CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, *external lecturer* à ESSEC Business School (jlroque@me.com).

Nous signalons que la définition de l'extrémalité d'un point a peut être simplifiée en

$$\forall(x,y) \in A^2, \qquad \frac{x+y}{2} = a \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

et nous ne l'oublirons pas. Une autre chose, comme nous allons le rencontrer maintes fois, nous noterons $\mathfrak{J}$ le segment $[0,1]$.

Partie 0

1. Soit a un élément de l'ouvert $]0,1[$. Le plus simple est de faire un dessin et de distinguer deux cas.

▷ Si $0 < a \leqslant 1/2$, les réels

$$x = a - \frac{a}{2} \quad \text{et} \quad y = a + \frac{a}{2},$$

appartiennent ouvertement à $]0,1[$, vérifient

$$\frac{x+y}{2} = a$$

parce que l'on a tout fait pour, et sont manifestement très différents. Le point a n'est donc pas extremal.

▷ Si $1/2 < a < 1$, on procède *mutatis mutandis* mais avec cette fois

$$x = a - \frac{1-a}{2} \quad \text{et} \quad y = a + \frac{1-a}{2}.$$

↱ Il eut été possible d'éviter les deux cas en considérant le réel

$$\eta = \min(a, 1-a) > 0,$$

et en proposant

$$x = a - \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad y = a + \frac{\eta}{2},$$

mais comme nous savons que les $\min$, les $\max$ et autres $\inf$ et $\sup$, donnent parfois des migraines ophtalmiques à nos lecteurs…

2. Soit a appartenant cette fois au fermé $\mathfrak{J}$ et organisons-nous naturellement.

▷ Si a appartient à l'ouvert $]0,1[$, grâce aux mêmes acolytes

$$\eta \quad ; \quad x = a - \frac{\eta}{2} \quad ; \quad y = a + \frac{\eta}{2},$$

qui ont permis au migraineux de réussir la question 1, le point a n'est pas extremal.

▷ Si $a = 0$, et si x et y sont deux éléments de $\mathfrak{J}$ vérifiant

$$\frac{x+y}{2} = 0, \quad i.e. \quad x + y = 0,$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 156 13/10/2017 11:34

le fieffé argument des sommes nulles de réels positifs ou nuls oblige $x = y = 0$ et 0 est bel et bien extremal.

$\triangleright$ Si $a = 1$, et si x et y sont deux éléments de $[0, 1]$ vérifiant

$$\frac{x+y}{2} = 1, \quad i.e. \quad (1-x) + (1-y) = 0,$$

le même fieffé impose $x = y = 1$, et nous pouvons envisager la suite.

Partie 1

Il suffit de bien ouvrir les mirettes pour constater que les matrices appartenant à A_2 sont exactement les matrices $(2, 2)$ réelles, dont les entrées sont positives ou nulles et telles que la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne est égal à 1. Ces matrices sont appelées matrices bitochasiques d'ordre 2 et elles seront généralisées à l'ordre n un petit peu plus loin.

Les matrices bistochastiques jouent un grand rôle en mathématique et tout particulièrement en calcul des probabilités.

3.*a*. *No comment !*

↱ Cette dernière et triviale égalité a cependant le privilège de mettre en lumière que A_2 est l'ensemble des combinaisons convexes(*) des vecteurs I_2 et J

$$A_2 = [I_2, J],$$

qui s'appelle « segment » d'extrémités I_2 et J dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La notion de *segment* d'un espace vectoriel réel figurait dans l'ancien programme mais comme il y a toujours de l'érosion…

b. Simple formalité, puisque lorsque α et β appartiennent à $\mathfrak{I}$, on a mentalement

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \in \mathfrak{I},$$

et il en résulte aussi facilement que

$$\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \tag{MP}$$

jolie précision que nous appellerons « *middle property* » lorsque nous en aurons l'utilité.

↱ Nous insistons sur une chose importante. Le texte a décidé, *manu militari*, de n'autoriser la notation M_{yo} qu'à la condition *sine qua non* que « *yo* » soit un élément de $\mathfrak{I}$. Nous saurons ne pas le perdre de vue.

c. Soit α appartenant au segment $[0, 1]$. Nous avons aisément

$$\det M_\alpha = 2\alpha - 1,$$

(*) On appelle ainsi les importantes combinaisons linéaires à coefficients positifs de somme 1.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 157 13/10/2017 11:34

ESSEC

CORRIGÉ

et par conséquent

$$M_\alpha \ \text{inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\cdot$$

Supposons désormais que la matrice M_α soit inversible. D'après l'incontournable formule des cofacteurs nous revendiquons

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha - 1}\begin{bmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{2\alpha - 1} I_2 + \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} J,$$

et il faut alors s'organiser un peu.

▷ Si α vérifie

$$0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{\alpha}{2\alpha - 1} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} > 0.$$

Ces signes contraires nous font oublier la combinaison convexe et M_α^{-1} n'a aucune chance d'appartenir à A_2.

▷ Si α est maintenant tel que

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1,$$

c'est *mutatis mutandis* que nous affirmons que M_α n'appartient pas à A_2.

▷ Si $\alpha = 0$, on a alors

$$M_\alpha^{-1} = J \in A_2.$$

▷ Si $\alpha = 1$, on a cette fois

$$M_\alpha^{-1} = I_2 \in A_2.$$

En résumé, lorsque M_α est inversible, on a l'équivalence

$$M_\alpha^{-1} \in A_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \ \text{ou} \ \alpha = 1.$$

4. Nous commençons par deux utiles observations. Lorsque α est un élément de $\mathfrak{I}$, nous avons les anodines équivalences logiques

$$M_\alpha = I_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1 \quad \text{et} \quad M_\alpha = J \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

a. Nous les prenons l'un après l'autre.

