matrice diagonale vérifiant

$$D = I_r + {}^tA_3A_3,$$

puisque nous venons d'apprendre à l'instant que $A_1 = I_r$. Nous nous contenterons alors de signaler les deux choses suivantes :

▷ les valeurs propres de D sont classiquement de la forme $1+\mu$ où μ est une valeur propre de ${}^tA_3A_3$;

▷ nous avons établi plus haut que lorsque A est une matrice réelle *carrée*, les valeurs propres de la matrice ${}^tAA$ sont positives ou nulles, mais il se trouve que cela reste d'actualité pour une matrice de type ${}^tRR$ où R est une matrice *rectangulaire* réelle et que la preuve « rectangulaire » n'est pas plus chère que la preuve « carrée».

Comme les valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ sont exactement celles de D, elles sont définitivement supérieures ou égales à 1, et vu que

$$\mathrm{tr}\, {}^tAA = \mathrm{tr}\, D,$$

l'inégalité

$$\mathrm{tr}\, {}^tAA \geqslant r,$$

semble couler de source.

d. Soit f un projecteur orthogonal. Nous savons officiellement que c'est un endomorphisme symétrique et comme la base C est providentiellement orthormale la matrice $\mathtt{Mat}_C(f)$ se doit d'être symétrique, comme le stipule unee importante caractérisation matricielle. Cela impose donc $A_3 = 0$ puis

$${}^tAA = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix},$$

et enfin

$$\mathrm{tr}\, {}^tAA = r.$$

La réponse à la question posée est donc : « *tous* » !

10.*a*. Les symétries étant des automorphismes, la matrice A est inversible, propriété qui, parce que nous le saavons bien, se transmet d'abord à ${}^tA$ puis au produit ${}^tAA$. Nous observons ensuite qu'étant donné que $f^{-1} = f$, on a également

$$A^{-1} = A \quad \text{et} \quad ({}^tA)^{-1} = {}^tA,$$

puisqu'il est bien connu que l'inversion commute à la transposition. Signalons enfin, qu'à l'instar de la transposition, l'inversion obéit à son tour au *dressing undressing principle*, tout cela pour conclure à

$$({}^tAA)^{-1} = A\,{}^tA.$$

b. On rappelle le résultat quasi officiel que voici.

INVERSION SPECTRE ET ESPACES PROPRES

Soit B une matrice inversible quelconque et μ une valeur propre de B. Alors μ n'est pas nulle, son inverse est une valeur propre de B^{-1} et

$$\mathsf{E}_{\mu}(B) = \mathsf{E}_{1/\mu}(B^{-1}).$$

Soit alors λ une valeur propre de ${}^tAA$. D'après notre sympathique rappel et la question précédente, non seulement

$$\frac{1}{\lambda} \in \operatorname{Spec} A^tA,$$

mais aussi

$$\mathsf{E}_{\lambda}({}^tAA) = \mathsf{E}_{1/\lambda}(A^tA).$$

C'est maintenant le moment de ressortir la question 7.*c* après l'avoir accomodée à la sauce matricielle. Elle stipule que

$$\operatorname{Spec} A^tA = \operatorname{Spec} {}^tAA \quad \text{et} \quad \dim \mathsf{E}_{1/\lambda}(A^tA) = \dim \mathsf{E}_{1/\lambda}({}^tAA),$$

et nous pouvons passer à la suite.

c. Cette question ne mérite qu'un simple *no comment* à la condition que l'on ait *remarquablement* fréquenté les bancs du collège…

d. La question 6.*d*, remise à son tour au goût matriciel, et l'inversibilité ambiante font que les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont ici *strictement* positifs. Soit alors $i \in [\![1, n]\!]$. Supposons que monsieur « λ_i » soit répété n_i fois dans notre liste étendue. La sublime question précédente fait que $1/\lambda_i$ figure également dans notre liste et qu'il est également répété n_i fois. Cela devrait nous conforter dans l'idée que

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

et après avoir observé que tour à tour

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \times \prod_{i=1}^{n}\Big(\sqrt{\lambda_i} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\Big) = \prod_{i=1}^{n}\Big(\sqrt{\lambda_i} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\Big),$$

la conclusion appartient au potache de la précédente question.

e. L'équivalence logique du récent *c* entraîne immédiatement que

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) = 2^n \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i = 1,$$

et nous nous organisons maintenant en deux temps.

