CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à ESSEC Business School.*

Soit $k \in \mathbb{N}$. C'est un peu vexant — voire déshonorant ! — de donner à $\mathcal{C}^k\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ le simple titre *d'ensemble* alors qu'il est en réalité beaucoup plus que cela. Il s'agit en effet d'un *espace vectoriel* réel, sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{[0,1]}$ de toutes les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et sur une carte de visite cela change tout.

En outre, ces sous-espaces sont, un peu comme les poupées russes, emboîtés les uns dans les autres en ce sens que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathcal{C}^{k+1}\big([0,1],\mathbb{R}\big) \subset \mathcal{C}^k\big([0,1],\mathbb{R}\big)$$

ces inclusions étant d'ailleurs *strictes* comme le rappelle la culture de *classe* que doit posséder tout un chacun. Nous ne le répéterons plus !

Introduction

1.*a*. Nous allons naturellement utiliser la méthode du plongement. Il est bien connu que dans cette perspective plus on *zoome*, moins il y a de travail et c'est la raison pour laquelle et si cela ne dérange personne bien sûr, nous allons plutôt établir que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. *Here we go !*

– Le plongement

$$F(q) \subset \mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$$

semble faire partie de la définition du *left hand side*, alors que le *right* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel puisque nous venons à l'instant de le mettre en avant.

– La fonction nulle appartient ouvertement à $F(q)$ et ce dernier n'a donc plus peur du vide.

– Soit f et g deux éléments de $F(q)$ et λ un nombre réel. La linéarité de la dérivation seconde assurant que

$$(f+\lambda g)'' = f'' + \lambda g''$$

c'est alors sans aucune difficulté que l'on parvient à

$$(f+\lambda g)'' = q(f+\lambda g)$$

et $F(q)$ est définitivement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et comme disent les poupées russes, il l'est *a fortiori* de $\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ puisque tel est le bon vouloir du texte.

b. Nous devons impérativement nous organiser en deux temps.

– Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et t un élément de ce dernier. Au vu et au su de ce qui a été supposé de la fonction q et des *généreux* théorèmes généraux, la fonction

$$u \longmapsto (t-u)q(u)f(u)$$

est assurément continue sur le segment $[0,t]$ ce qui, depuis la classe de terminale scientifique, oblige l'existence de son intégrale sur le dit segment. Il en résulte alors déjà que $\Phi(f)$ est une *application* de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, mais l'affaire est loin d'être terminée puisque nous devons dorénavant causer de continuité. Les *aficionados* des fonctions dites « définies par une intégrale » — les fameuses *dpi* pour les intimes — savent qu'il faut être très prudent puisque notre *dpi* $\Phi(f)$ comporte la variable t à l'intérieur de l'intégrande et que, pauvre préparationnaire que nous sommes, nous ne disposons d'*aucun* théorème général donnant un accès direct à la classe de $\Phi(f)$. Il est d'ailleurs fortement déconseillé d'en inventer !

La seule façon de s'en sortir est de remarquer que, très linéairement, l'on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad \Phi(f)(t) = t\int_0^t q(u)f(u)du - \int_0^t u\,q(u)f(u)du \tag{1}$$

et que le fameux « t » qui était *inside* est désormais passé *outside* ce qui arrange bien nos affaires. En effet, grâce au théorème de Gaston Darboux et aux continuités des unes et des autres nous sommes en mesure de clamer que les deux applications

$$t \longmapsto \int_0^t q(u)f(u)du \quad \text{et} \quad t \longmapsto \int_0^t u\,q(u)f(u)du$$

sont, sur l'intervalle $[0,1]$, des *primitives* respectives des applications continues

$$u \longmapsto q(u)f(u) \quad \text{et} \quad u \longmapsto u\,q(u)f(u)$$

Primitives de fonctions continues sur $[0,1]$ obligent, il s'agit d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ ce qui, *via* l'égalité (1), permet de revendiquer *généreusement* la classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ de $\Phi(f)$. Cette dernière est donc *a fortiori* continue sur notre segment et par conséquent Φ applique bien $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ dans lui-même.

– Quant à la linéarité de Φ, elle se déduit mentalement de celle de l'intégration et nous pouvons donc passer à la suite.

↱ Nous rappelons que, pour démontrer que *machin* est une application linéaire de *truc* dans *chose*, il est nécessaire de procéder en deux temps :

– il faut *impérativement* commencer par démontrer que *machin* applique véritablement *truc* dans *chose* ;

– il faut *ensuite* établir la linéarité de *machin*.

La faute grave la plus fréquente consiste à *zapper* le côté « application » et à ne traiter que la linéarité et si l'on en croit ce qui vient de se passer — 25 lignes pour établir le côté application contre une misérable ligne pour la linéarité — on imagine bien le nombre de points récoltés…

Il existe aussi des genres de gougnafiers qui traitent l'aspect « application » *après* la linéarité ! Quelle détresse…

c. Soit à nouveau f une fonction continue sur $[0,1]$. Nous venons grâce à l'égalité (1) de justifier déjà la classe $\mathcal{C}^1$ de f et comme la dérivation des primitives n'est pas plus difficile à réaliser que la quadrature du carré, l'on trouve aisément que

$$\forall t \in [0,1] \qquad \big[\Phi(f)\big]'(t) = \int_0^t q(u)f(u)du + tq(t)f(t) - tq(t)f(t)$$

ce qui après une belle simplification se décline en

$$\forall t \in [0,1] \qquad \big[\Phi(f)\big]'(t) = \int_0^t q(u)f(u)du$$

Cela démontre que $\big[\Phi(f)\big]'$ est précisément la première des deux primitives rencontrées quelques lignes plus haut et voilà donc que $\big[\Phi(f)\big]'$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Autant dire alors que $\Phi(f)$ est effectivement de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ et que, dérivée de primitive *again*, l'on a

$$\forall t \in [0,1] \qquad \big[\Phi(f)\big]''(t) = q(t)f(t)$$

ce qui peut également et fonctionnellement s'écrire

$$\big[\Phi(f)\big]'' = qf$$

d. Soit encore f une application continue sur $[0,1]$. Le « si, et seulement si » nous oblige à une organisation en aller-retour. *Here we go !*

- Supposons tout d'abord que

$$\Phi(f) = f$$

Ce que nous venons d'apprendre à l'instant à propos de la classe de $\Phi(f)$ et de ses deux premières dérivées se transmet donc à f qui se voit donc contrainte à la classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ ainsi qu'à l'égalité

$$f'' = qf$$

et voilà donc déjà que f appartient à $F(q)$. En outre, en ouvrant grand les mirettes, et en profitant des expressions de $\Phi(f)$ et de sa dérivée première, il apparaît lumineusement que

$$\Phi(f)(0) = \big[\Phi(f)\big]'(0) = 0$$

informations qui elles aussi se transmettent dans la foulée à f. *So...*

- Supposons réciproquement que

$$f \in F(q) \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

et annonçons un réel t dans le segment $[0,1]$. Comme f est par hypothèse de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ elle l'est, *a fortiori*, sur le segment $[0,t]$ et nous avons alors tout loisir de lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre 0 et t. *This exactly yields*

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \int_0^t (t-u)f''(u)du$$

égalité qui, *because*

$$f'' = qf \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

se métamorphose en

$$f(t) = \int_0^t (t-u)q(u)f(u)du$$

Cette égalité permet au *physio* de revendiquer

$$f(t) = \Phi(f)(t)$$

et comme cela vaut pour *tous* les réels t de $[0,1]$…

↱ À bien y regarder, nous venons d'établir que

$$\mathrm{E}_1(\Phi) = \left\{ f \in F(q) \ \mid \ f(0) = f'(0) = 0 \right\}$$

Affaire à suivre…

2. Nous remarquons juste pour causer que *due to the ambiant endomorphie* la suite (f_n) est parfaitement définie et que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n = \Phi^n(f)$$

a. Nous allons procéder par induction sur n.

