CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à Essec Business School.*

Nous nous étonnons d'emblée que le texte ait noté R_θ la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, de la rotation d'angle $-\theta$. Nous nous devons de reconnaître que c'est particulirement tordu et le pire est que ce n'est pas fini ! Affaire à suivre donc...

Partie 1

1. Organisons-nous en deux temps.

– Supposons que A soit normale. Nous avons alors :

$$A^{\mathsf{T}} \cdot A = A \cdot A^{\mathsf{T}}$$

ce qui, après quelques gentils aménagements, se traduit finalement par le système :

$$\begin{cases} b^2 = c^2 \\ (a-d)(c-b) = 0 \end{cases}$$

Nous profitons maitenant de la première pour poursuivre l'investigation.

– si $b = c$, la matrice A est symétrique et c'est bien !

– si $b = -c$ et $b \neq 0$ cette dernière supposition — regrettablement oubliée par le texte — étant là pour réellement faire du « ou bien », « ou bien », nous avonc cette fois :

$$a = d$$

puisque $c - b$ n'est pas nul. Dans ce deuxième cas la matrice A hérite déjà du *look* :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad b \neq 0$$

mais ce n'est pas totalement fini. Considérons le nombre complexe :

$$z = a + ib$$

Comme b n'est pas nul, le complexe z ne l'est pas plus et nous savons depuis nos *seventies* qu'il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

à telle enseigne que A devient alors :

$$A = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \rho R_\theta$$

et vu que b et ρ ne sont pas nuls, nous pouvons même ajouter que :

$$\sin\theta \neq 0 \quad i.e. \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Bref, les *vraies* conclusions de ce premier temps sont les suivantes. Si la matrice A est normale alors ou bien A est symétrique, ou bien il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ tels que :

$$A = \rho R_\theta$$

– Supposons, réciproquement, que A soit ou bien symétrique ou bien de *look* :

$$A = \rho R_\theta \quad \text{où} \quad \rho > 0 \ \text{ et } \ \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Ce n'est alors qu'une formalité que de vérifier que A est normale et nous nous permettons de laisser cette tâche à notre dévoué lecteur.

↱ Les matrices normales de notre seconde situation sont donc au choix les matrices de type :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad b \neq 0$$

ou celles ayant le *look* trigonométrique :

$$\rho R_\theta = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \rho > 0 \ \text{ et } \ \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Le texte semble privilégier le *trigolook*, mais il nous arrivera parfois de sérieusement préférer l'autre…

2. Reprenons le plan que nous venons de découvrir à l'instant.

– Si A est symétrique, nous proposons :

$$P = X$$

et le tour est joué.

– Si maintenant A est du genre :

$$A = \rho R_\theta \quad \text{où} \quad \rho > 0 \ \text{ et } \ \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

et si nous suivons le *hint* du texte, nous constatons mentalement que :

$$A + A^{\mathsf{T}} = 2\rho\cos\theta\, I_2$$

ou encore :

$$A^{\mathsf{T}} = 2\rho\cos\theta\, I_2 - A$$

Ici, la proposition :

$$P = 2\cos\theta - X$$

devrait satisfaire tout le monde.

3. Nous sommes repartis pour une attaque en deux temps.

– Supposons que A soit une matrice convenable. Il est tout d'abord dit que le polynôme :

$$X^2 - X + 1$$

est un annulateur de A et nous constatons dans la foulée qu'il n'a visiblement aucune racine *réelle*. Il est alors important de savoir en déduire — c'est le thème annulateur et spectre — que A n'a aucune valeur propre réelle ce qui, si l'on en croit un des lemmes de Cauchy, fait que A n'a aucune chance d'être symétrique réelle. La précédente question est du coup formelle la matrice A est au choix de *look* :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad b \neq 0$$

ou aussi le *look* trigonométrique ρR_θ mais que nous choisissons de ne pas pas retenir ici. Nous faisons maintenant appel à l'égalité :

$$A^2 - A + I_2 = 0$$

qui nous amène tranquillement au système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - a + 1 = 0 \\ b(2a - 1) = 0 \end{cases}$$

Comme b n'est pas nul, nous déduisons de la seconde que :

$$a = \frac{1}{2}$$

information qui, répercutée dans la première, révèle que :

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ce premier temps temps aura donc eu l'immense privilège de nous apprendre qu'il y a *au plus* deux matrices convenables, en l'occurrence :

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

– Puisqu'il n'y a aucune raison que ce soit toujours les mêmes qui triment, nous laissons à notre dévoué lecteur le soin de tester les deux matrices A_1 et A_2 et de découvrir avec joie qu'elles sont toutes les deux *farpaitement* idoines.

