# CORRIGÉ

*Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer à l'ESSEC Business School.*

**Partie 1**

Nous nous permettons d'ajouter trois informations qui, le moment venu, seront bien plus que providentielles !

0.$a$. Nous rappelons une fois pour toutes que si $(u_n)$ est une suite réelle, on a l'équivalence logique

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et nous le redirons plus !

0.$b$. Soit $r > 0$ et $a \in A(r)$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite

$$n \mapsto n^p a_n,$$

appartient encore et mentalement à $A(r)$.

0.$c$. Soit à nouveau $r > 0$ et $a \in A(r)$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la suite

$$n \mapsto \binom{n}{p} a_n,$$

appartient elle aussi à $A(r)$, car selon une équivalence binomiale *standard*, nous avons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad n^k \binom{n}{p} |a_n|\, r^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+k}}{p!} |a_n|\, r^n,$$

et que, lorsque les signes le veulent bien, il y a sur le marché un précieux test d'équivalence.

1. Soit $x$ appartenant au segment $[-r, r]$ et $k$ un entier naturel. Comme il semble difficile de s'opposer à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant n^k |a_n||x|^n \leqslant n^k |a_n| r^n,$$

l'appartenance de $a$ à $A(r)$ et le test de comparaison en signe positif, confirment déjà la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} n^k |a_n||x|^n.$$

Soit maintenant $r'$ un réel supérieur ou égal à $r$ et $a$ une suite appartenant à $A(r')$. Il suffit d'appliquer le début de la question à $r'$ en lieu et place de $r$ pour se convaincre de

$$\forall x \in [-r', r'], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n\geqslant 0} n^k |a_n||x|^n \ \ \textit{converge},$$

et quand on choisit légitimement $x = r$...

2. Soit $r$ et $r'$ deux réels vérifiant $0 < r \leqslant r'$ et soit $a$ une suite appartenant à $B(r')$. Étant donné qu'à l'évidence, nous avons très positivement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant |a_n| r^n \leqslant |a_n| {r'}^n,$$

le *squeezing process* affirme dans un premier temps que $a$ appartient à $B(r)$. Si l'on suppose ensuite que $a$ appartient à $A(r)$ la série

$$\sum_{n\geqslant 0} n^k |a_n| r^n$$

converge pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et tout particulièrement lorsque $k = 0$. Il reste alors à ne pas avoir oublié une certaine condition nécessaire de convergence affirmant que le terme général d'une série convergente se doit de tendre vers $0$.

3. Soit $r$ appartenant à $\mathbb{R}_+^*$. Nous allons appliquer tout bêtement la méthode de plongement.

▷ Nous avons tout d'abord et par définition l'inclusion

$$A(r) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

▷ Comme la suite nulle est un membre éminent de $A(r)$, ce dernier n'est assurément pas vide.

▷ Soit $a$ et $b$ appartenant à $A(r)$ et soit $\lambda$ un nombre réel. Soit également $k$ un entier naturel quelconque. Si l'on en croit l'inégalité du triangle, nous devons avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant n^k |a_n + \lambda b_n| r^n \leqslant n^k |a_n| r^n + |\lambda| n^k |b_n| r^n,$$

et comme il est dit que les deux séries

$$\sum_{n\geqslant 0} n^k |a_n| r^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} n^k |b_n| r^n$$

convergent, il en est de même de

$$\sum_{n\geqslant 0} n^k |a_n + \lambda b_n| r^n,$$

et ce, grâce au théorème de linéarité de la théorie des séries et au test de comparaison en signe positif.

En bref, $a + \lambda b$ appartient à $A(r)$, et la boucle est bouclée.

↱ On peut également établir que $B(r)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et c'est même un petit peu plus simple…

4.$a$. Soit à nouveau $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $n$ entier naturel *non nul*, $u_n(k)$ est *strictement* positif et l'on a tranquillement

$$\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} = \frac{r}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1},$$

d'où il ressort immédiatement que

$$\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite est assez standard. Du fait de cette limite nulle, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$, tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad \frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} \leqslant \frac{1}{2},$$

et la très classique récurrence sous-géométrique nous amène sans surprise à

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad 0 \leqslant u_n(k) \leqslant \frac{1}{2^{n-n_0}} u_{n_0}(k),$$

la positivité ambiante des uns et des autres ayant eu, plusieurs fois, son pesant d'arachide. On doit avoir appris en classe de première scientifique que

$$\frac{1}{2^{n-n_0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

*and by squeeze*

$$u_n(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

↱ Les idées que nous venons d'utiliser sont assez célèbres dans la littérature mathématique. On les doit au français Jean Le Rond d'Alembert.