• L'initialisation ne devrait pas poser de réel problème puisque, *maximalement*, il ne fait aucun doute que

$$\forall t \in [0,1] \qquad \left|f(t)\right| \leqslant \|f\|_\infty$$

• Supposons désormais que, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'on ait

$$\forall u \in [0,1] \qquad \left|f_n(u)\right| \leqslant \|q\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{u^n}{n!}$$

et annonçons $t \in [0,1]$ à telle enseigne que

$$f_{n+1}(t) = \int_0^t (t-u)q(u)f_n(u)du$$

Vu l'idéale position des bornes d'intégration, l'inégalité du triangle dégage déjà la majoration

$$\left|f_{n+1}(t)\right| \leqslant \int_0^t (t-u)\left|q(u)\right|\left|f_n(u)\right|du$$

puisque, *as usual*, les quantités déjà positives sont dispensées de valuation. Nous mettons alors en avant les points suivants :

– c'est encore une fois très *maximalement* que nous avons

$$\forall u \in [0,t] \qquad \left|q(u)\right| \leqslant \|q\|_\infty$$

– c'est ensuite l'hypothèse de récurrence qui prend le relais et qui livre sur un plateau

$$\forall u \in [0,t] \qquad \left|f_n(u)\right| \leqslant \|q\|_\infty^n \|f\|_\infty \frac{u^n}{n!}$$

– il ne fait aucun doute que

$$\forall u \in [0,t] \qquad 0 \leqslant t-u \leqslant 1$$

– les bornes de l'intégrale n'ont pas changé d'âne.

C'est cette fois grâce à la croissance et à la linéarité de l'intégration que nous en déduisons l'inégalité

$$\int_0^t (t-u)\big|q(u)\big|\big|f_n(u)\big|du \leqslant \|q\|_\infty^{n+1}\|f\|_\infty \int_0^t \frac{u^n}{n!}du$$

et l'affaire se termine alors transitivement grâce à un mental calcul d'intégrale laissé à la sagacité du valeureux lecteur.

↱ Indiquons cependant que le calcul en question utilise fortement la *stricte* positivité avérée du nombre $n+1$ qui autorise d'une part sa présence au dénominateur ainsi que l'égalité(*)

$$0^{n+1} = 0$$

b. Soit t appartenant à $[0,1]$. En liaison avec l'étude des séries exponentielles, le potache de première année a obligatoirement rencontré la limite

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et comme $\|f\|_\infty$ n'est qu'une misérable constante, il ne peut s'opposer à

$$\|f\|_\infty \frac{\left(\|q\|_\infty t\right)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le reste n'est alors qu'une histoire de *squeezing process*

c. Selon la récente question $1.d$ il revient au même de supposer que

$$\Phi(f) = f$$

d'où l'on déduit officiellement et sans autre forme de procès que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n = \Phi^n(f) = f$$

La conclusion de la précédente devient donc ici

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il en ressort évidemment que

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t) = 0$$

puisque les suites *constantes* de limite nulle…

↱ En tenant compte de la remarque que nous avons faite à l'issue de la question $1.d$ voilà donc que

$$\mathsf{E}_1(\Phi) = \{0\}$$

(*) Il faut toujours se méfier comme de la peste des sournois 0^0 qui peuvent parfois polluer certains calculs !

et nous apprenons ainsi que 1 n'est pas une valeur propre de l'endomorphisme Φ.

d. Organisons-nous *un poquitín*.

– Soit f appartenant à $F(q)$. Vu la classe des éléments de ce dernier, le couple

$$\big(f(0), f'(0)\big)$$

est totalement d'actualité et il appartient ouvertement à $\mathbb{R}^2$. Autant dire déjà que Δ applique bien $F(q)$ dans $\mathbb{R}^2$.

– La linéarité de Δ repose principalement sur celle de la dérivation et accessoirement sur les *définitions* des opérations sur les fonctions.

– Soit f un élément du noyau de Δ. Cela ne signifie ni plus ni moins que

$$f \in F(q) \quad \text{et} \quad f(0) = f'(0) = 0$$

La précédente oblige alors $f = 0$, chronique d'une injectivité annoncée…

En ce qui concerne le « que peut-on en déduire » nous nous proposons de jouer aux devinettes en demandant à notre sagace lecteur de choisir entre

$$\dim F(q) = \pi \quad \text{ou} \quad \dim F(q) \leqslant 2$$

en pensant à un certain théorème de monsieur *durang*…

Partie 1

3. À bien y regarder, il semble bien que

$$\mathsf{E}_a(\omega) = \Big\{ f \in F(-a\omega) \ \big| \ f(0) = f(1) = 0 \Big\}$$

a. C'est un peu comme au 1.*a*. On montre en réalité — *zoom, zoom !* — que $\mathsf{E}_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $F(-a\omega)$ et on joue encore aux poupées russes. Nous laissons au dévoué lecteur le soin de se charger de l'intendance.

b. Soit f appartenant à $\mathsf{E}_0(\omega)$. Nous avons par définition

$$\forall t \in [0,1] \qquad f''(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0$$

Comme $[0,1]$ est un *intervalle* de $\mathbb{R}$, la première partie de cette propriété entraîne tout d'abord que f' est constante d'où il ressort que f est affine. La seconde partie révèle quant à elle que notre fonction affine s'annule deux fois ce qui ne lui laisse que peu d'avenir… Nous avons fatalement

$$f = 0$$

Comme $\mathsf{E}_0(\omega)$ est un espace vectoriel, il contient bien sûr la fonction nulle et le résultat des courses est ainsi

$$\mathsf{E}_0(\omega) = \{0\}$$

4. Comme il va être fortement question de l'espace vectoriel $F(-a)$, nous nous permettons une petite digression. Soit f un élément de $F(-a)$. Il s'agit, *a priori*, d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui vérifie

$$f'' = -af$$

genre d'équation différentielle qui va totalement emballer l'affaire. En effet, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, il en est de même de f'' et voilà donc que f est de classe $\mathcal{C}^4$. C'est reparti pour un tour puisque f'' est alors de classe $\mathcal{C}^4$ ce qui procure à f la classe $\mathcal{C}^6$ *and so one…* De la à en déduire que f est en réalité de classe $\mathcal{C}^\infty$ il n'y a qu'un tout petit pas, certes inductif mais cependant mental, que nous franchissons allégrement.

Comme $f'' = -af$, il est désormais possible d'en déduire que

$$f''' = -af'$$

ce qui montre que f' est également élément de $F(-a)$. Comme la dérivation D est bien connue pour sa sempiternelle linéarité, nous déduisons de tout cela que D est un endomorphisme de l'espace vectoriel $F(-a)$ et nous arrêtons là nos tergiversations !

a. Supposons $a < 0$. Si cela ne dérange personne, nous noterons e_a et ϵ_a les deux fonctions en question et nous signalons tranquillement que leur appartenance à $F(-a)$ n'est qu'une pure formalité les essentielles raisons étant les égalités

$$D(e_a) = \sqrt{-a}e_a \quad ; \quad D^2(e_a) = -ae_a \quad \text{et} \quad D(\epsilon_a) = -\sqrt{-a}\epsilon_a \quad ; \quad D^2(\epsilon_a) = -a\epsilon_a$$

Le point clé concerne maintenant la famille fonctionnelle (e_a, ϵ_a) qui selon la première et la troisième des quatre égalités précédentes est ouvertement formée de vecteurs propres de la dérivation D attachés aux valeurs propres respectives

$$\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad -\sqrt{-a}$$

qui sont pour le moins *différentes* vu que a est ici *strictement* négatif. Un superbe théorème officiel assure que notre famille est *libre* et par conséquent

$$\dim F(-a) \geqslant 2$$

alors qu'il a été récemment découvert — question 2.d — que

$$\dim F(-a) \leqslant 2$$

Il s'avère en bref que $F(-a)$ est un *plan vectoriel* et que (e_a, ϵ_a) en est une base, en remerciant au passage le théorème de caractérisation des bases en dimension finie. On peut dorénavant résumer cette belle histoire *via* la *basique* présentation

$$F(-a) = \operatorname{Vect}(e_a, \epsilon_a)$$

Nous pouvons maintenant poursuivre.