▷ Si tous les λ_i sont égaux à 1, il est totalement lumineux que

$${}^tAA = I_n,$$

d'où l'on déduit que

$${}^tA = A^{-1} = A,$$

et tout particulièrement que A est une matrice symétrique réelle. Selon un certaine caractéristion matricielle, f est un endomorphisme symétrique qui devient officiellement une symétrie orthogonale(*).

(*) Le programme officiel stipule que les projecteurs orthogonaux sont exactement les projecteurs symétriques et il en est de même pour les symétries car il est bon de savoir que projecteurs et symétries sont comme cul et chemise…

▷ Supposons réciproquement que f soit une symétrie orhogonale. Elle devient de ce fait endomorphisme symétrique, de sorte que ${}^tA = A$ et qu'ensuite

$$ {}^tAA = I_n. $$

Les réels λ_i sont alors tous égaux à 1 et l'affaire est dans le sac.

Partie 4

11. Comme la matrice A est inversible, sa cousine ${}^tAA$ l'est également, et ses vaaleurs propres sont donc *strictement* positives. Le début de la question est alors absolument géré par le théorème spectral.

Ensuite, il est bien connu que pour définir n'importe quelle application linéaire, il *suffit* de la définir sur une base de son espace de départ, et que deux appalications linéaires qui coïncident sur une base, coïncident partout, ce qui est le cas des endomorphismes s_f et v^2.

12. Soit x appartenant à $\mathsf{E}_\mu(w)$. D'après un incontournable « beau suivi », nous n'ignorons pas que

$$ x \in \mathsf{E}_{\mu^2}(w^2) \quad i.e. \quad x \in \mathsf{E}_{\mu^2}(s_f). $$

Il nous reste deux égalités à négocier. La première, à savoir $\operatorname{Spec} w = \{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Spec} s_f\}$ va se traiter par double inclusion.

▷ Si λ appartient à $\operatorname{Spec} s_f$, l'endomorphisme $s_f - \lambda\,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, ce qui parce que w et Id commutent, et que le signe de λ est maîtrisé, devient

$$ (w - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) \circ (w + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}) \quad \text{non inversible.} $$

Seulement voilà, comme $-\sqrt{\lambda}$ est *strictement* négatif et que w appartient à $S^+(\mathbb{R}^n)$, l'endomorphisme $w + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}$ est inversible et c'est donc son voisin $w - \sqrt{\lambda}\,\mathrm{Id}$ qui ne l'est pas, de sorte que

$$ \sqrt{\lambda} \in \operatorname{Spec} w. $$

▷ Soit réciproquement μ appartenant à $\operatorname{Spec} w$. Il résulte de l'inclusion du début de la question que μ^2 appartient à $\operatorname{Spec} s_f$, c'est-à-dire que

$$ \mu^2 = \lambda \quad \text{où} \quad \lambda \in \operatorname{Spec} s_f, $$

et comme il est dit que μ est positif...

Notons ici, une fois n'est pas coutume, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les *différentes* valeurs propres de s_f, à telle enseigne que, selon ce que nous venons d'apprendre, les réels

$$ \mu_1 = \sqrt{\lambda_1} \quad ; \quad \ldots \quad ; \mu_k = \sqrt{\lambda_k} $$

sont les différentes(*) valeurs propres de w. La condition nécessaire et suffisante de diagonalisation dite « *du comptable* » oblige alors

$$ \dim \mathbb{R}^n = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathsf{E}_{\lambda_i}(s_f) \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{R}^n = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathsf{E}_{\mu_i}(w), $$

de telle sorte que par différence

$$ \sum_{i=1}^{k} \big(\dim \mathsf{E}_{\lambda_i}(s_f) - \dim \mathsf{E}_{\mu_i}(w)\big) = 0. $$