À bien y regarder, nous venons d'établir que

$$n^k \alpha_n r^n = o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

la positivité de la suite $\alpha$ lui ayant évité la valuation. La fin de l'histoire est assez *nautique*. La série de Riemann de paramètre 2 est convergente et à terme positif, il existe sur le marché un précieux test de prépondérance en signe positif et il résulte effectivement de tout cela que

$$\alpha \in A(r).$$

*b*. Soit $r > 0$. Pour la première partie de la question, c'est encore une fois les souvenirs de nos seize ans qui nous permettent d'affirmer que

$$\beta(\lambda) \in B(r) \quad \Leftrightarrow \quad r < \frac{1}{\lambda}\cdot$$

La seconde partie va demander une petite organisation.

▷ Supposons que $\beta(\lambda)$ appartienne à $A(r)$. Il en résulte en particulier que la série géométrique

$$\sum_{n\geqslant 0} (\lambda r)^n$$

converge, la positivité de $\lambda$ ayant encore une fois épargné une valuation, et c'est ici le passage en première année de prépa qui nous conduit à

$$r < \frac{1}{\lambda}\cdot$$

$\triangleright$ Supposons réciproquement que $r < 1/\lambda$ et soit $k$ un entier naturel quelconque. Comme on ne change pas une équipe qui gagne, nous allons, comme à la précédente, passer par un $n^2$-*shot*. Après avoir observé que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n^{k+2}(\lambda r)^n = n^{k+2} e^{n \ln(\lambda r)},$$

la providentielle *stricte* négativité du réel $\ln(\lambda r)$ et une prépondérance classique bien connue doivent gentiment nous amener tout d'abord à

$$n^k(\lambda r)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis à la convergence de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} n^k (\lambda r)^n$$

en suivant le même argument riemannien que celui développé *supra*. Le résultat des courses est donc

$$\beta(\lambda) \in A(r) \quad \Leftrightarrow \quad r < \frac{1}{\lambda}.$$

5. Soit $r$ appartenant à l'ouvert $]0, \rho[$ et $k$ un entier naturel. Comme $a$ appartient à $B(\rho)$ on sait que

$$|a_n|\rho^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

et la *tricky* écriture suggérée par le texte révèle que

$$n^k|a_n|r^n = o\left(n^k\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right).$$

Étant donné que

$$0 < \frac{r}{\rho} < 1,$$

la seconde partie de la question précédente oblige la convergence de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n,$$

qui induit celle de

$$\sum_{n \geqslant 0} n^k |a_n| r^n$$

*via* le test de prépondérance en signe ouvertement positif.

**Partie 2**

Pour alléger un peu le système et si cela ne dérange personne, nous noterons désormais

$$I = ]-R, R[.$$

6. Soit $x$ appartenant à $I$.

▷ Si $x = 0$, la convergence souhaitée ne mérite pas grand chose !

▷ Si $x$ est non nul on a $|x| \in ]0, R[$ et comme $a$ est située dans $B(R)$, la question 5 est formelle. La suite $a$ appartient à $A(|x|)$ et voilà donc, en particulier, que la série

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n x|^n$$

converge et comme nous savons que toute série absolument convergente est convergente…

7.$a$. Soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}$. Il est plus que prudent de s'organiser un peu.

▷ Si $n = 0$, puisque $r$ est donné *strictement* positif, $r^{-1}$ est parfaitement sensé et l'inégalité voulue est donc plus que lumineuse.

▷ Si $n \geqslant 1$, nous nous intéressons à la fonction monôme $u : t \mapsto t^n$ qui est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qui satisfait à

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u'(t) = nt^{n-1}.$$

Nous pouvons donc lui appliquer l'inégalité des accroissements finis entre $x$ et $x + h$ et comme l'on a l'inclusion

$$[x, x + h] \subset [-r, r],$$

il s'avère que

$$\forall t \in [x, x + h], \qquad |u'(t)| = n|t|^{n-1} \leqslant nr^{n-1},$$

et il ne fait plus aucun doute que

$$|(x + h)^n - x^n| \leqslant nr^{n-1}|h|.$$

$b$. Il faut bien sûr conserver les dispositions de la question précédente et nous y ajoutons un entier naturel $m$. Grâce à la linéarité de la sommation, nous avons

$$\sum_{n=0}^{m} a_n(x + h)^n - \sum_{n=0}^{m} a_n x^n = \sum_{n=0}^{m} a_n\big((x + h)^n - x^n\big),$$

et après une légitime triangulation, voilà déjà que

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n(x + h)^n - \sum_{n=0}^{m} a_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{m} |a_n|\big|(x + h)^n - x^n\big|.$$