Soit f appartenant à $\mathsf{E}_a(1)$. Cette fonction appartient aussi par définition à $F(-a)$ et, base oblige, il existe deux réels λ et μ tels que

$$f = \lambda e_a + \mu \epsilon_a$$

Il est également dit que f s'annule en zéro et en un et cela se traduit par le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda e^{\sqrt{-a}} + \mu e^{-\sqrt{-a}} = 0 \end{cases}$$

Comme a est différent de zéro ce système est mentalement(*) de Cramer et fatalement

$$\lambda = \mu = 0$$

Autant dire alors que f est nulle et comme l'autre inclusion est *vectoriellement* triviale *the conclusion is*

$$\mathsf{E}_a(1) = \{0\}$$

b. Supposons $a > 0$. Nous notons cette fois c_a et s_a les deux applications concernées. Elles appartiennent bien à $F(-a)$ la pricipale raison reposant ici sur les égalités

$$D^2(c_a) = -ac_a \quad \text{et} \quad D^2(s_a) = -as_a$$

Pour ne pas changer une équipe qui gagne nous aimerions empocher la liberté de la sainte famille (c_a, s_a) mais le superbe argument de la précédente tombe à l'eau ! Il s'agit certes de deux vecteurs propres de D^2 mais associés à la *même* valeur propre…

Nous devons donc procéder autrement et pourquoi pas *via* la définition. Supposons donc que α et β soient deux réels vérifiant

$$\alpha c_a + \beta s_a = 0 \tag{TL}$$

– on évalue (TL) en zéro, on obtient $\alpha = 0$ et le test de liberté devient

$$\beta s_a = 0$$

– on évalue maintenant en $\pi/(2\sqrt{a})$ et voilà que β est également nul.

Grâce à cette providentielle liberté, l'on démontre *mutatis mutandis* que

$$F(-a) = \mathsf{Vect}\,(c_a, s_a)$$

et nous pouvons alors poursuivre.

Soit f appartenant à $\mathsf{E}_a(1)$. Il existe comme *supra* deux réels, mettons encore λ et μ, tels que

$$f = \lambda c_a + \mu s_a$$

et il est dit derechef que f doit s'annuler en zéro et en un, ce qui se traduit ici simplement par

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mu \sin\sqrt{a} = 0$$

Dans ces circonstance, nous avons de deux choses l'une :

– ou bien $\sin\sqrt{a}$ n'est pas nul auquel cas $\mu = 0$, puis

$$f = 0$$

(*) Que vaut le déterminant de ce système linéaire ?

et l'on déduit alors que

$$\mathrm{E}_a(1) = \{0\}$$

vu que l'autre inclusion…

– ou bien $\sin\sqrt{a}$ est nul et nous apprenons alors bêtement que

$$f \in \operatorname{Vect} s_a$$

Dans ce deuxième cas nous avons ainsi

$$\mathrm{E}_a(1) \subset \operatorname{Vect} s_a$$

et nous laissons au dévoué lecteur le soin de vérifier très tranquillement l'autre inclusion à telle enseigne qu'*in fine*

$$\mathrm{E}_a(1) = \operatorname{Vect} s_a$$

Nous rappelons pour finir que les points d'annulation de la fonction $\sin$ sont *exactement* les $k\pi$ où k est un entier, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{Z}$.

On peut donc reformuler nos conclusions en termes de « *nature* » en assénant que

$$\mathrm{E}_a(1) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad \sqrt{a}/\pi \ \text{ n'est pas un entier.} \\ \operatorname{Vect} s_a & \text{si} \quad \sqrt{a}/\pi \ \text{ est un entier.} \end{cases}$$

5. Considérons la restriction δ_a de l'opérateur Δ au sous-espace $\mathrm{E}_a(\omega)$ de l'espace vectoriel $F(-a\omega)$. Les habitués des restrictions — non budgétaires ! — savent que δ_a est encore une application *linéaire et injective* mais de $\mathrm{E}_a(\omega)$ dans $\mathbb{R}^2$. Comme les éléments de $\mathrm{E}_a(\omega)$ s'annulent en zéro il est indéniable que

$$\operatorname{Im} \delta_a \subset \{0\} \times \mathbb{R}$$

et nous espérons ne choquer personne en balançant que

$$\dim(\{0\} \times \mathbb{R}) = 1$$

Comme *supra* et toujours avec l'aide du *sieur durang*, il ne fait plus aucun doute que

$$\dim \mathrm{E}_a(\omega) \leqslant 1$$

et tout le monde est ravi.

6. La supposition faite par le texte permet de disposer d'une fonction *non nulle* f située dans l'espace vectoriel $\mathrm{E}_a(\omega)$ et précipitons-nous sur l'intégrale

$$\int_0^1 f'^2$$

qui, parce que f' est continue sur le *segment* $[0,1]$, mène une paisible existence. Considérons dans la foulée les fonctions

$$u = f' \quad \text{et} \quad v = f$$

Vu les origines de classe de f, elles sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et l'on a

$$u' = f'' \quad \text{et} \quad v' = f'$$

Le théorème d'intégration *by parts* est alors formel. Nous avons sans détour

$$\int_0^1 f'^2 = \left[f'f\right]_0^1 - \int_0^1 f''f$$

égalité qui, vu que par hypothèse

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'' = -a\omega f$$

se métamorphose tout simplement en

$$\int_0^1 f'^2 = a \int_0^1 f^2\omega$$

la linéarité de l'intégration ayant eu un *picochouia* de mots à dire. Nous faisons alors valoir deux choses :

– la fonction f'^2 étant positive ou nulle et vu la gentille disposition des bornes, nous avons déjà

$$\int_0^1 f'^2 \geqslant 0$$

puisque l'intégration est bien connue pour sa positivité ou sa croissance ;

– le second point mérite un peu plus d'attention ;

- les bornes d'intégration sont dans les sens croissant *strict* ;
- la fonction $f^2\omega$ est *continue et positive ou nulle* sur $[0,1]$;
- la fonction $f^2\omega$ n'est pas identiquement nulle puisqu'il est stipulé que f ne l'est pas et que l'application ω ne s'annule *jamais*.

Il résulte alors du théorème de *stricte* positivité d'une intégrale que

$$\int_0^1 f^2\omega > 0$$

d'où il ressort dans la foulée que

$$a \geqslant 0$$

Oui mais voilà, le réel a ne peut pas être nul puisque depuis le 3.b nous savons que

$$\mathrm{E}_0(\omega) = \{0\}$$

So…

7. Nous allons procéder en quatre points.

– Soit f et g deux applications continues sur le segment $[0, 1]$. Il en est *généreusement* de même du produit $f g\,\omega$, ce qui confère à son intégrale une pépère existence. Il en résulte ainsi que $<\,,\,>$ applique bien $\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big) \times \mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ dans $\mathbb{R}$.

– La symétrie n'aura droit à rien de plus que *no comment*…

– On fixe la fonction f. La linéarité de l'application

$$g \longmapsto \int_0^1 f\,g\,\omega$$

découle principalement de celle de l'intégration.

– Soit pour finir une application f *non nulle* et continue sur $[0, 1]$.Nous avons

$$<f\,,\,f> = \int_0^1 f^2\omega$$

et il se trouve alors que nous venons, quelques lignes plus haut, d'établir la *stricte* positivité de cette intégrale.

Nous pouvons donc envisager la suite.

8. Soit f et g deux fonctions appartenant respectivement à $\mathrm{E}_a(\omega)$ et $\mathrm{E}_b(\omega)$. Ces appartenances se traduisent par les égalités

$$f'' = -a\,\omega f \quad ; \quad g'' = -b\,\omega\,g \quad ; \quad f(0) = f(1) = 0 \quad ; \quad g(0) = g(1) = 0$$

à telle enseigne que déjà

$$b<f\,,\,g> = b\int_0^1 f\,g\,\omega = -\int_0^1 f g'' \quad \text{et} \quad a<f\,,\,g> = a\int_0^1 f\,g\,\omega = -\int_0^1 f''g$$

Oui mais voilà, en procédant un peu comme à la question 6 mais *via* cette fois les fonctions

$$u = f \quad \text{et} \quad v = g'$$

le lecteur justifiera aisément l'intégration *par parties* amenant à

$$\int_0^1 f g'' = -\int_0^1 f'g'$$

les égalités $f(0) = f(1) = 0$ ayant eu quelque part leur pesant d'arachide.

Grâce au magique *mutatis mutandis* il parviendra également à

$$\int_0^1 f''g = -\int_0^1 f'g'$$

le pesant provenant cette fois des égalités $g(0) = g(1) = 0$.