L'inclusion du tout début de la question indique qu'il s'agit là d'une somme *nulle* de nombres positifs ou nuls à laquelle il doit arriver ce qu'il doit arriver ! Grâce au fabuleux théorème du sous-espace vectoriel sollicité au moins deux fois dans cette histoire, nous concluons que

$$ \forall i \in [\![1, k]\!], \qquad \mathsf{E}_{\mu_i}(w) = \mathsf{E}_{\lambda_i}(s_f), $$

(*) On rappelle que la fonction « racine carrée » est injective sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle y préserve donc les différences.

ce qui ne peut que nous ravir.

13. En ce qui concerne l'existence, l'affaire est claire, car l'endomorphisme v fabriqué à la question 12 appartient franchement à $S^+(\mathbb{R}^n)$. Nous attaquons l'unicité en supposant que v et w soient deux candidats convenables. D'après la question précédente, il ne doit faire aucun doute que

$$\operatorname{Spec} v = \operatorname{Spec} w = \left\{\sqrt{\lambda} \;\middle|\; \lambda \in \operatorname{Spec} s_f\right\},$$

et que pour tout réel μ appartenant au spectre commun à v et à w, on a

$$\mathsf{E}_\mu(v) = \mathsf{E}_\mu(w) = \mathsf{E}_{\mu^2}(s_f).$$

Nous en concluons que v et w possèdent au bas mots les mêmes éléments propres(*), mais attention, ne nous méprenons pas ! Deux endomorphismes ayant les mêmes éléments propres n'ont en général aucune raison d'être égaux, mais si l'un d'entre-eux — et donc les deux ! — est diagonalisable, ils sont bel et bien égaux, comme le vérifiera sans peine le lecteur qui aurait osé ne pas nous faire confiance. Bref,

$$v = w,$$

chronique d'une unicité annoncée…

Il reste à signaler que toute base formée de vecteurs propres de s_f est *a fortiori* formée de vecteurs propres de v, entendez par là une base diagonalisant v.

14. Cela ne mérite que *comment !* C'est en effet une simple utilisation du « Gaffiot » de l'algèbre linéaire, à savoir le *dictionnaire* qui permet de passer du langage vectoriel au langage matriciel et lycée de Versailles !

15. Vu tout ce que nous savons, le lecteur ne doit pas être surpris de l'inversibilité de $\sqrt{{}^tAA}$ et si cela ne dérange personne, nous notons S la matrice $\sqrt{{}^tAA}$ et Ω la matrice AS^{-1} en pressentant un peu notre avenir ! On a alors

$${}^t\Omega = S^{-1}\,{}^tA,$$

la raison essentielle étant que la matrice S est symétrique, tout comme son inverse, et que le *dressing undressing* est encore à l'ordre du jour. Il s'ensuit alors que

$${}^t\Omega\,\Omega = S^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = S^{-1}\,S^2S^{-1} = I_n,$$

ce qui ne peut que nous satisfaire. Maintenant, puisque

$$A = \Omega S,$$

l'existence est acquise et si (Ω', S') est un autre couple idoine, on a aisément

$${}^tAA = S'^2,$$

ce qui impose $S' = S$ depuis la question 14, puis facilement $\Omega' = \Omega$, tout ce petit monde évoluant dans une ambiance bien confortable d'inversibilité.

Partie 5

16. Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ contient au moins la matrice I_n, l'ensemble $\left\{\|M - V\|_2 \;\middle|\; V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, hautement minorée par 0, et il existe dans $\mathbb{R}$ un important théorème de la borne inférieure.