Le récent $a$ permet maintenant d'aller plus loin, à savoir

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n(x + h)^n - \sum_{n=0}^{m} a_n x^n\right| \leqslant |h| \sum_{n=0}^{m} n|a_n|r^{n-1},$$

inégalité qui, pour mieux se rapprocher du bout de la route, sera écrite

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n(x + h)^n - \sum_{n=0}^{m} a_n x^n\right| \leqslant \frac{|h|}{r} \sum_{n=0}^{m} n|a_n|r^n. \qquad (*)$$

Au vu et au su des positions géographiques des deux réels $x$ et $x+h$ et si l'on en croit la question 6, les deux séries

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(x+h)^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

convergent, alors que la position stratégique de $r$ et la question 5 font que $a \in A(r)$, et qu'en particulier

$$\sum_{n\geqslant 0} n|a_n|r^n \quad \text{converge également.}$$

Le passage à la limite, quand $m$ tend vers $+\infty$ dans la toute proche inégalité $(*)$, est désormais légitime et il donne effectivement

$$\left|f_a(x+h)-f_a(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{r}\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n.$$

*c*. Soit $x$ appartenant à $[-r,r]$ et soit $h$ un réel tel que $x+h$ appartienne encore à $[-r,r]$. L'inégalité précédente et le *squeezing process* entraînant

$$f_a(x+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f_a(x),$$

c'est-à-dire la continuité de $f_a$ en $x$, et comme ce dernier est n'importe quel élément du segment $[-r,r]$, la continuité de $f_a$ sur $[-r,r]$ est d'ores et déjà acquise.

Faisons le point. Nous venons en réalité d'établir que pour chaque réel $r$ vérifiant

$$0<r<R,$$

la fonction $f_a$ est continue sur $[-r,r]$.

Soit maintenant $x$ appartenant à l'ouvert $I$. Comme $|x|<R$, on peut facilement *insérer* un réel $r$ entre $|x|$ et $R$, et comme $f_a$ est continue sur $[-r,r]$, elle l'est *a fortiori* sur l'ouvert $]-r,r[$ et en particulier au point $x$ puisqu'il appartient à cet ouvert.

8.*a*. Soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}$. Toujours d'après la question 5 la suite $a$ appartient à $A(\rho)$ et la série

$$\sum_{n\geqslant 0} n|a_n|\rho^n$$

est tout particulièrement convergente, ce qui, nécessairement se doit d'entraîner

$$(na_n) \in B(\rho)$$

Maintenant que la suite $(na_n)$ appartient à l'ensemble $B(\rho)$ la question 7.*c*, convenablement adaptée à qui de droit, assure la continuité de $g_a$ sur $]-\rho,\rho[$ et par la technique d'insertion utilisée à la fin de la même question 7.*c*, elle l'est aussi sur $I$.

*b*. Soit $n$ un entier naturel non nul. La fonction polynomiale $S_n$ est indéniablement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et d'après la formule d'Isaac Barrow, nous avons tour à tour

$$\forall x\in\mathbb{R}, \qquad \int_0^x S_n'(t)dt = \Big[S_n(t)\Big]_0^x = S_n(x)-S_n(0) = S_n(x)-a_0,$$

et cela est même un petit peu plus que ce qui nous est demandé !

*c*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x$ à nouveau situé dans $[-r, r]$. La question $8.a$ ayant révélée la continuité de $g_a$ sur $]-R, R[$ et celle des polynômes étant légendaire, l'intégrale

$$\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt$$

est parfaitement légitime et vu les définitions des uns et des autres on devrait avoir

$$\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt = \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k t^{k-1} dt.$$

La triangulation d'une intégrale exigeant un peu de prudence, nous nous organisons un peu.