▷ Soit α et β deux éléments du segment $\mathfrak{I}$ tels que

$$\frac{M_\alpha + M_\beta}{2} = I_2,$$

ce qui, depuis quelques lignes, s'écrit également

$$M_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = I_2.$$

MATHÉMATIQUES SCIENTIFIQUE

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 158 13/10/2017 11:34

La première des anodines conduit alors à

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1,$$

et d'après l'extrémale question 2, il advient que $\alpha=\beta$, c'est-à-dire

$$M_\alpha=M_\beta,$$

chronique d'une *extrémalitude* annoncée !

▹ Si maintenant nos deux compères vérifient

$$\frac{M_\alpha+M_\beta}{2}=J \quad i.e. \quad M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=J,$$

la seconde anodine amène cette fois et facilement à

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=0,$$

et l'extrémale…

b. Vu l'idyllique position de α, les réels α et 2α appartiennent docilement à $\mathfrak{I}$ — tout est donc sous contrôle — et comme depuis la nuit des temps $J=M_0$, la géniale *middle property* garantit qu'effectivement

$$M_\alpha=\frac{M_{2\alpha}+J}{2}.$$

Signalons maintenant que, *because* $\alpha\neq 0$, on sait que $M_{2\alpha}\neq J$ et, compte tenu de notre toute première mise au point, M_α n'est extrémal.

c. On procède bien sûr *mutatis mutandis* en ayant pris cette fois la peine de justifier soigneusement l'égalité

$$M_\alpha=\frac{M_{2\alpha-1}+I_2}{2}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de se charger de l'intendance.

↱ Nous prenons le temps de revenir sur le résultat de la récente question $3.c$ qui mérite un peu de considération. Comte tenu des résultats de cette quatrième question, nous y avons appris que les matrices M_α qui sont inversibles et dont l'inverse appartient encore à A_2 sont précisément les éléments extrémaux du segment A_2.

5.a. Soit λ un nombre réel. Nous avons

$$\det(J-\lambda I_2)=\lambda^2-1,$$

et il en ressort très tranquillement que déjà

$$\operatorname{Spec} J=\{-1,1\}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 159 13/10/2017 11:34

C'est ensuite dans la même sérénité que notre dévoué lecteur trouvera

$$\mathsf{E}_{-1}(J) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{E}_1(J) = \mathsf{Vect}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

↱ Nous laissons au lecteur malin le soin de découvrir au moins deux raisons menant à la diagonalisabilité de J.

b. C'est à la surprise générale que nous proposons

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

puisque les *pros* de la diagonalisation savent depuis peu qu'elle est inversible et que

$$P^{-1}JP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Si maintenant α est un élément de notre vénéré $\mathfrak{I}$, nous avons tour à tour

$$P^{-1}M_\alpha P = P^{-1}\big(\alpha I_2 + (1-\alpha)J\big)P = \alpha I_2 + (1-\alpha)P^{-1}JP = \begin{bmatrix} 2\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

les différents calculs ne posant aucune espèce de difficulté. Nous proposons alors

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} 2\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce qui devrait satisfaire tout le monde.

↱ Il y a ici un petit miracle dont nous devons causer. Notre géniale matrice P ne dépend aucunement de α et elle diagonalise pourtant toutes les matrices M_α. On dit que ces dernières sont *codiagonalisables* ou encore qu'elles sont *simultanément diagonalisables*.

c. Attention, il nous semble qu'il y ait une légère faute de frappe à cet endroit, mais cela n'engage que nous ! Nous préférons annoncer α dans le semi-ouvert $[0, 1[$. D'après la question précédente les matrices M_α et D_α sont semblables et par conséquent

$$u_\alpha \text{ projecteur} \quad \Leftrightarrow \quad D_\alpha^2 = D_\alpha,$$

ce qui, très diagonalement, sur résume à

$$(2\alpha - 1)^2 = 2\alpha - 1 \quad \textit{i.e.} \quad 2(2\alpha - 1)(\alpha - 1) = 0.$$

comme nous avons *manu militari* exclu 1 de l'affaire, il ne reste qu'un projecteur convenable en l'occurrence $u_{1/2}$.

Partie 2

6. Comme il est dit que A est non vide il existe au moins un élément $z \in A$ et

$$0 = \|z - z\|$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 160 13/10/2017 11:34

est un figurant de l'ensemble en question qui n'est donc pas vide. Soit maintenant v et w appartenant à A. Selon l'inégalité du triangle, nous avons

$$\|v-w\| \leqslant \|v\|+\|w\| \leqslant 2R,$$

et notre ensemble est donc majoré par $2R$. L'existence de sa borne supérieure repose sur le fantastique — mais délicat, admis même ! — théorème de la borne supérieure.