17. Soit N appartenant à $\mathsf{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons tout d'abord

$$\|RN\|_2^2 = \operatorname{tr}({}^tN\,{}^tRRN) = \operatorname{tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2,$$

(*) S'il faut le préciser, on entend par là les spectres et les sous-espaces propres.

puisque l'on a *orthogonalement* ${}^tRR = I_n$. Nous avons ensuite

$$\|NR\|_2^2 = \mathrm{tr}({}^tR{}^tNNR) = \mathrm{tr}(R^{-1}\,{}^tNN\,R) = \mathrm{tr}({}^tNN) = \|N\|_2^2,$$

l'antépénultième égalité procédant de l'invariance de la trace par changement de base. Passons maintanant aux bijections et commençons pourquoi pas par la première, en l'occurrence l'application

$$u : V \mapsto VR^{-1},$$

que, parce que nous le voulons bien, nous accompagnons l'application

$$v : V \mapsto VR.$$

Vu les célèbres stabilités de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, nos amies u et v appliquent bien $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans lui même et comme mentalement

$$u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id},$$

il est indubitable que u soit une bijection de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. Il est alors clair que la seconde application soit enveloppée dans un magique *mutatis mutandis*. Soit pour finir $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Grâce à la première partie de la question, nous avons

$$\|RM - V\|_2^2 = \|M - R^{-1}V\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|MR - V\|_2^2 = \|M - VR^{-1}\|_2^2,$$

et l'on déduit facilement des bijectivités précédentes que les ensembles

$$E_1 = \{\|M-V\|_2 \mid V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} \;\; ; \; E_2 = \{\|RM-V\|_2 \mid V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} \;\; ; \; E_3 = \{\|MR-V\|_2 \mid V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\},$$

sont *farpaitement* égaux et ont donc la même borne inférieure.

18. Comme Ω est orthogonale, on déduit de la question précédente que déjà

$$d(A) = d(S),$$

ensuite et parce que P est orthogonale

$$d(S) = d(D{}^tP),$$

et enfin, en raison de l'orthogonalité de ${}^tP$,

$$d(S) = d(D).$$

19.a. La matrice W est symétrique réelle. Merci qui ?

b.Segmentons un peu le travail.

▹ À la faveur de la notion d'adjoint, il est limpide que

$$w = \frac{v + v^*}{2},$$

et qu'en conséquence

$$< w(x) \mid x > = \frac{1}{2} < v(x) \mid x > + \frac{1}{2} < x \mid v^*(x) > .$$

Comme le basculement de l'adjoint assure que

$$< x \mid v^*(x) > = < v(x) \mid x >,$$

on a bien

$$< w(x) \mid x > = < v(x) \mid x > .$$

▷ Comme V est orthogonale, le Gaffiot oblige $v^* = v^{-1}$, et c'est pourquoi il advient tour à tour que

$$\|v(x)\|^2 = < v(x) \mid v(x > = < x \mid v^* \circ v(x) > = \|x\|^2.$$

▷ Il est dit que

$$|< w(x) \mid x >| = |< v(x) \mid x >|,$$

et l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwarz révèle que

$$|< v(x) \mid x >| \leqslant \|v(x)\| \times \|x\| = \|x\|^2.$$

▷ Comme un réel est toujours inférieur ou égal à sa valeur absolue, nous avons

$$< w(x) \mid x > \leqslant < x \mid x >,$$

que la bilinéarité du produit scalaire transforme en

$$< x - w(x) \mid x > \geqslant 0.$$

c. Soit λ une valeur propre de $\mathrm{Id} - w$. Il existe un vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x - w(x) = \lambda x,$$

et il apparaît alors que

$$\lambda = \frac{< x - w(x) \mid x >}{\|x\|^2},$$

d'où la positivité de λ.

d. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale, l'immédiat théorème de « *matricialisation* » dans une base orthonormale se porte garant de

$$1 - W_{ii} = (I_n - W)_{ii} = < e_i - w(e_i) \mid e_i >,$$

ce qui est un nombre positif ou nul depuis la fin du récent b.

e. On se structure en deux temps !