▷ Si $x$ est positif ou nul, nous avons déjà

$$\left|\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt\right| \leqslant \int_0^x \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k t^{k-1}\right| dt.$$

▷ En revanche si $x$ est négatif le triangle se transforme en

$$\left|\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt\right| \leqslant \int_x^0 \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k t^{k-1}\right| dt.$$

Mais, pour chaque $t$ appartenant à $[0, x]$, la série

$$\sum_{k \geqslant n+1} ka_k t^{k-1}$$

est depuis longtemps *absolument* convergente, et nous pouvons donc la trianguler(*) à son tour à telle enseigne que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k t^{k-1}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k||t|^{k-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1},$$

la dernière inégalité ne devant casser aucune patte de palmipède. Étant donné que le dernier majorant ne dépend plus de $t$, c'est grâce cette fois à la croissance de l'intégration, quand les bornes le veulent bien, que nous nous réclamons de l'inégalité

$$\left|\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k r^{k-1} \int_0^x dt,$$

(*) Il est évidemment hors de question de trianguler les semi-convergentes, et pour cause…

lorsque le réel $x$ est positif ou nul et de sa cousine

$$\left|\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k r^{k-1} \int_x^0 dt,$$

dès lors que $x$ est négatif. Il se trouve que les deux cas peuvent gentiment se recoller puisque, à bien y regarder, nous avons *in fine*

$$\forall x \in [-r, r], \qquad \left|\int_0^x \big(g_a(t) - S_n'(t)\big)dt\right| \leqslant |x| \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k r^{k-1},$$

et comme $|x| \leqslant r\ldots$

↱ Signalons que, dans l'argumentation ci-dessus, il y a eu quelques *nanos chouias* de linéarité — entrées et sorties de constantes — sur lesquels nous ne sommes pas sentis obligés d'insister.

*d*. Soit à nouveau $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-r, r]$. En linéarisant un peu, la question précédente révèle que

$$\left|\int_0^x g_a(t)dt - \int_0^x S_n'(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k r^k,$$

ce que la récente question $b$ métamorphose en

$$\left|\int_0^x g_a(t)dt + a_0 - S_n(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k r^k.$$

Nous permettons de rappeler que d'une part et depuis une belle lurette, nous savons que

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_a(x),$$

et que, d'autre part, les *restes* de toutes les séries convergentes du monde, sont des suites de limite nulle. Le passage à la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente conduit alors tanquillement à l'égalité espérée.

*d*. Soit $x$ appartenant à l'ouvert $I$ et soit — insertion, insertion !— un réel $r$ vérifiant

$$|x| < r < R.$$

Il résulte de la question précédente appliquée à ce providentiel $r$ que

$$f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt,$$

et voilà donc en définitive que

$$\forall x \in I, \qquad f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt.$$

Depuis la question $a$ ci dessus, la fonction $g_a$ est continue sur l'intervalle $I$ et d'après le théorème de Darboux, la fonction

$$x \mapsto \int_0^x g_a(t)dt,$$

est l'une de ses *primitives* sur l'intervalle en question, tout comme d'ailleurs et constante oblige, la copine

$$f_a : x \mapsto a_0 + \int_0^x g_a(t)dt.$$

Les primitives d'une fonction continue sont assurément de classe $\mathcal{C}^1$ et la dérivation d'une primitive est aussi désopilante que la quadrature du carré ! *So*...

↱ L'hypothèse faite au début de cette deuxième partie est certes $a \in B(R)$. Mais à bien y regarder, notre argumentation a uniquement reposé sur la propriété plus faible selon laquelle

$$\forall r \in ]0, R[, \qquad a \in A(r).$$

Nous aurons bientôt l'occasion de profiter de cet avantage !

9.$a$. Nous avons déjà répondu à cette question et nous l'avons même légérement dopée lors de notre chapeau 0.$c$.

↱ À bien y regarder, en décalant l'affaire en ajoutant un entier naturel $k$ dans la bagarre, et en profitant de l'avantage dont nous venons de causer, les conclusions de cette huitième question peuvent se reformuler de la façon suivante. Lorsqu'une suite $b$ appartient à $A(r)$ pour tout $r \in ]0, R[$, la fonction

$$u_b : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} b_n x^{n-k}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et

$$\forall x \in I, \qquad u'(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (n-k) b_n x^{n-(k+1)}.$$

Cette remarque va nous servir lors de la prochaine question.

$b$. Nous allons, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, établir que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I,$$

et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \qquad f_a^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

▷ Si $k = 0$, il semble que ce soit fait depuis longtemps.

▷ Supposons maintenant la propriété acquise pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Comme $a$ appartient depuis longtemps à $A(r)$ pour tout $r \in ]0, R[$, et vu que nous avons suffisamment martelé qu'il en est de même de la suite

$$n \mapsto \binom{n}{k} a_n,$$

notre récente reformulation assure que la fonction $f_a^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et que

$$\forall x \in I, \qquad (f_a^{(k)})'(x) = k! \sum_{n=k+1}^{+\infty} (n-k) \binom{n}{k} a_n x^{n-(k+1)},$$

et comme il est anodin de se convaincre de

$$\forall n \geqslant k+1, \qquad k!(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)!\binom{n}{k+1},$$

il semble bien que l'affaire soit bouclée.