↱ Le lecteur trigonométriquement *aware* pourra aussi vérifier que :

$$A_1 = R_{\pi/3} \quad \text{et} \quad A_2 = R_{-\pi/3}$$

Partie 2

4.a. Comme :

$$\left(A^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = A$$

nous déduisons sans peine que :

$$(f^*)^* = f$$

b. Si f est inversible, la matrice A l'est également tout comme sa transposée d'ailleurs et nous ne pouvons ignorer que :

$$\left(A^{-1}\right)^{\mathsf{T}} = \left(A^{\mathsf{T}}\right)^{-1}$$

Il devrait alors tranquillement s'ensuivre que :

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

5.*a*. Soit i et j appartenant à $[\![1, n]\!]$. Le protocole de « matricialisation » révèle, sans ambages que :

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} e_k$$

et il en résulte quasi mentalement que :

$$< f(e_i) \mid e_j > = A_{ji}$$

puisque, c'est bien connu, la base canonique est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

↱ D'habitude, du moins chez nous, on note i l'indice de ligne et j l'indice de colonne. Ici on fait délibérément le contraire ce qui n'est peut-être pas très sympathique vis-à-vis de l'impétrant qui n'a pas toujours les yeux en face des trous et qui n'aime pas vraiment que l'on bouscule ses repères !

b. Soit x et y appartenant à $\mathbb{R}^n$. Base oblige, il existe des scalaires $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$$

et des linéarités respectives de f et de f^*, nous déduisons également que :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) \quad \text{et} \quad f^*(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j f^*(e_j)$$

C'est maintenant la bilinéarité du produit scalaire qui est sollicitée. Elle nous apprend tout d'abord que :

$$< f(x) \mid y > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < f(e_i) \mid e_j > \tag{1}$$

et ensuite que :

$$< x \mid f^*(y) > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < e_i \mid f^*(e_j) > \tag{2}$$

Soit alors i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Nous venons récemment d'établir que :

$$< f(e_i) \mid e_j > = A_{ji}$$

et l'on démontre *mutatis mutandis* que :

$$< e_i \mid f^*(e_j) > = A^{\mathsf{T}}_{ij}$$

Oui mais voilà, il ne fait aucun doute que :

$$A^{\mathsf{T}}_{ij} = A_{ji}$$

et au vu et au su des égalités (1) et (2)…

c. Nous venons déjà de montrer que f^* fait l'affaire. Supposons ensuite qu'un autre endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, mettons f_1^*, rende le même service et annonçons alors deux vecteurs x et y appartenant à $\mathbb{R}^n$. Nous avons à la fois :

$$< f(x) \mid y > = < x \mid f^*(y) >$$

et :

$$< f(x) \mid y > = < x \mid f_1^*(y) >$$

d'où il ressort très bilinéairement et par différence que :

$$< x \mid f^*(y) - f_1^*(y) > = 0$$

Le vecteur $f^*(y) - f_1^*(y)$ est donc désormais orthogonal à *tous* les vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Il est donc fatalement ratatiné et autant dire ainsi que :

$$f^*(y) = f_1^*(y)$$

Cette égalité étant d'actualité pour *tous* les vecteurs y de $\mathbb{R}^n$, nous avons finalement :

$$f^* = f_1^*$$

chronique d'une unicité fortement annoncée…

↱ Les initiés auront reconnu en f^* l'adjoint de l'endomorphisme f. Il est bon de savoir que la notion d'adjonction est un des produits phares, pour ne pas dire un incontournable, de l'algèbre bilinéaire. Dans l'égalité :

$$< f(x) \mid y > = < x \mid f^*(y) >$$

on observera ce joli balancement de l'étoile quand on passe de la gauche à la droite.