7. L'hypothèse (H) fait que pour une fois — nous en verrons d'autres *infra* — l'on a carrément

$$\delta(A)=\max_{(u,v)\in A^2}\|u-v\|,$$

puisque l'on doit — on l'on devrait ! — savoir qu'un *supremum* atteint s'appelle un *maximum*.

a. Selon l'inégalité du triangle et notre récente *supposition* nous avons simplement et tour à tour

$$2\delta(A)=2\|a-b\|=\|c-b+d-b\| \leqslant \|c-b\|+\|d-b\| \leqslant 2\delta(A),$$

la dernière inégalité procédant de ce qu'un *supremum* est avant tout un majorant et notre découverte est *grosso modo* la première chose qui nous est demandée. On déduit de cet encadrement pour le moins serré que

$$\big(\delta(A)-\|c-b\|\big)+\big(\delta(A)-\|d-b\|\big)=0,$$

et quand une somme de nombres manifestement positifs est nulle…

↱ Pardonnez-nous si nous oublions les futures questions b, c, d, e parce que, s'il s'agit simplement de conclure, nous préférons passer par la formule du parallélogramme ou de la médiane qui, pour chaque triplet $(u,v,z)\in E^3$, peut efficacement s'écrire

$$4\left\|\frac{u+v}{2}-z\right\|^2+\|u-v\|^2=2\|u-z\|^2+2\|v-z\|^2.$$

On y choisit alors

$$u=c \quad ; \quad v=d \quad ; \quad z=b,$$

et d'après ce qui précède, on récupère ainsi

$$4\big(\delta(A)\big)^2+\|c-d\|^2=4\big(\delta(A)\big)^2.$$

L'histoire se termine en bref sur $c=d$, *and Bob' your uncle !*

Partie 3

Pour une matrice rectangulaire $\mathcal{R}$ quelconque de format (m,p), il est pratique d'adopter les dispositions suivantes :

▹ pour chaque entier $i \in [\![1,m]\!]$, on note

$$\ell_i(\mathcal{R})=\sum_{j=1}^{p}\mathcal{R}_{ij},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 161 13/10/2017 11:34

qui n'est autre que la somme des éléments de la ligne i ;

▷ pour chaque entier $j \in [\![1, p]\!]$, on note

$$c_j(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{R}_{ij},$$

qui n'est autre que la somme des éléments de la colonne j.

Il est absolument évident que les différentes applications ℓ_i et c_j sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathrm{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et nous utiliserons librement cet état de choses.

L'ensemble A_n des matrices bistochastiques d'ordre n est ainsi exactement l'ensemble des matrices M appartenant à E, dont les entrées sont toutes positives ou nulles et pour lesquelles

$$\ell_1(M) = \ell_2(M) = \cdots = \ell_n(M) = c_1(M) = c_2(M) = \cdots = c_n(M) = 1.$$

Nous pouvons alors attaquer l'affaire.

8.a. Nous y allons en deux temps et trois mouvements !

▷ En ce qui concerne

$$\frac{M + M'}{2},$$

nous observons que

▷ ses entrées sont évidemment positives ou nulles ;

▷ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, la linéarité de ℓ_i oblige

$$\ell_i\left(\frac{M + M'}{2}\right) = \frac{\ell_i(M) + \ell_i(M')}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ ;}$$

▷ pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$, la linéarité de c_j oblige

$$c_j\left(\frac{M + M'}{2}\right) = \frac{c_j(M) + c_j(M')}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

▷ En ce qui concerne M^{T} nos divagations sont les suivantes :

▷ ses entrées sont manifestement positives ou nulles ;

▷ pour chaque entier $i \in [\![1, n]\!]$, tout *transposeur* sait bien que

$$\ell_i(M^{\mathsf{T}}) = c_i(M) = 1 \text{ ;}$$

▷ pour chaque entier $j \in [\![1, n]\!]$, on a également

$$c_j(M^{\mathsf{T}}) = \ell_j(M) = 1,$$

et tout le monde est ravi.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 162 13/10/2017 11:34

b. Les adeptes du produit matriciel d'Arthur Cayley ne pouvant s'opposer à

$$MX_0 = \begin{bmatrix} \ell_1(M) \\ \ell_2(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{bmatrix},$$

l'égalité souhaitée est lumineuse. Nous nous permettons d'ajouter que, compte tenu de la précédente, nous avons à l'avenant

$$M^{\mathsf{T}}X_0 = X_0.$$

c. Nous nous appuyons à nouveau sur l'opération du roi Arthur selon laquelle

$$MX_0 = \begin{bmatrix} \ell_1(M) \\ \ell_2(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{\mathsf{T}}X_0 = \begin{bmatrix} c_1(M) \\ c_2(M) \\ \vdots \\ c_n(M) \end{bmatrix},$$

et nos mirettes font le reste.

d. C'est encore une valse !

▷ Soit i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Au gré de la formule du *King*, nous avons

$$(MM')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}M'_{kj},$$

et la positivité des entrées de MM' pointe son nez au milieu de la figure.

▷ Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Il ne fait aucun doute que

$$\ell_i(MM') = \sum_{j=1}^{n} (MM')_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}M'_{kj},$$

on réverse à la papa et voilà que tour à tour

$$\ell_i(MM') = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ik}M'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}\sum_{j=1}^{n} M'_{kj},$$

la dernière égalité procédant, du bout de la lorgnette, de la non dépendance de j des M_{ik}. Le *physio* est alors mis à contribution. Il trahit que pour chaque entier $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} M'_{kj} = \ell_k(M') = 1,$$

et il poursuit dans la foulée avec

$$\sum_{k=1}^{n} M_{ik} = \ell_i(M) = 1.$$

Voilà donc en bref que

$$\ell_i(MM') = 1,$$

et c'est une excellente chose.

▷ Soit pour finir $j \in [\![1, n]\!]$. On démontre *mutatis mutandis* que

$$c_j(MM') = 1,$$

et nous pouvons changer de question.