*c*. Soit $n \in \mathbb{N}$. On trouve sans problème que

$$a_n = \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!}.$$

10.*a*. La parfaite connaissance des séries exponentielles officielles nous révèle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) = e^x,$$

et il ne doit plus faire aucun doute que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_\alpha^{(k)}(1) = e.$$

*b*. Le *serial geometer* n'ignore pas que la série $\sum(\lambda x)^n$ ne converge que si, et seulement si, $x$ appartient à l'intervalle

$$J = \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[,$$

et que, par conséquent,

$$\forall x \in J, \qquad f_\beta(x) = \frac{1}{1-\lambda x}.$$

En outre et si l'on en croit la question 4.*b*, toutes les conditions de la question 9.*b* sont réunies si l'on choisit

$$R = \frac{1}{\lambda},$$

et nous apprenons ainsi que

$$\forall x \in J, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \lambda^n x^{n-k} = f_\beta^{(k)}(x).$$

ESSEC

CORRIGÉ

SCIENTIFIQUE MATHÉMATIQUES

Seulement voilà, une très classique récurrence de Cotonou met en lumière que

$$\forall x \in J, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad f_\beta^{(k)}(x) = \frac{k!\lambda^k}{(1-\lambda x)^{k+1}},$$

ce qui, à quelques aménagement près, ne peut que nous satisfaire.

↱ Le lecteur cultivé aura reconnu la fameuse formule du binôme négatif, malheureusement disparue de nos programmes…

**Partie 3**

11. Nous signalons que l'hypothèse $(H)$ a, entre autres, la vertu d'entraîner que

$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

puisque, si $\rho$ est un réel *strictement* supérieur à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = (b_n\rho^n)\times\frac{1}{\rho^n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

*a*. Soit $N \in \mathbb{N}$. Comme $f_a$ est depuis peu de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et comme ici $R$ est *strictement* plus grand que 1, on peut largement lui appliquer le théorème de Taylor reste intégral entre les bornes 1 et 0, à l'ordre $N$, ce qui s'écrit exactement

$$f_a(0) = \sum_{p=0}^{N} \frac{(0-1)^p}{p!} f_a^{(p)}(1) + \int_1^0 \frac{(0-t)^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt,$$

et qui, à bien y regarder, ressemble étrangement à notre projet !

*b*. Soit à nouveau $N \in \mathbb{N}$. Il y a une chose que nous n'avons pas eu encore l'occasion d'utiliser, en l'occurrence la *positivité* de la suite $a$. Elle induit lumineusement la *croissance* sur $[0, R[$ de la fonction $f_a$ ainsi que de toutes ses dérivées successives, à telle enseigne que

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant f_a^{(N+1)}(t) \leqslant f_a^{(N+1)}(1),$$

de telle manière que, après une sempiternelle histoire de croissance intégrale et de bornes bien disposées,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt \leqslant \frac{f_a^{(N+1)}(1)}{(N+1)!} = b_{N+1}.$$

Oui mais voilà, la fine remarque que nous avons faites dans le chapeau de la question 11 oblige

$$b_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

et par *squeeze*…

*c*. Quand on fait la synthèse de ce qui s'est passé lors des deux précédentes questions, on ne peut passer à côté de

$$\sum_{p=0}^{N}(-1)^p b_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_a(0) = a_0,$$

puisqu'une suite ouvertement bornée, en l'occurrence $N \mapsto (-1)^{N+1}$, ne peut pas vraiment changer le cours de l'histoire d'une tendance vers zéro…

Il ne reste plus qu'à ne pas avoir occulté ce que sont une série convergente et sa somme.

12.*a*. Il est *infiniment* possible d'appliquer la question 11.*a* à la fonction $f_a^{(s)}$ en lieu et place de $f_a$ et nous n'avons plus rien à ajouter.