6. Nous allons faire un peu de zèle en annonçant carrément deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$. Grâce au jeu subtil de l'étoile de l'adjonction, nous avons tour à tour :

$$< f(x) \mid f(y) > = < x \mid f^* \circ f(y) > = < x \mid f \circ f^*(y) > = < f^*(x) \mid f^*(y) >$$

l'égalité centrale reposant *normalement* sur notre hypothèse et il en résulte en particulier que :

$$\|f(x)\|^2 = \|f^*(x)\|^2$$

en choisissant tout bêtement $y = x$.

7. Soit à nouveau x et y appartenant à $\mathbb{R}^n$. Parce que l'application g est linéaire et grâce à l'égalité d'Al Kashi, nous avons tout d'abord :

$$\|g(x+y)\|^2 = \|g(x)+g(y)\|^2 = \|g(x)\|^2 + 2 < g(x) \mid g(y) > + \|g(y)\|^2$$

Mutatis mutandis, nous avons également :

$$\|g^*(x+y)\|^2 = \|g^*(x)+g^*(y)\|^2 = \|g^*(x)\|^2 + 2 < g^*(x) \mid g^*(y) > + \|g^*(y)\|^2$$

et vu qu'il est hypothétiquement dit que :

$$\|g(x+y)\|^2 = \|g^*(x+y)\|^2 \quad ; \quad \|g(x)\|^2 = \|g^*(x)\|^2 \quad ; \quad \|g(y)\|^2 = \|g^*(y)\|^2$$

nous sommes en mesure de revendiquer l'égalité :

$$< g(x) \mid g(y) > = < g^*(x) \mid g^*(y) >$$

C'est là que nous sommes fortement récompensés du zèle de la question 6, puisque à bien y regarder et en y remplaçant f par g, notre toute dernière égalité se transforme en :

$$< x \mid g^* \circ g(y) > = < x \mid g \circ g^*(y) >$$

C'est alors toujours un peu la même histoire. On déduit d'abord bilinéairement que :

$$< x \mid g^* \circ g(y) - g \circ g^*(y) > = 0$$

On ressort ensuite l'argument du *gugusse* orthogonal à la terre entière et l'on parvient ainsi aisément et en beauté à :

$$g^* \circ g = g \circ g^*$$

Tout cela paraît alors totalement *normal*...

8. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$, notons B la matrice de f dans cette nouvelle base et notons également P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$. Nous commençons par avancer deux choses :

- la matrice P est orthogonale puisque les deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont orthonormales ;
- selon le théorème de changement de base, nous avons au choix :

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot P$$

la possibilité de choisir provenant justement de la récente orthogonalité de la matrice P. C'est assurément l'égalité :

$$B = P^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot P$$

que nous retenons pour la suite parce que d'un grand coup de *dressing undressing principle*, elle nous apprend que :

$$B^{\mathsf{T}} = P^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}} \cdot P$$

et comme il est *orthogonalement* acquis que :

$$P \cdot P^{\mathsf{T}} = I_n$$

nous pouvons clamer haut et fort que :

$$B \cdot B^{\mathsf{T}} = P^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot A^{\mathsf{T}} \cdot P \quad \text{et} \quad B^{\mathsf{T}} \cdot B = P^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot P$$

L'hypothèse assurant que A et sa transposée commutent, il devrait *normalement* s'ensuivre que :

$$B \cdot B^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot B$$

et il est alors temps de changer de partie.

↱ Il est curieux d'avoir choisi de commencer par $\mathbb{R}^n$ et d'*admettre* ensuite que tout fonctionne de la même façon dans n'importe quel espace euclidien. On aurait pu tout aussi bien — et aussi simplement — attaquer d'emblée dans un euclidien quelconque !

Partie 3

9. Comme les matrices A et A^{T} commutent(*), nul ne peut ignorer que :

$$\left(A^{\mathsf{T}} \cdot A\right)^p = \left(A^{\mathsf{T}}\right)^p \cdot A^p$$

et il en résulte effectivement que $S^p = 0$. Grâce au *dressing undressing principle* il advient aisément que la matrice S est symétrique et sa réalité ne peut échapper qu'à ceux — ou à celles — qui souffrent de diplopie avancée. Elle est donc justiciable du grand théorème spectral qui affirme en particulier qu'elle est diagonalisable. Autant dire alors qu'il existe une matrice inversible Q et des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$Q^{-1} \cdot S \cdot Q = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

et il est alors impossible de passer à côté de l'égalité :

$$Q^{-1} \cdot S^p \cdot Q = \begin{bmatrix} a_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^p \end{bmatrix}$$