À bien y regarder il semble que nous soyons parvenus à

$$b < f\,,\,g > = a < f\,,\,g >$$

c'est-à-dire à

$$(b-a) < f\,,\,g > = 0$$

et comme $b-a$ n'est pas nul…

Partie 2

9. Pour ne plus avoir à parler de lutte de classse nous enfonçons une fois pour toutes le clou en assénant que les applications ψ_k sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$. Vu ce que nous avons rappelé plus haut à propos des annulations de la fonction sin, nous constatons également que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$$

À bon entendeur !

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Au vu et au su de ce que nous venons d'entendre et grâce au mental constat de l'égalité

$$\psi_k'' = -k^2\pi^2\psi_k$$

le réel $a = k^2\pi^2$ devrait faire l'affaire car il est ouvertement strictement positif.

b. Soit k et ℓ deux entiers naturels non nuls et planifions *un poquitín*.

– Si k est différent de ℓ, il est manifeste que $k^2\pi^2$ est différent de $\ell^2\pi^2$. La précédente et la question 8 assurent alors de concert que ψ_k et ψ_ℓ sont orthogonales et du coup

$$< \psi_k\,,\,\psi_\ell > = 0$$

– Si $k=\ell$, nous avons cette fois

$$< \psi_k\,,\,\psi_k > = 2\int_0^1 \sin^2(k\pi t)dt$$

égalité que le lecteur *trigophile* transformera dans la foulée en

$$< \psi_k\,,\,\psi_k > = \int_0^1 \big(1-\cos(2k\pi t)\big)dt$$

puisqu'il est paraît-il bon de savoir par cœur que

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R} \qquad 2\sin^2\vartheta = 1-\cos 2\vartheta$$

Comme k n'est pas nul, le calcul de l'intégrale passe par l'égalité de Barrow

$$\int_0^1 \big(1-\cos(2k\pi t)\big)dt = \left[t - \frac{\sin(2k\pi t)}{2k\pi}\right]_0^1$$

et il en ressort *in fine* que

$$< \psi_k \, , \, \psi_k > = 1$$

Le fameux *delta* de Leopold Kronecker permet alors de recoller les morceaux puisque l'on a définitivement

$$< \psi_k \, , \, \psi_\ell > = \delta_{k\ell}$$

c. La question précédente vient justement de mettre en avant l'orthonormalité de cette famille et il est bien connu que les familles orthonormales sont libres. *So*…

10. Si cela ne dérange personne nous allons noter $\hat{u}$ l'application qui à toute fonction g simplement continue sur $[0,1]$ fait correspondre la fonction $\hat{u}(g)$ définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1] \qquad \hat{u}(g)(t) = 2\cos(\pi t) g(t) - \left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x)dx \right) \psi_{p+1}(t)$$

En réalité notre $\hat{u}$ fonctionne exactement comme u mais au lieu d'agir uniquement sur G, il agit carrément sur le gros $\mathcal{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Vu la continuité des unes et des autres, il est évident que $\hat{u}$ applique le « gros » dans lui même et sa linéarité découle limpidement de celle de l'intégration ainsi que de la définition des opérations sur les fonctions. En bref, $\hat{u}$ est un endomorphisme du gros !

a. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. Allons-voir du côté de l'image par $\hat{u}$ de l'application ψ_k. On annonce un réel t du segment $[0,1]$ et le *physio* revendique alors l'égalité

$$\hat{u}(\psi_k)(t) = 2\sqrt{2}\cos(\pi t)\sin(k\pi t) - < \psi_k \, , \, \psi_p > \psi_{p+1}(t)$$

Il faut maintenant réveiller le *trigophile* et Leopold qui nous transforment cela en

$$\hat{u}(\psi_k)(t) = \sqrt{2}\sin\big((k+1)\pi t\big) + \sqrt{2}\sin\big((k-1)\pi t\big) - \delta_{kp}\,\psi_{p+1}(t)$$

et il va maintenant falloir s'organiser *a little bit*.

- Si $k=1$, le réel $k-1$ est nul et *because* $p \geqslant 2$, δ_{kp} l'est également. Le *physio* revendique alors l'égalité fonctionnelle

$$\hat{u}(\psi_1) = \psi_2$$

- Si $2 \leqslant k \leqslant p-1$, le delta de Leopold est encore nul et le *physio* assène cette fois

$$\hat{u}(\psi_k) = \psi_{k+1} + \psi_{k-1}$$

- Si $k = p$, le delta vaut un et après une énorme simplification il ne reste que

$$\hat{u}(\psi_p) = \psi_{p-1}$$

Une des morales de cette histoire est que

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \qquad \hat{u}(\psi_k) \in G$$

morale qui, vu l'engendrement de G par les ψ_k, assure que l'endomorphisme $\hat{u}$ stabilise le sous-espace vectoriel G. L'opérateur u du texte n'est donc rien d'autre que l'endomorphisme de G *induit* par $\hat{u}$ et est donc, à ce titre, un authentique endomorphisme de G.

b. La grande philosophie des restrictions et tout particulièrement des endomorphismes induits est l'important pour ne pas dire le crucial « non changement d'action » grâce auquel nous déduisons du récent a que

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \qquad u(\psi_k) = \begin{cases} \psi_2 & \text{si} \quad k=1 \\ \psi_{k-1}+\psi_{k+1} & \text{si} \quad 2 \leqslant k \leqslant p-1 \\ \psi_{p-1} & \text{si} \quad k=p \end{cases}$$

Le protocole de « matricialisation » est alors catégorique. *No doubt that*

$$\mathtt{Mat}_C(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'endomorphisme u est donc *spectralement* diagonalisable puisque l'une de ses matrice est franchement symétrique réelle d'ordre supérieur ou égal à un.

↱ Nous trouvons le texte ici quelque peu timoré. Puisque C est une base orthonormale de l'espace vectoriel G et que la matrice de u dans cette orthonormale base est symétrique réelle, il s'agit en réalité d'un endomorphisme *symétrique* de G ce qui, sur la carte de visite, est beaucoup plus impressionnant qu'une banale diagonalisabilité…

11.a. Soit g appartenant à G. La bilinéarité du produit scalaire permet dans un premier temps d'écrire

$$<g\,,\,u(g)> = 2\int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t)dt - \left(\int_0^1 g\,\psi_p\right) <g\,,\,\psi_{p+1}>$$

puisque l'intégrale du produit $g\psi_p$ n'est rien d'autre qu'un misérable scalaire. Oui mais voilà, la famille

$$(\psi_1,\ldots,\psi_p,\psi_{p+1})$$

étant également orthonormale, on déduit naturellement que

$$\psi_{p+1} \perp \mathrm{Vect}\,(\psi_1,\ldots,\psi_p)$$

ce qui, vu la providentielle situation géographique de g, a la bonne idée d'entraîner l'orthogonalité de ψ_{p+1} à cette dernière. Nous avons en bref

$$<g\,,\,\psi_{p+1}> = 0$$

et nous pouvons derechef aller de l'avant.

b. Notons bien sûr g un vecteur propre de u attaché à cette valeur propre à telle enseigne que

$$u(g) = \lambda g \quad \text{et} \quad g \neq 0$$

Il résulte alors de la bilinéarité du produit scalaire et de la question précédente que

$$\lambda \|g\|_2^2 = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt$$

Une fois valuée puis triangulée , nous en déduisons tout d'abord que

$$|\lambda| \cdot \|g\|_2^2 \leqslant 2 \int_0^1 |\cos(\pi t)| g^2(t) dt$$

puisque les quantités déjà positives… et que les bornes…

Mieux, puisque $|\cos| \leqslant 1$, que les bornes n'ont pas changé de bourricot et que l'intégration est croissante, l'on parvient carrément à

$$|\lambda| \cdot \|g\|_2^2 \leqslant 2 \int_0^1 g^2(t) dt \quad \textit{i.e.} \quad |\lambda| \cdot \|g\|_2^2 \leqslant 2 \cdot \|g\|_2^2$$

Rappelons qu'il a été *proprement* précisé que g n'est pas la fonction nulle et que par conséquent

$$\|g\|_2^2 > 0$$

Une légale simplification plus loin, nous en sommes déjà à

$$|\lambda| \leqslant 2$$

ce qui n'est pas pour nous déplaire. Poursuivons alors en deux temps.