*b*. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons déjà signalé la croissance sur $[0, R[$ de $f_a^{(N+s+1)}$ grâce à laquelle

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant f_a^{(N+s+1)}(t) \leqslant f_a^{(N+s+1)}(1),$$

et avec exactement la même argumentation qu'à la question 11.*b*, il semble bien que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt \leqslant \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+1)!},$$

ce qui ne peut que nous séduire, puisqu'à la surprise générale,

$$\frac{\rho^{N+s+1}}{(N+s+1)!} \times \frac{(N+s+1)!}{\rho^{N+s+1}} = 1,$$

et qu'un nombre positif est égal à sa valeur absolue…

*c*. C'est déjà une conséquense de l'hypothèse $(H)$ qui nous révèle que

$$\frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\,\rho^{N+s+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1}$$

À côté de cela, comme

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} = \underbrace{(N+2)\cdots(N+s+1)}_{s \text{ facteurs}},$$

on déduit d'un classique équivalent polynomial que

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{\rho^{N+s+1}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\rho^{s+1}} \cdot \frac{N^s}{\rho^N},$$

ce qui peut également s'écrire

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{\rho^{N+s+1}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\rho^{s+1}} \cdot \frac{N^s}{e^{N\ln\rho}}.$$

Étant donné que $\ln \rho$ est un réel *strictement* positif, c'est encore *via* une de ces sacrées prépondérances classiques que nous pouvons, *in fine*, revendiquer

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{\rho^{N+s+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0. \tag{2}$$

L'encadrement de la question précédente et la conjonction des limites (1) et (2) déclenchent alors un énorme *squeeze* qui nous permet d'envisager la suite.

*d*. C'est exactement comme à la question 11. Nous clamons cette fois et sans autre explication que la série

$$\sum_{p\geqslant 0}(-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!}$$

converge et que

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} = f_a^{(s)}(0),$$

et comme d'une part et lumineusement

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} = \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{(p+s)!} \cdot \frac{(p+s)!}{p!} = \frac{(p+s)!}{p!} b_{p+s},$$

et que d'autre part et selon la question 9.*c*

$$f_a^{(s)}(0) = s! a_s,$$

nous pouvons asséner sans autre forme de procès que

$$a_s = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s},$$

la célèbre formule des « trois factorielles » n'étant pas totalement étrangère à l'affaire. Le changement d'indice $p = n - s$ se charge alors du bouquet final.

13.*a*. Il suffit d'ouvrir les yeux pour déclarer que $f_a$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $d$.

*b*. Il résulte du récent *a* que

$$\forall n > d, \qquad b_n = 0,$$

et donc n'importe quel réel $\rho > 1$ peut faire le job et pourquoi pas la constante de Kaprekar

$$\rho = 6174.$$

*c*. Soit $s$ appartenant à $[\![0, d]\!]$. D'après ce que nous venons d'apprendre et la toute proche question 12.*d*, nous avons

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty}(-1)^{n-s}\binom{n}{s} b_n$$

et comme pour $n > d \geqslant s$, nous savons que $b_n = 0 \ldots$

**Partie 4**

$14.a$. Loi de probabilité discrète oblige, nous savons que la série $\sum a_n$ converge et a d'ailleurs $1$ pour somme. Une certaine condition nécessaire de convergence oblige alors

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad i.e. \quad a \in B(1).$$

$b$. Nous proposons tout bêtement $R = 1$ et la partie **2** se charge du reste.

$15.a$. Soit $t \in \mathbb{R}$. La série exponentielle officielle

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{t^n}{n!}$$

est convergente et a pour somme $e^t$. Il s'ensuit à quelque constante près que $G_X(t)$ existe et vaut $e^{t-1}$ et si l'on résume, la fonction $G_X$ est déjà définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et l'on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = e^{t-1}.$$

La classe $\mathcal{C}^\infty$ de $G_X$ sur $\mathbb{R}$ s'impose alors *exponentially* et l'on a mentalement

$$\forall s \in \mathbb{N}, \qquad G_X^{(s)}(1) = 1.$$

$b$. Il est officiellement reconnu que

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \qquad \frac{\rho^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et comme l'hypothèse $(H)$ exige un réel $\rho$ *strictement* supérieur à $1$, nous ne plaisantons pas cette fois avec Kaprekar et nous proposons plus sérieusement $\rho = 2$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. La formule de réciprocité rencontrée en $12.d$ stipule que

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!},$$

la dernière égalité procédant d'une légitime *troisfactorialisation* et d'un *picochouia* de linéarité, et après un rapide changement d'indice, voilà que

$$a_n = \frac{e^{-1}}{n!},$$

à telle enseigne que $X$ suit la loi de Poisson de paramètre $1$.