9.a. Après avoir ingurgité une énorme dose d'antalgique, nous sommes parvenus à

$$f_{\sigma} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \quad \text{et} \quad M_{\sigma} = I_n.$$

b. À très bien y regarder, la définition de l'endomorphisme f_σ et le protocole de « matricialisation » font que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \qquad (M_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)},$$

où nous utilisons, très librement, le génial symbole de Leopold Kronecker. En conséquence

▷ les entrées de M_σ sont bien positives ou nulles, car il ne s'agit que de 0 ou de 1 ;

▷ pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, nous avons

$$\ell_i(M_\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i\sigma(j)},$$

et nous appuyons sur la bijectivité de σ pour affirmer que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad \delta_{i\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = \sigma^{-1}(i), \\ 0 & \text{sinon}, \end{cases}$$

et après la gestion toujours si délicieuse de nos « δ », il ne reste que

$$\ell_i(M_\sigma) = \delta_{ii} = 1.$$

▷ Soit maintenant $j \in [\![1, n]\!]$, nous avons cette fois

$$c_j(M_\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i\sigma(j)},$$

et il ne reste délicieusement que

$$c_j(M_\sigma) = \delta_{\sigma(j)\sigma(j)} = 1.$$

La matrice M_σ est donc bien bistochastique. Poursuivons.

Soit i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Nous savons par définition que

$$(M_\sigma^{\mathsf{T}})_{ij} = (M_\sigma)_{ji} = \delta_{j\sigma(i)},$$

et par une simple pirouette bijective, il est très facile de relever que

$$\delta_{j\sigma(i)} = \delta_{i\sigma^{-1}(j)},$$

vu que

$$j = \sigma(i) \quad \Leftrightarrow \quad i = \sigma^{-1}(j).$$

Nous proposons donc $\tau = \sigma^{-1}$, et tout le monde est aux anges.

c. La première partie de la question n'est qu'une formalité qui se traduit d'ailleurs matriciellement par

$$M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma \circ \sigma'}.$$

La puissante et récente question *a* permet alors d'en déduire que

$$M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = I_n,$$

et une officielle nouveauté assure que cela suffit à prouver l'inversibilité de la matrice M_σ ainsi que l'égalité

$$(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}}.$$

d. Soit $\sigma \in S_n$. Nous avons appris à la récente *b* que

$$M_\sigma^{\mathsf{T}} = M_{\sigma^{-1}},$$

et compte tenu de ce qui précède cela devient

$$M_\sigma^{\mathsf{T}} = (M_\sigma)^{-1},$$

chronique d'une orthogonalité annoncée.

e. Le « exactement » impose une gestion de la chose en deux temps.

▷ Soit à nouveau $\sigma \in S_n$. Symbole de Konecker oblige, nous avons déjà aperçu que chaque ligne et chaque colonne de M_σ contiennent une fois le réel 1 et $n-1$ fois le réel 0.

▷ Considérons maintenant et réciproquement une matrice M de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ possédant cette propriété. Soit j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Nous définissons alors $\sigma(j)$ comme étant la « latitude » de l'unique 1 de la $j^{\text{ième}}$ colonne de M. Nous insistons sur le fait que chaque colonne de M ayant *un et un seul* 1, σ est une *genuine* application de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 165 13/10/2017 11:34

Nous allons maintenant montrer que σ est injective. Si par l'absurde elle ne l'est pas, il existe, dans $[\![1, n]\!]$ deux entiers *différents* i et j tels que

$$\sigma(i) = \sigma(j)$$

et grâce à la définition « *latitudinale* » de σ cela signifie que la ligne de numéro $\sigma(i)$ contient au moins deux « 1 » dont un est situé en longitude i et l'autre en longitude j. Cela fait évidemment désordre et σ est bel et bien injective. On rappelle alors un important résultat de la théorie des ensembles finis.

FINITUDE ET BIJECTIVITÉ

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini *et f une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même. On a alors les équivalences logiques*

$$f \text{ injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijective.}$$

Notre application σ est donc dorénavant une permutation de $[\![1, n]\!]$ et sa définition latitudinale fait précisément que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \qquad M_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Autant dire alors que

$$M = M_\sigma,$$

ce qui nous permet de changer de question.

10. Supposons que A et B soient deux éléments de A_n tels que

$$M_\sigma = \frac{A+B}{2},$$

ce qui se détaille en

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, n]\!], \qquad (M_\sigma)_{ij} = \frac{A_{ij} + B_{ij}}{2}.$$

Soit maintenant i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Il y a une évidente chose qui ne nous a pas servie jusqu'à présent et qui va avoir ici une effet fulgurant. En effet, pour des raisons d'éléments positifs et se sommes égales à 1, les entrées de toutes les matrices de A_n sont situées dans l'inénarrable $\mathfrak{I}$. Comme $(M_\sigma)_{ij}$ ne peut valoir que 0 ou 1, selon l'éternelle question 1, il est extrémal dans $\mathfrak{I}$, et comme A_{ij} et B_{ij} appartiennent à ce dernier, il advient que

$$A_{ij} = B_{ij}.$$

Autant dire alors que $A = B$ chronique d'une nouvelle extrémalité annoncée.

11.a. Un composée de deux permutations de S_n est bien sûr encore un élément de S_n et il s'ensuit déjà que φ_τ est donc une application de S_n dans lui-même. Considérons alors *manu militari* $\psi : \sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma$. C'est pour la même raison une application de S_n dans lui-même et c'est très mentalement qu'elle vérifie

$$\varphi_\tau \circ \psi = \psi \circ \varphi_\tau = \mathrm{Id}_{S_n}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 166 13/10/2017 11:34

Nul ne peut alors ignorer que cela entraîne la bijectivité de φ_τ.