– Supposons par l'absurde que $\lambda = 2$. Le report dans l'égalité située treize lignes plus haut et quelques tranquilles aménagements conduisent alors tranquillement à

$$\int_0^1 \big(1 - \cos(\pi t)\big) g^2(t) dt = 0$$

et nous faisons maintenant valoir que :

– les bornes d'intégration sont *différentes* ;

– la fonction intérieure est *continue* et ouvertement de *signe constant* sur $[0, 1]$.

Une importante contraposition stipule alors que la fonction intérieure est identiquement nulle sur notre segment, ce qui revient à dire que

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \big(1 - \cos(\pi t)\big) g^2(t) = 0$$

Le *trigophile* affûté sait parfaitement que

$$\forall t \in]0, 1] \qquad 1 - \cos(\pi t) \neq 0$$

et il en ressort que g est déjà irrémédiablement nulle sur le *semi-ouvert* $]0,1]$. Oui mais voilà, la fonction g est également continue en zéro et nous sommes fortement censés savoir déduire de tout cela que $g(0)=0$. *Mezalor*, la fonction g est nulle sur $[0,1]$, ce qui est en totale contradiction avec son extrême propreté…

– Supposons maintenant que $\lambda=-2$. Nous ne prononcerons alors que les deux mots magiques que sont *mutatis* et *mutandis*.

12. Nous venons à l'instant d'apprendre qu'un tel λ appartient à l'ouvert $]-2,2[$ et nul ne peut alors ignorer qu'il existe effectivement un réel $\theta\in]0,\pi[$ — par ailleurs unique — tel que

$$\lambda=2\cos\theta$$

Everything is therefore under control !

a. Un peu plus haut, nous avons vu passer la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathcal{C}$ et vu les dispostions prises celle du vecteur ψ dans cette même base n'est autre que la colonne ayant pour entrées les x_k où k batifole de 1 à p. Dans ces conditions, l'égalité vectorielle

$$u(\psi)=2\cos\theta\cdot\psi$$

devrait matriciellement se traduire par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}=2\cos\theta\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

égalité matricielle se déclinant ensuite en un classique système linéaire qui requiert un peu d'observation.

– La première ligne de ce système est à l'évidence

$$x_2=2\cos\theta\,x_1$$

– La toute dernière ligne est la non moins évidente

$$x_{p-1}=2\cos\theta\,x_p$$

– Les autres lignes se numérotent bien sûr de 2 à $p-1$ et à bien y regarder il s'avère que la $k^{ième}$ s'écrit

$$x_{k-1}+x_{k+1}=2\cos\theta\,x_k$$

Les deux conventions $x_0=x_{p+1}=0$ permettent de recoller les trois morceaux et l'on a alors effectivement

$$\forall k\in[\![1,p]\!]\qquad x_{k-1}+x_{k+1}=2\cos\theta\,x_k$$

b. La question précédente révèle avec force que la suite *finie* $(x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ vérifie la relation de récurrence linéaire double dont le trinôme caractéristique est exactement

$$X^2 - 2\cos\theta\, X + 1$$

Le discriminant de ce trinôme vaut $-4\sin^2\theta$ et il est donc *strictement* négatif vu que θ prend ses aises dans l'ouvert $]0, \pi[$. Le lecteur totalement *décomplexé* trouvera ensuite aisément que les deux racines du trinôme caractéristique sont

$$e^{i\theta} \quad \text{et} \quad e^{-i\theta}$$

et nous sommes alors officiellement tenus de savoir qu'il existe bien deux réels A et B tels que

$$\forall k \in [\![0, p+1]\!] \qquad x_k = A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$$

c. Procédons en deux temps.

- D'après la précédente, il semble que $x_0 = A$ et comme $x_0 = 0\ldots$
- Nous avons désormais

$$\forall k \in [\![0, p+1]\!] \qquad x_k = B\sin(k\theta)$$

et nous ne perdons pas de vue que l'on a également $x_{p+1} = 0$. Du coup

$$B\sin\big((p+1)\theta\big) = 0$$

Imaginons alors par l'absurde que

$$\sin\big((p+1)\theta\big) \neq 0$$

Cela obligerait B à être nul et l'on aurait alors inéluctablement

$$\forall k \in [\![0, p+1]\!] \qquad x_k = 0$$

et aussi tout particulièrement

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \qquad x_k = 0 \quad i.e. \quad \psi = 0$$

égalité *proprement* inconcevable. Il en résulte ainsi que

$$\sin\big((p+1)\theta\big) = 0$$

et vu les sempiternelles annulations de la fonction $\sin$, il existe tout d'abord $s \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(p+1)\theta = s\pi \quad i.e. \quad \theta = \frac{s\pi}{p+1}$$

la division par $p+1$ ne posant évidemment aucun problème. Pour finir, et comme nous n'avons pas oublié que θ est emprisonné dans l'*ouvert* $]0, \pi[$, nous déclarons solennellement que l'entier s n'a pas vraiment le choix. Il doit être situé dans $[\![1, p]\!]$.

d. Faisons un peu le point à propos de l'analyse que nous venons de mener depuis le tout récent a.

Nous avons *supposé* que $\lambda = 2\cos\theta$, le réel θ vérifiant $0 < \theta < \pi$, est une valeur propre de u et que

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} x_k \psi_k$$

est un vecteur propre qui lui est attaché. Nous sommes alors parvenus à l'existence d'un entier $s \in [\![1, p]\!]$ ainsi que d'un réel B, tout ce petit monde vérifiant

$$\theta = \frac{s\pi}{p+1} \quad \text{et} \quad \psi = B \sum_{k=1}^{p} \sin \frac{ks\pi}{p+1} \cdot \psi_k$$

et il faut reconnaître que c'est une magnifique conclusion d'analyse !

Dura lex sed lex, nous devons penser à la synthèse ! À cet effet, pour chaque entier s appartenant à $[\![1, p]\!]$, nous proposons(*)

$$\lambda_s = 2\cos\frac{s\pi}{p+1} \quad \text{et} \quad \Psi_s = \sum_{k=1}^{p} \sin\frac{ks\pi}{p+1} \cdot \psi_k$$

Comme il semble plus visuel de travailler matriciellement nous considèrerons plutôt la matrice du vecteur Ψ_s dans la base $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la colonne Y_s dont les entrées sont les

$$y_k = \sin\frac{ks\pi}{p+1} \quad \text{où} \quad k \in [\![1, p]\!]$$

Tant que nous y sommes nous notons M la grosse matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ et nous allons traîner nos guettres du côté de la colonne $Z = MY_s$ dont les entrées seront évidemment notées avec la petite lettre z. On reprend alors l'organisation ligne par ligne déjà utilisée un petit peu plus haut.

– L'examen de la première ligne donne

$$z_1 = y_2 = \sin\frac{2s\pi}{p+1} = 2\cos\frac{s\pi}{p+1}\sin\frac{s\pi}{p+1}$$

la dernière égalité procédant d'une fameuse formule de duplication. Le *physio* se réveille alors et clame

$$z_1 = \lambda_s y_1$$

– L'examen des lignes numérotées de 2 à $p-1$ donne à son tour

$$\forall k \in [\![2, p-1]\!] \qquad z_k = y_{k-1} + y_{k+1} = \sin\frac{(k-1)s\pi}{p+1} + \sin\frac{(k+1)s\pi}{p+1}$$

(*) Lors d'une analyse-synthèse, dans l'analyse on suppose et dans la synthèse on propose…

égalité qui, grâce à l'une des formules de Simpson, en l'occurrence

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \qquad \sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

amène très facilement à

$$\forall k \in [\![2, p-1]\!] \qquad z_k = \lambda_s y_k$$

– L'examen de la dernière ligne donne pour finir l'égalité

$$z_p = y_{p-1} = \sin\frac{(p-1)s\pi}{p+1}$$

que la *tricky attitude* suggère d'écrire plutôt

$$z_p = \sin\frac{(p-1)s\pi}{p+1} + \sin\frac{(p+1)s\pi}{p+1}$$

puisque l'énergumène que nous avons ajouté à droite ne vaut vraiment pas grand chose. Notre formule de Simpson fonctionne à nouveau et elle nous livre l'inespérée

$$z_p = \lambda_s y_p$$

grâce à laquelle l'histoire se termine sur l'égalité

$$MY_s = \lambda_s Y_s$$

Observons pour finir que y_1 n'est assurément pas nul puisque

$$y_1 = \sin\frac{s\pi}{p+1} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{s\pi}{p+1} < \pi$$

et la colonne Y_s vérifie dont le *never forget*

$$Y_s \neq 0$$

La traduction vectorielle de toute cette réalité ne se fait pas attendre et voilà donc que

$$u(\Psi_s) = \lambda_s \Psi_s \quad \text{et} \quad \Psi_s \neq 0$$

Autant dire alors que

$$\lambda_s \in \operatorname{Spec} u \quad ; \quad \Psi_s \in \mathrm{E}_{\lambda_s}(u) \quad ; \quad \Psi_s \neq 0$$

les deux dernières propriétés pouvant se décliner en disant que Ψ_s est un vecteur propre de u attaché à la valeur propre λ_s.