$16.a$. On trouve immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = pq^n.$$

En outre, comme pour tout $t$ réel, la série géométrique

$$\sum_{n\geqslant 0}(qt)^n$$

ne converge que si, et seulement si, $|qt|<1$, la fonction $G_X$ est déjà définie sur l'ouvert

$$\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[$$

puisque l'appartenance de $p$ à l'ouvert $]0,1[$ induit en particulier la *stricte* positivité de $q$. Le *serial geometer* affirmant autoritairement que

$$\forall t\in\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[,\qquad G_X(t)=\frac{p}{1-qt},$$

la classe $\mathcal{C}^\infty$ de $G_X$ — fonction rationnelle — est au rendez-vous et c'est *via* une récurrence de Cotonou que l'on parvient à

$$\forall t\in\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[,\quad \forall s\in\mathbb{N},\qquad G_X^{(s)}(t)=\frac{pq^s s!}{(1-qt)^{s+1}}.$$

Il y a maintenant plusieurs raisons permettant de justifier que 1 appartient au domaine de définition de la fonction $G_X$. On peut le déduire manuellement de l'évidente $0<q<1$, mais on peut également s'appuyer sur la 14.*b* et cela étant, il apparaît simplement que

$$\forall s\in\mathbb{N},\qquad G_X^{(s)}(1)=\left(\frac{q}{p}\right)^s s!\,.$$

*b*. La vérification souhaitée repose, tout bêtement, sur égalité

$$1-\frac{q}{p}=\frac{2p-1}{p}.$$

En ce qui concerne la réalisation de l'hypothèse $(H)$ c'est ici un peu plus *tricky* que dans l'exemple précédent. Maintenant que $q/p$ est *strictement* inférieur à 1 et vu la positivité ambiante nous avons également

$$\frac{p}{q}>1,$$

inégalité stricte qui permet, comme dans un trou de souris(*), de considérer un réel $\rho$ vérifiant

$$1<\rho<\frac{p}{q}.$$

Un tel choix réalisant la providentielle

$$0<\frac{\rho q}{p}<1,$$

(*) On parle parfois de stratégie d'insertion.

nous avons bien

$$b_n \rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

chronique d'une hypothèse $(H)$ attendue. Soit encore une fois $n \in \mathbb{N}$. Comme l'on ne change pas une équipe qui gagne, nous ressortons encore une fois la $12.d$ qui révèle cette fois que

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{k-n} \binom{k}{n} \left(\frac{q}{p}\right)^k = \left(\frac{q}{p}\right)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(-\frac{q}{p}\right)^{k-n},$$

la dernière égalité reposant sur une habile mise en facteur. C'est alors que dans la sublime formule du binôme négatif obtenue lors de l'exemple $10.b$ que nous choisissons $\lambda = 1$ et

$$x = -\frac{q}{p},$$

et ce dernier étant assurément situé dans l'ouvert $]-1,1[$, nous récupérons immédiatement

$$a_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n \times \left(1 + \frac{q}{p}\right)^{-(n+1)} = pq^n,$$

le calcul final ne présentant pas vraiment d'obstacle. Autant dire maintenant que

$$X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

17.*a*. Il est indéniable que

$$\forall s \in [\![0, d]\!], \qquad \deg H_s = s.$$

La famille en question est donc *intérieure* à $\mathtt{Pol}_d$ et formée de polynômes *non nuls* dont les degrés sont deux à deux distincts(*). Il s'agit donc déjà d'une famille libre de $\mathtt{Pol}_d$. Comme elle est en outre de longueur $d+1$ et que ce dernier est précisément la dimension de $\mathtt{Pol}_d$, la conclusion passe par le théorème de caractérisation des bases en dimension finie.

↱ Le lecteur *aware* aura à coup sûr repéré les fameux polynômes de Gregory-Newton.

*b*. Bien sûr et *as usual*, nous opérons en deux temps.

▹ Soit $P$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $d$. La composition $x \mapsto P(x+1)$ est également polynomiale de degré ouvertement inférieur ou égal à $d$ et il en est donc de même de la fonction

$$x \mapsto P(x+1) - P(x).$$

Notre opérateur $\Delta$ applique donc bien $\mathtt{Pol}_d$ dans lui-même.

▹ Soit $P$ et $Q$ deux polynômes de degré inférieur ou égal à $d$ et soit $\lambda$ un nombre réel.