La composition ayant de grandes vertus *distributives* nous avons maintenant

$$f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\tau \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau \circ \sigma},$$

la toute dernière égalité reposant la récente $9.c$. Le changement d'« indice »

$$\sigma' = \tau \circ \sigma$$

et la toute récente bijectivité font alors et très lumineusement que

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau \circ \sigma} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in S_n} f_{\sigma'} = p,$$

à telle enseigne qu'effectivement

$$f_\tau \circ p = p.$$

b. Toujours pour de distributives raisons, il ne fait aucun doute que

$$p^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma \circ p,$$

ce qui d'après la précédente, se transforme tour à tour en

$$p^2 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} p = \frac{1}{n!} \times n!\, p = p,$$

le texte ayant aimablement rappelé que le cardinal de S_n est $n!$.

d. L'égalité ensembliste va passer par une double inclusion.

▷ Supposons que x soit tel que

$$\forall \sigma \in S_n, \qquad f_\sigma(x) = x,$$

la définition de p et l'amabilité du cardinal font sans crier gare que

$$p(x) = x,$$

ce qui, vague histoire de faciès, montre que x appartient à $\operatorname{Im} p$.

▷ Supposons maintenant et réciproquement que x appartienne à l'image de p et annonçons $\sigma \in S_n$. Les liens indestructibles entre l'image d'un projecteur et l'ensemble de ses points fixes font que p fixe x et la récente égalité du a, en l'occurrence $f_\sigma \circ p = p$, nous amène au point x à

$$f_\sigma(x) = x$$

et tout le monde est charmé.

d. Nous procédons à nouveau en deux temps.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 167 13/10/2017 11:34

▷ Soit $\sigma \in S_n$, grâce à la linéarité et à la définition de f_σ, nous avons

$$f_\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_\sigma(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_{\sigma(i)},$$

et comme σ n'est qu'une permutation des entiers de $[\![1,n]\!]$, nous avons également

$$f_\sigma(x_0) = x_0.$$

Ainsi et depuis quelques secondes, x_0 appartient à $\operatorname{Im} p$ et par conséquent

$$\operatorname{Vect} x_0 \subset \operatorname{Im} p.$$

▷ Supposons, réciproquement, que x soit un élément de $\operatorname{Im} p$. Comme il est *a fortiori* élément de $\mathbb{R}^n$ et qu'une certaine base canonique traîne dans le passage, il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n.$$

Soit alors j appartenant à $[\![2,n]\!]$ et considérons la transposition $\sigma = \mathit{swap}(1,j)$, c'est-à-dire la permutation qui échange 1 et j et qui ne touche à rien d'autre. Nous avons alors sans conteste

$$f_\sigma(x) = a_1 e_j + \cdots + a_j e_1 + \cdots + a_n e_n,$$

les termes sa cachant derrière les « pointillés » ayant été épargnés par l'affaire. Comme il est écrit quelque part que $f_\sigma(x) = x$ et quand on sait à quoi servent les bases on revendique avec force

$$a_j = a_1,$$

et voilà donc *in fine* que

$$x = a_1(e_1 + \cdots + e_n) = a_1 x_0,$$

ce qui n'est pas pour nous défriser.

e. La transposition étant linéaire, nous avons déjà

$$P^{\mathsf{T}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_\sigma^{\mathsf{T}} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_{\sigma^{-1}},$$

la transposition des matrices de permutations ayant été gérée quelques lignes plus haut. Seulement voilà, la correspondance $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est aussi une bijection de S_n sur lui-même et par le même argument de changement d'indice que celui développé *supra* nous avançons que

$$P^{\mathsf{T}} = P.$$

La matrice P est donc désormais symétrique réelle et c'est assurément la matrice de p dans notre base canonique qui est officiellement *orthonormale*. L'importante caractérisation matricielle de la symétrie fait alors que p est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et le

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 168 13/10/2017 11:34

lecteur *aware* siat bien que les projecteurs symétriques sont exactement les projecteurs orthogonaux. On avance, on avance !

Quand on sait ce sur quoi les projecteurs projettent, on doit deviner, depuis le récent d, que p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}\, x_0$, et c'est ici que nous allons apprécier une nouveauté officielle que l'on pourrait appeler « matrices de projecteurs orthogonaux et bases orthonormales ». Dans ce qui suit, nous appliquons tout simplement un protocole de cours auquel le lecteur dubitatif est chargé de se reporter. Nous le déroulons par étapes.

▷ Une base orthonormale de $\mathrm{Vect}\, x_0$ est bien évidemment constituée du seul vecteur

$$u = \frac{x_0}{\sqrt{n}}\cdot$$

▷ Le vecteur colonne associé à ce dernier dans la base canonique est tranquillement

$$U = \frac{X_0}{\sqrt{n}}$$

la colonne X_0 ayant été croisée lors de la huitième question.

▷ Il faut alors officiellement savoir que

$$P = U \cdot U^{\mathsf{T}},$$

et l'on en déduit *de memoria* que

$$P = \frac{J_n}{n},$$

où J_n est la retentissante matrice (n, n) dont les entrées sont toutes égales à 1.

f. Mis à part, pour ceux — ou celles ! — qui souffrent de diplopie aiguë, notre réponse sera à jamais *no comment !*

12.*a*. Le produit $M^{\mathsf{T}} \cdot N$ manifestement carré (n, n) est assuré de laisser une trace derrière lui et, *via* l'éternelle formule du produit matriciel, il ne nous échappe pas que :

$$\mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} \cdot N) = \sum_{i=1}^{n} (M^{\mathsf{T}} \cdot N)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M^{\mathsf{T}}_{ij} N_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji} \qquad (1)$$

la dernière égalité procédant d'une adorable gestion de transpositition.

b. En prenant juste un tout petit peu d'avance, nous notons $(\mid)$ l'application en question et nous allons nous y prendre en quatre points.