▷ Si $W = I_n$, il ne fait aucun doute que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad W_{ii} = 1.$$

▷ Réciproquement, si tous les W_{ii} sont égaux à 1, la trace de $I_n - W$ est nulle, mais comme $I_n - W$ est diagonalisable, sa trace est égale à la somme d'une liste étendue de ses valeurs propres qui ont été découvertes positives ou nulles lors du récent c. Autant dire que les valeurs propres de la *diagonalisable* $I_n - W$ sont toutes nulles ce qui oblige

$$I_n - W = 0 \quad i.e. \quad W = I_n.$$

20.a. À la faveur de l'égalité d'Al Kashi on tombe aisément sur

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\,(\,I_n - V \mid D\,) + \|V\|_2^2 - \|I_n\|_2^2,$$

et comme, très orthogonalement

$$\|V\|_2^2 = \mathrm{tr}\ {}^tVV = \mathrm{tr}\, I_n = \|I_n\|_2^2,$$

nous gagnons la première moitié du combat. Pour la suite nous observons simplement que

$$(\,I_n - V \mid D\,) - (\,I_n - W \mid D\,) = \frac{1}{2}\,(\,{}^tV - V \mid D\,) = 0,$$

la dernière égalité reposant sur une classique propriété du produit scalaire $(\ |\ )$ selon laquelle le sous-espace des matrices *antisymétriques* est orthogonal à celui des matrices *symétriques*, simple conséquence de la propriété officiellement bien cachée « $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ ».

b. Si l'on en croit la question $4.a$, on doit avoir

$$(\, I_n - W \mid D\,) = \sum_{i=1}^{n} (1 - W_{ii}) D_{ii} \geqslant 0,$$

la positivité finale provenant de la question $19.d$ et des dispositions prises lors de la 18.

c. Nous venons à l'instant d'apprendre que le réel $\|D - I_n\|_2$ est un minorant de l'ensemble

$$\{\|D - V\|_2 \ \mid\ V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\},$$

et comme I_n est orthogonale, ce minorant est au moins atteint en I_n. Un minorant atteint s'appelle un *minimum*, ce qui est infiniment mieux qu'un *infimum*, et nous n'allons pas nous en plaindre ! Ainsi

$$d(D) = \|D - I_n\|_2$$

et comme il a déjà été entrevu que $d(D) = d(A)$, nous pouvons déjà nous réclamer de

$$d(A) = \|D - I_n\|_2.$$

Ensuite et parce que P et ${}^tP$ sont orthogonales, la question 17 est formelle. Nous avons successivement

$$\|D - I_n\|_2 = \|PD - P\|_2 = \|PD{}^tP - P{}^tP\|_2 = \|S - I_n\|_2,$$

et nous sommes presqu'au bout du chemin.

Supposons pour finir que V soit un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\|D - V\|_2 = d(A).$$

Autant dire alors que

$$\|D - V\|_2 - \|D - I_n\|_2 = 0,$$

ce que la fraîche question a transforme en

$$(\, I_n - W \mid D\,) = 0,$$

ou encore en

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - W_{ii}) D_{ii} = 0.$$

L'argument *nautique* des sommes nulles de réels positifs ou nuls, conduit dans un premier temps à

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad (1 - W_{ii}) D_{ii} = 0,$$

puis dans un second à

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad W_{ii} = 1,$$

puisqu'il a été précisé que les D_{ii} sont *strictement* positifs, et la toute proche $19.e$ impose d'ores et déjà que

$$W = I_n \quad i.e. \quad V + {}^tV = 2I_n.$$

Il en résulte en scalairisant que

$$(\, V \mid I_n\,) + (\, {}^tV \mid I_n\,) = 2n,$$

ce qui devient mentalement $(\, V \mid I_n\,) = n$, et comme

$$\|V - I_n\|_2^2 = \|V\|_2^2 + \|I_n\|_2^2 - 2\,(\, V \mid I_n\,) = n + n - 2\,(\, V \mid I_n\,),$$

nous récupérons

$$\|V - I_n\|_2^2 = 0,$$

et nous vous souhaitons une bonne nuit…