La destination est proche !

Nul ne peut réellement s'opposer à la queue leu leu que voici

$$0 < \frac{\pi}{p+1} < \frac{2\pi}{p+1} < \cdots < \frac{p\pi}{p+1} < \pi$$

et il se trouve que la fonction cos est officiellement *strictement* décroissante sur $[0, \pi]$. Nous en déduisons allégrement la nouvelle queue leu leu

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$$

inégalités *strictes* qui ont le mérite de révéler que les λ_s sont deux à deux distincts. Oui mais voilà, ces p réels λ_s sont depuis peu des valeurs de u qui est un endomorphisme opérant sur un espace dont la dimension est justement p.

Nous sommes alors tenus de savoir qu'il n'y a pas de valeurs propres ailleurs et que les sous-espaces propres de u sont des droites vectorielles. Bref :

$$\operatorname{Spec} u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \quad \text{et} \quad \forall s \in [\![1, p]\!] \quad (\Psi_s) \text{ est une base de } \mathrm{E}_{\lambda_s}(u)$$

Notons également que nous retrouvons ainsi la diagonalisabilité de u puisqu'il appartient au club très fermé — on les appelle parfois les *stars* — des endomorphimes qui, en dimension p, possèdent p valeurs propres *distinctes* et qu'il existe sur le marché une puissante condition suffisante…

Pour finir et pour répondre à la finale question il reste à dire que

$$(\Psi_1, \ldots, \Psi_p)$$

est à n'en pas douter une base de G formée de vecteurs propres de u.

↱ Quand on s'intéresse aux éléments propres d'un endomorphisme il est d'usage de mettre en avant le spectre et les sous-espaces propres ce que ne fait pas exactement le texte. Nous réparons cet oubli *via* un *here you are !*

$$\operatorname{Spec} u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} \quad \text{et} \quad \forall s \in [\![1, p]\!] \quad \mathrm{E}_{\lambda_s}(u) = \operatorname{Vect} \Psi_s$$

Partie 3

13. Vu le *laïus* prédédent la question 14, nous savons d'emblée que la réponse sera plutôt non… *Here we go !*

Supposons donc par l'absurde que la réponse est oui et notons bien sûr (a_n) une suite ayant les propriétés *ad hoc* et profitons-en pour noter M un nombre réel vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 < a_n \leqslant M$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Nous savons que a_n est strictement positif et que $\mathrm{E}_{a_n}(1)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. La question $4.b$ est alors catégorique ! Elle stipule que le quotient

$$k_n = \frac{\sqrt{a}_n}{\pi}$$

doit être un entier et même carrément entier naturel non nul puisque son signe crève l'écran. Grâce à la *bornitude supra* on en déduit dans la foulée que

$$0 < k_n \leqslant \frac{\sqrt{M}}{\pi}$$

Notons enfin que les réels a_n sont deux à deux distincts et que c'est aussi naturellement le cas(*) des entiers k_n. Nous disposons donc d'une *infinité* d'entiers situés dans la zone

$$\left]0, \sqrt{M}/\pi\right]$$

ce qui n'est pas très raisonnable. Le lecteur *entièrement* dévoué à notre cause pourra d'ailleurs aisément établir que la zone en question ne contient que

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{M}}{\pi} \right\rfloor$$

places entières…

14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathsf{E}_{a_n}(\omega)$ n'est pas l'espace nul, nous avons tout loisir de considérer une fonction *non nulle* g_n lui appartenant. La fonction

$$f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_2}$$

vérifie pratiquement par construction les deux propriétés

$$f_n \in \mathsf{E}_{a_n}(\omega) \quad \text{et} \quad \|f_n\|_2 = 1$$

ce qui permet au *physio* de revendiquer le côté *ad hoc* de la suite (f_n)

↱ Les a_n étant deux à deux distincts, la question 8 assure que les espaces $\mathsf{E}_{a_n}(\omega)$ sont deux à deux orthogonaux et il en est donc de même de nos applications f_n. En conséquence, la famille (f_n) est carrément *orthonormale* et cela se devait d'être mis en avant. C'est désormais chose faite !

15. Il nous semble important d'observer que pour tout entier naturel n l'on a

$$c_n(\varphi) = <\varphi, f_n>$$

et que par conséquent

$$S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} <\varphi, f_k> f_k$$

Allons-y alors gaiement !

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quand on maîtrise parfaitement son cours on devine bien en S_n la projection orthogonale de $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ sur le sous-espace

$$\operatorname{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$$

(*) La fonction « racine carrée » est injective !

puisqu'une importante orthonormalité a été signalée *par nos soins* à l'issue de la quatorzième. Il y a cependant un réel obstacle parce que

$$\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), <\,,\,>\right)$$

n'est pas un espace *euclidien* la raison étant que $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est de dimension infinie(*). Le *tricky* tour de passe-passe pour contourner l'entrave est de considérer l'espace vectoriel

$$T_n = \mathrm{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n, \varphi)$$

qui est ouvertement de dimension finie et qui surtout contient la fonction φ.

Nous pouvons maintenant répondre à la question. Le vecteur $S_n(\varphi)$ est, dans l'espace euclidien

$$(T_n, <\,,\,>)$$

la projection orthogonale de φ sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(f_0, \ldots, f_n)$.

b. Soit à nouveau $n \in \mathbb{N}$. L'égalité souhaitée repose sur la magique et officielle expression du carré de la norme d'un vecteur exprimé sur une base orthonormale. Quant à l'inégalité, on se place derechef dans l'euclidien T_n, et projection orthogonale oblige, l'on ne perd pas de vue que

$$S_n(\varphi) \perp \varphi - S_n(\varphi)$$

Cela permet alors aux *pythagoriciens* de clamer haut et fort que

$$\|S_n(\varphi)\|_2^2 + \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2$$

et nous pouvons ainsi tourner positivement la page.

c. Il s'agit d'une série dont le terme général est positif et dont la suite des sommes partielles est dorénavant majorée, par exemple par $\|\varphi\|_2^2$. Elle est donc *monotoniquement* convergente.

↱ *Via* un passage à la limite désormais légal, on déduit de l'inégalité du récent *b* que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2(\varphi) \leqslant \|\varphi\|_2^2$$

C'est une très célèbre inégalité due à un certain Friedrich Bessel et il eut été dommage de passer à côté…

d. Une importante condition *nécessaire* de convergence stipule que, lorsqu'une série converge, son terme général se doit de tendre vers zéro. Il s'ensuit donc dans un premier temps que

$$c_n^2(\varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et dans un second, que

$$c_n(\varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(*) Le fait, par exemple, qu'il contienne la famille libre infinie (ψ_n) de la seconde partie devrait suffire à nous convaincre !

en invoquant, pourquoi pas, la continuité en zéro de la fonction *squareroot*. Il suffit alors de lever le voile pour voir effectivement apparaître.

$$\int_0^1 f_n \varphi\, \omega \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit pour finir $n \in \mathbb{N}$. Appartenance à $\mathsf{E}_{a_n}(\omega)$ oblige, il ne fait aucun doute que

$$f_n'' = -a_n\, \omega f_n$$

à telle enseigne que

$$\int_0^1 f_n''\varphi = -a_n \int_0^1 f_n \varphi\, \omega$$

Comme l'intégrale du *right hand side* tend depuis peu vers zéro et comme la suite (a_n) est bornée, nous pouvons encore une fois envisager de changer de crèmerie.