▷ La précédente question montre déjà que $(\mid)$ est une *genuine* application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

▷ Vu la toute proche égalité (1), la symétrie de $(\mid)$ ne pose aucun problème.

▷ Soit M un élément de E fixé. La linéarité de

$$N \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji}$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 169 13/10/2017 11:34

découle très naturellement de celle de la sommation.

▷ Soit M une matrice *non nulle* de E. Toujours grâce à la très pratique formule (1), nous avons :

$$(M \mid M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji}^2$$

Il s'agit d'une somme de réels positifs *non tous nuls* et nous ne craignons donc pas d'affirmer que :

$$(M \mid M) > 0$$

↱ *This scalar product* s'appelle produit scalaire de Schur-Hilbert-Schmidt. D'aucuns le qualifient également de produit scalaire canonique sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. La raison en est que si nous rangeons dans une seule et même colonne les n^2 éléments d'une matrice carrée réelle d'ordre n, la formule (1) stipule que $(\mid)$ n'est rien d'autre que le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et cela aurait d'ailleurs pu constituer une preuve pour le moins solide de la présente question…

↱ Précisons, juste pour enfoncer le clou que nous avons le choix entre

$$(M \mid N) = \mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} \cdot N) \quad \text{et} \quad (M \mid N) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji} N_{ji},$$

ainsi qu'entre

$$\|M\|_2^2 = \mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} \cdot M) \quad \text{et} \quad \|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ji}^2,$$

la dernière version exhibant la somme des carrés des entrés de la matrice M.

c. C'est par exemple *orthogonalement*(*) que nous avons *alternately*

$$\|M_\sigma\|_2^2 = \mathrm{tr}\left(M_\sigma^{\mathsf{T}} \cdot M_\sigma\right) = \mathrm{tr}\left(M_\sigma^{-1} \cdot M_\sigma\right) = \mathrm{tr}\, I_n = n,$$

et nous en déduisons que

$$\|M_\sigma\|_2^2 = \sqrt{n}.$$

d. On trouve assez facilement que

$$M_\alpha - M_\beta = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \alpha - \beta \end{bmatrix},$$

et nous optons ici pour la somme des carrés des entrées, à telle enseigne que

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2^2 = 4(\alpha - \beta)^2.$$

(*) On aurait pu, tout aussi bien, passer également par la somme des carrés des entrées conformément à la remarque précédente.

Après avoir échappé au piège le plus sournois de la fin du collège(*), nous terminons notre calcul en beauté sur

$$\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2|\alpha - \beta|.$$

Comme il ne fait aucun doute que

$$-1 \leqslant \alpha - \beta \leqslant 1,$$

il s'avère que $|\alpha - \beta| \leqslant 1$, et 1 majore déjà l'ensemble

$$\{|\alpha - \beta| \mid (\alpha, \beta) \in \mathfrak{I}^2\},$$

et à simplement regarder la situation $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, ce majorant est atteint et tout le monde sait qu'un majorant atteint est un *maximum*. Bref

$$\max_{(\alpha,\beta)\in\mathfrak{I}^2} \|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2,$$

ce qui devrait s'écrire

$$\delta(A_2) = 2.$$

↱ Le sup du diamètre qui généralement n'est qu'une borne supérieure, est ici un maximum et cela vaut bien la peine d'être souligné.

e. Nous avons déjà signalé que les entrées des matrices de A_n appartiennent à l'omniprésent $\mathfrak{I}$ et par conséquent, pour chaque couple (i, j), l'on a $M_{ij}^2 \leqslant M_{ij}$ de sorte que

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ji}^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ji}.$$

Seulement voilà, le *physio* rétorque que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ji} = \sum_{i=1}^n c_j(M) = \sum_{i=1}^n 1 = n,$$

et nous passons à la suivante.

f. Soit M et N deux matrice appartenant à A_n. D'après la formule d'Al Kashi, il apparaît déjà que

$$\|M - N\|_2^2 = \|M\|_2^2 - 2\,(\,M \mid N\,) + \|N\|_2^2.$$

La positivité de nos fameuses entrées révélant que

$$(\,M \mid N\,) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ji} N_{ji} \geqslant 0,$$

(*) Le piège le plus redoutable — et redouté — de la classe de troisième. Combien de potaches ont foiré leur brevet des collèges pour avoir naïvement cru que, pour x réel, $\sqrt{x^2} = x$ alors qu'en réalité $\sqrt{x^2} = |x|$?

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 171 13/10/2017 11:34

nous déduisons que

$$\|M - N\|_2^2 \leqslant \|M\|_2^2 + \|N\|_2^2,$$

et c'est ainsi grâce à la précédente que

$$\|M - N\|_2^2 \leqslant 2n.$$

Il reste alors à prendre les carrés par la racine…

g. Soit τ un élément de S_n quelconque pour l'instant. Nous avons déjà été informés de

$$(M_\sigma \mid M_\tau) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{j\sigma(i)} \delta_{j\tau(i)},$$

et il suffit de mettre en place une permutation τ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \tau(i) \neq \sigma(i),$$

pour exiger la victoire ! Le lecteur assidu vérifiera aisément que la *shifted* τ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \tau(i) = \begin{cases} \sigma(i+1) & \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \sigma(1) & \text{si} \quad i = n, \end{cases}$$

fait *farpaitement* l'affaire.