(*) On fait outragement tout un foin de l'échelonnement en degrés ! Il est cependant indéniable que les familles échelonnées représentent une infime part de la caste des familles de polynômes non nuls à degrés différents…

Soit $x \in \mathbb{R}$. C'est tout bêtement les *définitions* des opérations sur les fonctions qui légitiment l'égalité suivante

$$(P+\lambda Q)(x+1)-(P+\lambda Q)(x)=P(x+1)+\lambda Q(x+1)-P(x)-\lambda Q(x),$$

qui sera mieux disposée en l'écrivant

$$(P+\lambda Q)(x+1)-(P+\lambda Q)(x)=P(x+1)-P(x)+\lambda\big(Q(x+1)-Q(x)\big),$$

puisqu'elle s'écrit alors exactement

$$\Delta(P+\lambda Q)(x)=\big(\Delta(P)+\lambda\Delta(Q)\big)(x),$$

et comme cela est d'actualité pour tous les $x \in \mathbb{R}$…

↱ Le lecteur cultivé aura sûrement reconnu le célèbre opérateur $\Delta$ de Gregory-Newton.

*c*. Il n'y a aucune difficulté dans cette question et nous insistons à nouveau sur un point important. Parmi les polyômes de Gregory-Newton, il n'y a qu'un, en l'occurence $H_0$, qui ne s'annule pas en $0$.

*d*. Nous commençons par doper, *via* une gentille récurrence finie, les conclusions de la précédente. Nous laissons en effet au lecteur le soin de vérifier que

$$\forall s \in [\![0,d]\!],\quad \forall k \in [\![0,d]\!],\qquad \Delta^s(H_k)=\begin{cases} H_{k-s} & \text{si} \quad s \leqslant k,\\ 0 & \text{si} \quad s > k.\end{cases}$$

Soit alors $P$ un élément de $\mathtt{Pol}_d$. Base de Gregory-Newton oblige, il existe une famille de scalaires

$$(\alpha_0,\dots,\alpha_d),$$

telle que

$$P=\sum_{k=0}^{d}\alpha_k H_k.$$

Soit alors $s$ appartenant à $[\![0,d]\!]$. Grâce à la linéarité de $\Delta^s$, nous revendiquons

$$\Delta^s(P)=\sum_{k=0}^{d}\alpha_k\Delta^s(H_k)=\sum_{k=s}^{d}\alpha_k H_{k-s},$$

le bout du bout reposant sur une subtile gestion de notre récent dopage. Il reste à évaluer en $0$, à tenir compte de la remarque que nous avons faite à la fin de la précédente, pour débarquer sur

$$\Delta^s(P)(0)=\alpha_s,$$

et nous avons donc effectivement

$$P=\sum_{s=0}^{d}\Delta^s(P)(0)H_s.$$

↱ Dans la littérature, cette belle égalité s'appelle « formule de Gregory-Newton ».

$e$. Soit $k$ appartenant à $[\![0, d]\!]$. Il suffit, en toute légitimité, d'appliquer la belle formule de Gregory-Newton au monôme $e_k$, qui est de degré $k$, puis d'évaluer en chaque entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

$f$. Soit une dernière fois $k \in [\![0, d]\!]$. La variable $X^k$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est tout à fait en droit d'*espérer* et nous avons

$$\mathsf{E}(X^k) = \sum_{n=0}^{d} n^k a_n = \sum_{n=0}^{d} \sum_{s=0}^{d} \Delta^s(e_k)(0) H_s(n) a_n$$

la dernière égalité profitant tranquillement de la question précédente. Inversons alors les sommations, ce qui nous permet de découvrir l'égalité

$$\mathsf{E}(X^k) = \sum_{s=0}^{d} \Delta^s(e_k)(0) \sum_{n=0}^{d} H_s(n) a_n,$$

et il suffit d'écarquiller un peu les mirettes pour accepter que, pour tout $s \in [\![0, d]\!]$, on a tour à tour

$$\sum_{n=0}^{d} H_s(n) a_n = \sum_{n=s}^{d} \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!} a_n = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}$$

puisque, dans la présente situation polynomiale, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = \sum_{n=0}^{d} a_n x^n.$$

$g$. Grâce à la toute récente question $f$, et après avoir rapidement calculé les $\Delta^s(e_k)$ lorsque $(s, k) \in [\![0, 2]\!]^2$, on parvient, sans paracétamol, à

$$b_0 = 1 \quad ; \quad b_1 = 1 \quad ; \quad b_1 + 2b_2 = \frac{3}{2},$$

d'où il ressort immédiatement que

$$b_0 = 1 \quad ; \quad b_1 = 1 \quad ; \quad b_2 = \frac{1}{4}.$$

La magique formule d'inversion de la question 13.$c$ révèle alors, après quelques mièvres calculs, que

$$a_0 = \frac{1}{4} \quad ; \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{4},$$

à telle enseigne que $X$ suit la loi binomiale

$$\mathcal{B}(2, 1/2).$$