16. Pour éviter de les annoncer à chaque alinéa, nous notifions $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$ pour toute la durée de la question 16. Nous ne le dirons plus.

a. À bien y regarder, on peut donner une autre expression de φ_x, en l'occurrence

$$\forall t \in [0,1] \qquad \varphi_x(t) = \begin{cases} t(x-1) & \text{si} \quad t \in [0,x] \\ x(t-1) & \text{si} \quad t \in [x,1] \end{cases}$$

la modification de la facette basse allant bientôt être déterminante. La fonction φ_x est en effet continue sur chacun des segments $[0,x]$ et $[x,1]$ pour la simple et bonne raison qu'elle y est débonnairement affine. Elle est donc continue à gauche et à droite en x *and Bob's your uncle !*

b. La fonction f_n étant par essence de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ on peut assurément lui appliquer la formule de Taylor en question qui s'écrit

$$f_n(x) = f_n(0) + x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t)dt$$

Cependant, vu les origines géographiques de la fonction f_n elle se doit de s'annuler en 0 à telle enseigne que l'on a bien

$$f_n(x) = x f_n'(0) + \int_0^x (x-t) f_n''(t)dt$$

Ces mêmes origines obligent également $f_n(1) = 0$, ce qui s'écrit

$$f_n'(0) + \int_0^1 (1-t) f_n''(t)dt = 0$$

et qui ne peut que nous ravir !

c. Au vu et au su de la précédente, nous pouvons espérer

$$f_n(x) = -x\int_0^1 (1-t)f_n''(t) + \int_0^x (x-t)f_n''(t)dt$$

ce qui en *chaslant* un tantinet s'écrit également

$$f_n(x) = -x\int_0^x (1-t)f_n''(t)dt - x\int_x^1 (1-t)f_n''(t) + \int_0^x (x-t)f_n''(t)dt$$

En regroupant linéairement la première et la troisième intégrale du *right hand side*, en faisant un peu de ménage et en organisant habilement les choses nous revendiquons déjà l'égalité

$$f_n(x) = \int_0^x t(x-1)f_n''(t)dt + \int_x^1 x(t-1)f_n''(t)dt$$

Notre « facettage » modifié de la fonction φ_x évite confortablement les affres des semi-ouvertures et nous avons sans problème

$$f_n(x) = \int_0^x \varphi_x(t)f_n''(t)dt + \int_x^1 \varphi_x(t)f_n''(t)dt$$

et le début de l'histoire se termine en *chaslant one more time*.

La fin de l'histoire passe alors par la fin de la question 15.*b* dans laquelle nous choisissons

$$\varphi = \varphi_x$$

ce qui est tout à fait envisageable puisque, depuis peu, la fonction φ_x appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

d. Vu les origines ethniques de f_n, nous avons entre autres

$$f_n'' = -a_n\,\omega f_n$$

et la première partie de la précédente se métamorphose alors effectivement en

$$f_n(x) = -a_n < \varphi_x\ ,\ f_n >$$

égalité qui, *physio, physio*, est beaucoup mieux sous la forme

$$f_n(x) = -a_n c_n(\varphi_x)$$

Le passage en *absolute value* n'est bien sûr qu'une formalité et voilà donc déjà que

$$\left|f_n(x)\right| = a_n\left|c_n(\varphi_x)\right|$$

puisque les entités assurément positives sont *as usual* dispensées de valuation. Il reste maintenant à enfoncer deux clous.

– Le premier résulte de la *bounded above attitude* selon laquelle

$$a_n \leqslant a$$

– Le second utilise une toute petite partie de l'inégalité précédant celle de Friedrich Bessel révélant tout d'abord et sans ambages que

$$c_n^2(\varphi_x) \leqslant \|\varphi_x\|_2^2$$

Il en ressort ensuite que

$$\left|c_n(\varphi_x)\right| \leqslant \|\varphi_x\|_2$$

puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et possède l'énorme propriété

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{u^2} = |u|$$

dont l'ignorance a d'ailleurs coûté le brevet des collèges à des générations de potaches ! Comme tout ce petit monde évolue dans la plus pure des positivités, il devrait en résulter que

$$a_n\left|c_n(\varphi_x)\right| \leqslant a\|\varphi_x\|_2$$

et la conclusion se fait alors très transitivement...

e. En *chaslant* encore une fois au point x et en gérant correctement les facelles, on trouve tout d'abord que

$$\int_0^1 \varphi_x^2 = \int_0^x t^2(x-1)^2 dt + \int_x^1 x^2(t-1)^2 dt$$

La fin du calcul ne pose pas vraiment de problème et après un peu de ménage, on finit par trouver l'égalité

$$\int_0^1 \varphi_x^2 = \frac{x^2(x-1)^2}{3}$$

Poursuivons. Nous n'avons pas oublié que

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \int_0^1 \varphi_x^2\,\omega$$

et que, maximalité oblige, la fonction ω est majorée par le nombre réel positif $\|\omega\|_\infty$. Puisque nous sommes décidément dans un havre de positivité, il s'ensuit très tranquillement que

$$\int_0^1 \varphi_x^2\,\omega \leqslant \|\omega\|_\infty \int_0^1 \varphi_x^2$$

puisque l'intégration est linéaire et croissante, les bornes étant idéalement disposées. Selon le début de la question, nous en sommes donc déjà à

$$\|\varphi_x\|_2^2 \leqslant x^2(x-1)^2 \cdot \frac{\|\omega\|_\infty}{3}$$

et comme, quelques lignes plus haut, nous avons rappelé la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $\sqrt{\ }$ ainsi que la propriété du potache, nous atteignons sans peine l'inégalité

$$\|\varphi_x\|_2 \leqslant x(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

le point crucial à avoir bien capté étant la négativité de $x-1$. Après multiplication par le réel positif a et un *chouia* de transitivité on déduit alors de la précédente qu'effectivement

$$|f_n(x)| \leqslant ax(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

↱ Il nous semble important de doper sur-le-champ cette conclusion car nous en serons récompensés quelques lignes plus bas. Les *aficionados* des variances *bernoulliennes* ne sont pas sans savoir que la variance de n'importe quelle variable aléatoire de Bernoulli ne dépasse jamais $1/4$ ce qui se traduit par

$$\forall u \in [0,1] \qquad u(1-u) \leqslant \frac{1}{4}$$

De là à en déduire que

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

il n'y a qu'une toute petite marche que nous franchissons guillerets, les éternelles positivités des uns et des autres étant toujours et bien entendu mises à contribution.

f. Supposons momentanément que x soit *strictement* positif. Cela autorise la division membre à membre par x dans l'inégalité qui précède et voilà donc que

$$\left|\frac{f_n(x)}{x}\right| \leqslant a(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

ce qui, parce que f_n a des origines, peut également s'écrire avec un *tricky* parfum *newtonien*, en l'occurrence

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x}\right| \leqslant a(1-x)\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

Il suffit alors de passer à la limite lorsque x tend vers zéro.

g. Ce verbe « rappeler » est pour le moins bizarre, bizarre… Essayons au moins de démontrer !

Comme le fonction f_n'' est continue sur $\mathbb{R}_+$ nous pouvons lui appliquer la formule d'Isaac Barrow entre 0 et x et comme f_n' est assurément l'une de ses primitives, nous revendiquons l'égalité

$$f_n'(x) = f_n'(0) + \int_0^x f_n''$$

qui n'est autre que la formule de Taylor reste intégral à l'ordre zéro, et quoi qu'il en soit, nous avons bien « rappelé » le premier *round* puisque la provenance de f_n l'oblige à vérifier

$$f_n'' = -a_n\,\omega f_n$$

L'inégalité triangulaire sommatoire suivie de sa cousine intégrale permettent désormais de se réclamer de

$$\left|f_n'(x)\right| \leqslant \left|f_n'(0)\right| + a_n \int_0^x \omega(t)\left|f_n(t)\right|dt$$

vu que les bornes de l'intégrale sont, depuis belle lurette, idylliquement disposées et que, au risque de radoter, les protagonistes déjà positifs… La toute récente question f et la continuelle positivité de l'intégrande permettent même d'aller carrément plus loin et *boum !*

$$\left|f_n'(x)\right| \leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + a_n \int_0^1 \omega(t)\left|f_n(t)\right|dt$$

Soit alors $t \in [0,1]$. Nous mettons en avant les éléments suivants :

- *primo*, la sempiternelle

$$a_n \leqslant a$$

- *deuzio*, la non moins maximaliste

$$\omega(t) \leqslant \|\omega\|_\infty$$

- *tertio*, la conclusion améliorée par nos soins de la fraîche question e selon laquelle

$$\left|f_n(t)\right| \leqslant \frac{a}{4}\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

Le lecteur avisé n'aura maintenant aucun souci à en déduire que

$$a_n \int_0^1 \omega(t)\left|f_n(t)\right|dt \leqslant \frac{a^2}{4}\|\omega\|_\infty\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

et comme il se fait tard nous lui laissons, quitte à radoter, le soin de se charger de l'intendance…

Il semble alors bien que nous soyons parvenus à

$$\left|f_n'(x)\right| \leqslant a\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} + \frac{a^2}{4}\|\omega\|_\infty\sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$$

ce qui, à une mise en facteur près, ne peut que nous satisfaire.