h. La récente question f est là pour nous persuader que le réel $\sqrt{2n}$ est un majorant de l'ensemble

$$\{\|M - N\|_2 \mid (M, N) \in A_n^2\}.$$

Soit alors σ appartenant à S_n et choisissons τ comme il est dit dans la question précédente. Selon le théorème de Pythagore, nous avons

$$\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = \|M_\sigma\|_2^2 + \|M_\tau\|_2^2 = 2n,$$

la dernière égalité reposant sur la toute proche question c. Notre majorant *supra* est donc atteint sur le couple (M_σ, M_τ) qui appartient bien à A_n^2 depuis une certaine question $9.b$. Nous avons donc établi que

$$\max_{(M,N) \in A_n^2} \|M - N\|_2 = \sqrt{2n},$$

c'est-à-dire

$$\delta(A_n) = \sqrt{2n},$$

la remarque concernant les acolytes sup et max étant encore une fois d'actualité. Notons pour finir qu'il est écrit que

$$\delta(A_n) = \|M_\sigma - M_\tau\|_2,$$

et qu'une très vieille question, en l'occurrence la 7, stipule alors que M_σ est extrémal. Nous retrouvons ainsi, par une bien jolie méthode, l'extrémalité des matrices de permutation.

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 172 13/10/2017 11:34

13.a. Il suffit d'observer visuellement que

$$F_n = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \ell_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} c_j\right),$$

et de ne pas avoir égaré qu'une intersection de sous-espaces vectoriel…

b. Nous mettons en place ici une notion qui va nous être utile par la suite. Soit A une matrice carrée d'ordre $n-1$. On souhaite la *border* par une colonne de hauteur n et une ligne de largeur n pour obtenir une matrice (n,n) « genre »

$$B = \begin{bmatrix} & & * \\ & A & \vdots \\ * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

appartenant au fameux F_n. La solution est simple puisqu'il suffit *de visu* de définir

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad B_{i,n} = -\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij} \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, n-1]\!], \quad B_{n,j} = -\sum_{i=1}^{n-1} A_{ij},$$

en priant, cependant pour que le *gugus* en bas à droite, en l'occurrence B_{nn}, ne soit pas trop dans le *mood !* On peut avoir en effet et de façon louable une légère angoisse car B_{nn} a deux contraintes à repecter qui sont

$$B_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} B_{in} \quad \text{et} \quad B_{nn} = -\sum_{j=1}^{n-1} B_{nj},$$

et qui n'ont pas intérêt à être antinomiques ! Seulement voilà, la chance est décidément de notre côté puisque, inversion des sommations oblige, on a

$$-\sum_{i=1}^{n-1} B_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} B_{nj} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}.$$

La matrice B sera notée *bord*(A) et nous pouvons maintenant reprendre notre activité.

Il y a plusieurs points à mettre en avant et nous y allons sagement.

▷ À bien y regarder Φ applique ouvertement F_n dans $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, et sa linéarité n'est qu'une mince affaire de définition des opérations — addition et multiplication par un scalaire — sur les matrices.

▷ Définissons alors Ψ sur $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ par

$$\forall A \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \qquad \Psi(A) = \textit{bord}(A).$$

Nous nous sommes décarcassés pour que Ψ applique $\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ dan F_n et sa linéarité ne mérite pas beaucoup plus d'égards que celle de sa cousine Φ.

▷ Ensuite et parce que nous avons tout fait pour — on borde, on déborde ! — il est manifeste que

$$\Phi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{F_n} \quad \text{et} \quad \Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{R})},$$

chronique d'une bijectivité — et donc d'une isomorphie — totalement annoncées.

Lorsque deux espaces vectoriels sont isomorphes ils ont la même dimension et quand l'on connaît parfaitement ses classiques on doit asséner

$$\dim F_n = (n-1)^2.$$

14.*a*. À très bien y regarder, la première partie a révélé que les points extrémaux de A_2 sont exactement

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

qui sont d'authentiques matrices de permutation.

b. Nous nous permettons une remarque liminaire à propos de ces matrices élémentaires appelées aussi « unités matricielles » du format (n, n). Il est bien connu qu'elles forment une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ appelée d'ailleurs base canonique et que

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} E_{ij}.$$

En outre, parce que les couples (i_k, j_k) sont deux à deux distincts, la famille

$$(E_{i_k j_k})_{k \in [\![1,2n]\!]}$$

est une sous-famille de la base canonique et hérite ainsi d'une réelle liberté. Enfin et parce que nous savons compter, nous en déduisons que

$$\dim H = 2n.$$

Nous pouvons maintenant retourner à nos moutons.

Supposons par l'absurde que

$$H \cap F_n = \{0\}.$$

Les deux sous-espaces vectoriels H et F_n seraient donc en somme directe et l'on aurait

$$\dim H + \dim F_n = \dim(H \oplus F_n) \leqslant \dim \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

l'inégalité procédant de l'incontournable théorème du sous-espace. Seulement voilà, étant donné notre liminaire remarque

$$\dim H + \dim F_n = 2n + (n-1)^2 = n^2 + 1$$

ce qui dépasse un peu trop la dimension n^2 de notre cher $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$…

c. La question est un peu sévère !

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 174 13/10/2017 11:34

$\triangleright$ On commence par noter que, vu la linéarité des ℓ_i et autres c_j, on a pour n'importe quelle valeur de t et n'importe quelle valeur de i et j,

$$\ell_i(Q_t) = 1 \quad \text{et} \quad c_j(Q_t) = 1,$$

puisque M appartient à A_n et que N se pavane dans F_n. Ce ne sont donc pas les sommes *ad hoc* égales à 1 qui posent problème pour l'appartenance de Q_t à A_n et c'est donc la positivité des $(Q_t)_{ij}$ qui est au cœur du débat que nous allons animer sur-le-champ.

$\triangleright$ Les origines de la matrice N font aussi qu'elle est non nulle et qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ tels que

$$N = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k E_{i_k j_k},$$

et pour virer les « 0 » inutiles et indésirables nous pouvons à loisir considérer l'ensemble ouvertement non vide

$$K = \{k \in [\![1, 2n]\!] \mid \alpha_k \neq 0\},$$

à telle enseigne que, pour n'importe quelle valeur de t

$$Q_t = M + t \sum_{k \in K} \alpha_k E_{i_k j_k}.$$

Il est alors temps de s'organiser un peu en n'oubliant pas le fonctionnement de ces fameuses unités matricielles. Soit (i, j) un couple d'éléments de $[\![1, n]\!]$.

$\triangleright$ Si (i, j) n'est *pas* l'un des couples (i_k, j_k) où $k \in K$, il est absolument lumineux que

$$(Q_t)_{ij} = M_{ij}$$

dont la positivité large est à l'ordre du jour depuis la genèse !

$\triangleright$ En revanche, si le couple (i, j) est l'un des (i_k, j_k) en question, on a

$$(Q_t)_{i_k j_k} = M_{i_k j_k} + t\alpha_k,$$

en ayant rappelé, malgré l'heure tardive et parce qu'il faut toujours s'accrocher, que

$$M_{i_k j_k} > 0 \quad \text{et} \quad \alpha_k \neq 0.$$

Voici alors un gentil résultat annexe et anodin.

UN LEMME TAQUIN

Soit a un réel strictement positif, b un réel non nul et t un réel quelconque. On a l'implication

$$|t| < \frac{a}{|b|} \quad \Rightarrow \quad a + tb > 0.$$

Pour gérer parfaitement les nombreux k en question, nous proposons

$$\epsilon = \min_{k \in K} \frac{M_{i_k j_k}}{|\alpha_k|},$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 175 13/10/2017 11:34

qui est un authentique réel strictement positif et, minimum oblige, si $|t| < \epsilon$, le lemme taquin nous garantit toutes les positivités espérées !

↱ Nous vous avions prévenu…

d. Choisissons, parce qu'il y a la place, un réel t *non nul* dans l'ouvert $]-\epsilon, \epsilon[$. Son compère $-t$ appartient également à cet ouvert et les matrices Q_t et Q_{-t} sont donc déjà dans A_n. Nous avons en outre et trivialement

$$M = \frac{Q_t + Q_{-t}}{2},$$

alors que les matrices Q_t et Q_{-t} sont différentes puisque t et N sont non nuls.

Pour une extrémale, cela est une *énaurme* contradiction !

e. Supposons par l'absurde que *toutes* les colonnes aient au moins deux termes non nuls. À bien y compter, cela en ferait au moins $2n$ dans le carré, ce qui est définitivement exclu. Il existe donc au moins une colonne ayant *au plus* un élément non nul et comme la somme des éléments de cette colonne doit valoir 1…

f. La somme des éléments de la $r^{\text{ième}}$ ligne de M vaut aussi 1 et comme $M_{rs} = 1$ prend toute la place, les autres n'ont plus que Lisieux pour pleurer !

g. La matrice M a donc dorénavant le *look*

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} & & & 0 & & & \\ & A_1 & & \vdots & & A_2 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & A_3 & & \vdots & & A_4 & \\ & & & 0 & & & \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ s & \end{array}$$

et la compagne M' est donc

$$M' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

C'est alors en gardant un œil sur M et l'autre sur M' qu'il apparaît, intelligiblement, que la matrice M' appartient à A_{n-1}, quelques entrées nulles idéalement placées ayant eu, quelque part, leur pesant d'arachide. Il reste maintenant à parler d'extrémalité.

Soit donc H' et K' deux matrices appartenant à A_{n-1} vérifiant

$$M' = \frac{H' + K'}{2}.$$

On découpe H' et K' en blocs de quatre suivant le patron de la découpe de la matrice M' et leurs nouvelles écritures ont alors le genre

$$H' = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K' = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix}.$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 176 13/10/2017 11:34

On leur fait naturellement correspondre les matrices

$$H = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & H_1 & \vdots & H_2 & \\ & & 0 & & \\ 0 & \cdots \quad 0 & 1 & 0 \quad \cdots & 0 \\ & & 0 & & \\ & H_3 & \vdots & H_4 & \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & K_1 & \vdots & K_2 & \\ & & 0 & & \\ 0 & \cdots \quad 0 & 1 & 0 \quad \cdots & 0 \\ & & 0 & & \\ & K_3 & \vdots & K_4 & \\ & & 0 & & \end{bmatrix},$$

qui, à la surprise générale, et les yeux dans les clous, appartiennent à A_n et vérifient aisément

$$M = \frac{H+K}{2}\cdot$$

Comme M est par essence extrémale, on déduit que $H = K$, et il en résulte dans la foulée que

$$H' = K'.$$

h. L'hypothèse de récurrence stipule que M' est une matrice de permutation, et depuis la question 9.e elle ne présente ainsi sur chaque ligne et chaque colonne qu'un seul 1 les autres éléments étant nuls. Les liens étroits entre M et M' que nous remettons en lumière *via*

$$M = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & A_1 & \vdots & A_2 & \\ & & 0 & & \\ 0 & \cdots \quad 0 & 1 & 0 \quad \cdots & 0 \\ & & 0 & & \\ & A_3 & \vdots & A_4 & \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix},$$

font alors et *de visu*, qu'il en est de même de la matrice M et la question 9.e est sollicitée une dernière fois.

↱ Nous avons ainsi magistralement établi que les points extrémaux de A_n sont, *exactement*, les matrices de permutation. Ce célèbre résultat est dû au mathématicien américain Garrett Birkhoff et date de 1946.