17. Il a été dit depuis fort longtemps que la fonction ω est à valeurs *strictement* positives et c'est donc également le cas de son maximum. Nous avons ainsi

$$\|\omega\|_\infty > 0$$

et cela devrait suffire à justifier la *stricte* positivité du réel C. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. La fin de la toute proche question $16.g$ produit la majoration

$$|f_n'| \leqslant C$$

et l'affaire se conclut alors grâce à une mentale application de l'inégalité des accroissements finis sous sa forme valuée s'entend.

↱ Le lecteur cultivé aura reconnu en f_n une foncton C-lipschitzienne en hommage au mathématicien allemand Rudolph Lipschitz.

18. La *stricte* positivité de C n'était certes pas indispensable pour la 17. En revanche ce n'est désormais plus la même histoire vu que C est passé sous la ligne de flottaison et tout cela c'est pour causer bien sûr…

a. La fin de la question $16.c$ a révélé que, pour tout réel x du segment $[0, 1]$, l'on a

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Soit alors h appartenant à $[\![0, N]\!]$. Comme α_h appartient à notre segment il ne fait aucun doute que

$$f_n(\alpha_h) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est un providentiel *epsilontik jack-pot* sur lequel nous jouons la somme de $\epsilon/2$. Nous y gagnons un entier naturel — dépendant évidemment de h — que nous notons p_h tel que

$$\forall n \geqslant p_h \qquad \left|f_n(\alpha_h)\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Proposons maintenant et classiquement

$$p = \max\,(p_0, \ldots, p_N)$$

et annonçons *ensuite*(*) un entier $n \geqslant p$ puis un entier $k \in [\![0, N]\!]$. Maximum oblige, notre entier n est fatalement supérieur à p_k et du coup

$$\left|f_n(\alpha_k)\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

ce qui nous permet d'envisager la suite.

b. Toujours à propos de ces histoires d'ordre soulevées par la note de bas de page, il est *impératif* d'annoncer *d'abord* un entier n supérieur à l'entier p de la précédente et d'annoncer *ensuite* un réel x du segment $[0, 1]$.

Comme les réels α_k forment une subdivision du segment $[0, 1]$ — il paraît même que c'est la régulière ! — le réel x appartient fatalement à l'un des morceaux et il existe donc bien un entier k situé entre 0 et $N - 1$ tel que

$$\alpha_k \leqslant x \leqslant \alpha_{k+1}$$

(*) Dans ce genre de situation l'ordre dans lequel on annonce les protagonistes est désespérément crucial ! À bon entendeur…

La classique, mais cependant *tricky*, égalité

$$f_n(x) = f_n(\alpha_k) + f_n(x) - f_n(\alpha_k)$$

une fois triangulée nous amène à

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant \big|f_n(\alpha_k)\big| + \big|f_n(x) - f_n(\alpha_k)\big|$$

Oui mais voilà nous savons tout d'abord que

$$\big|f_n(\alpha_k)\big| < \frac{\epsilon}{2}$$

puisqu'il y eu le récent a et que nous avons situé n de façon précisément *ad hoc* et nous savons en second lieu — merci Rudolf ! — que

$$\big|f_n(x) - f_n(\alpha_k)\big| \leqslant C(x - \alpha_k)$$

dans la mesure où x et α_k sont dans $[0,1]$ et que $x - \alpha_k$ est positif. N'ayant pas perdu de vue que x est également inférieur à α_{k+1} et que C n'a pas viré sa cuti, nous avons dans la foulée et tour à tour

$$C(x - \alpha_k) \leqslant C(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \frac{C}{N} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

l'inégalité finale reposant sur le choix judicieux de l'entier N. Voici donc pour finir que

$$\big|f_n(\alpha_k)\big| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \big|f_n(x) - f_n(\alpha_k)\big| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

et il s'en déduit(*) effectivement que

$$\big|f_n(x)\big| < \epsilon$$

↱ Il y a ici une colossale remarque à faire.

- La fin de la timide question 16.c, en l'occurrence

$$\forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

se traduit de manière *epsilontik* par l'énoncé

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant p \qquad \big|f_n(x)\big| < \epsilon \qquad \text{(S)}$$

- Nous venons à l'instant de prouver magistralement le nouvel énoncé

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant p \quad \forall x \in [0,1] \qquad \big|f_n(x)\big| < \epsilon \qquad \text{(U)}$$

(*) Comme cochon !

Malgré des apparences trompeuses — il n'y a finalement qu'un changement de place de la quantification sur x — la différence entre ces deux énoncés est titanesque car il faut en effet bien capter que

– dans l'énoncé (S) l'entier p dépend inéluctablement de x puisque ce dernier est annoncé *avant* ;

– dans l'énoncé (U) l'entier p ne dépend sûrement pas de x puisque celui-ci pointe son nez *après* ce qui change considérablement les choses comme nous allons le constater à la suivante.

Ces délicates problématiques n'ont jamais pris place dans les programmes officiels de nos classes mais rien n'empêche bien sûr d'aller les titiller dans un problème !

Signalons enfin pour la culture que les *pros* des suites de fonctions traduisent (S) en disant que la suite (f_n) converge *simplement* vers la fonction nulle alors qu'ils traduisent (U) en clamant que la suite (f_n) converge *uniformément* vers la fonction nulle.

c. Soit à nouveau $\epsilon > 0$. L'énoncé (U) de l'uniformité produit un autonome entier p qui vérifie

$$\forall n \geqslant p \quad \forall x \in [0,1] \qquad \left|f_n(x)\right| < \epsilon$$

Soit alors $n \geqslant p$. Les réels $\left|f_n(x)\right|$ étant absolument *tous* strictement inférieur à ϵ il en est bien sûr de même de leur *maximum* puisque ce dernier fait partie de la bande. Autant dire alors que

$$\|f_n\|_\infty < \epsilon$$

et, à bien y regarder, nous avons établi que, pour tout ϵ strictement positif, il existe un entier naturel p tel que

$$\forall n \geqslant p \qquad \|f_n\|_\infty < \epsilon$$

ce qui n'est autre que la définition *epsilontik* de la limite

$$\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

↱ Comme nous l'avions laissé entendre un peu plus haut, nous avons ici remporté l'affaire grâce à l'énoncé (U) de la convergence uniforme. Nous demandons au lecteur qui a encore des jambes, d'essayer de la vaincre *via* l'énoncé (S) de la convergence simple et de rapidement se persuader qu'il n'y arrivera pas ! Dans l'énoncé (S), le fameux entier p qui dépendant de x lui mettra, inévitablement, plus que des bâtons dans les roues…

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Après toutes les terribles épreuves que nous avons traversées ensemble, nous pensons le lecteur endurant capable de justifier par lui-même l'encadrement

$$0 \leqslant \int_0^1 f_n^2\,\omega \leqslant \|f_n\|_\infty^2 \cdot \|\omega\|_\infty$$

La question précédente et le *squeezing process* sont alors intraitables. *No doubt that*

$$\int_0^1 f_n^2\,\omega \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mais cela n'est pas vraiment sage, dans la mesure où, depuis la genèse, l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 f_n^2\,\omega = 1$$

Il n'y a définitivement *aucune* fonction ω vérifiant la propriété (H_ω).

Le désert, la zone, le néant…