Comme S^p est la matrice nulle, il s'ensuit immédiatement que :

$$a_1^p = \cdots = a_n^p = 0$$

(*) Lorsque deux matrices commutent les puissances de leur produit sont égales au produit de leurs puissances, mais si elles ne commutent pas…

d'où il ressort gentiment que :

$$a_1 = \cdots = a_n = 0$$

puisque les a_k ne sont que de misérables scalaires(*). Il semble donc en définitive que :

$$Q^{-1} \cdot S \cdot Q = 0$$

Un petit coup à gauche par Q et à droite par Q^{-1} et *boum* ! Voilà effectivement que :

$$S = 0$$

Il y a plusieurs façons de terminer l'affaire. Nous optons, par exemple, pour la (i,j) stratégie. Soit donc i appartenant à $[\![1,n]\!]$. Nous avons en particulier $S_{ii} = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(A^{\mathsf{T}} \cdot A\right)_{ii} = 0$$

égalité que la formule du produit matriciel d'Arthur Cayley transforme sur-le-champ en :

$$\sum_{j=1}^{n} A^{\mathsf{T}}_{ij} A_{ji} = 0$$

ou encore en :

$$\sum_{j=0}^{n} A^2_{ji} = 0$$

après une très tranquille gestion de transposition. L'argument final est classique. Nous avons devant les yeux une somme nulle de réels positifs ou nuls ce qui oblige instamment :

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \qquad A_{ji} = 0$$

et comme cela vaut aussi pour tous les i de $[\![1,n]\!]$…

↱ Une autre route eut pu également être la suivante. Vu que A est une matrice *réelle*, le professeur de la classe de deuxième année a dû quelque part établir que :

$$\mathsf{Ker}\left(A^{\mathsf{T}} \cdot A\right) = \mathsf{Ker}\, A$$

et la conclusion en résulte à nouveau assez facilement.

↱ Nous venons d'établir que les matrices normales nilpotentes ne courent pas plus les rues que les scalaires nilpotents !

10. Il est facile de voir — lecteur, crayon et *confetti* — que lorsque deux matrices commutent, leurs différentes puissances commutent également, ce qui, sans faire les présentations, peut s'écrire :

$$MN = NM \implies \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N} \qquad M^i N^j = N^j M^i$$

(*) Les scalaires nilpotents ne courent pas les rues…

Cette propriété passe alors allègrement aux polynômes matriciels en indiquant que quand deux matrices commutent, les polynômes matriciels par rapport à l'une commutent aux polynômes matriciels par rapport à l'autre et Lycée de Versailles !

Autre chose, comme la transposition est linéaire et se comporte fort bien avec les puissances, nous avons mentalement :

$$\big(P(A)\big)^{\mathsf{T}} = P\big(A^{\mathsf{T}}\big)$$

et forts de ces gentils arguments nous pouvons tranquillement affirmer que $P(A)$ est tout à fait normale. Dernière chose, comme nous connaissons parfaitement les propriétés officielles des polynômes matriciels, nous assénons que :

$$P^q(A) = \big(P(A)\big)^q$$

et la matrice $P(A)$ est désormais normale et nilpotente et si l'on en croit la neuvième question…

11. Nous partons de l'égalité :

$$M^2 + M - M^{\mathsf{T}} = I_n$$

et nous la transposons. Nous obtenons bien sûr :

$$\big(M^{\mathsf{T}}\big)^2 + M^{\mathsf{T}} - M = I_n$$

puisque la matrice unité est symétrique et que, au risque de radoter, la transposition fait un très bon ménage avec les puissances. L'addition membre à membre conduit sans surprise à :

$$M^2 + \big(M^{\mathsf{T}}\big)^2 = 2I_n$$

ce qui, en extirpant M^{T} de la première relation, devient :

$$M^2 + \big(M^2 + M - I_n\big)^2 = 2I_n$$

comme « ça commute » ici dans tous les sens, nous pouvons utiliser la formule du carré du trinôme pour développer le carré de $M^2 + M - I_n$ et après un palpitant calcul, l'on parvient à :

$$M^4 + 2M^3 - 2M - I_n = 0$$

Le polynôme :

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$$

est donc annulateur de M et à bien y regarder, il semble que son degré soit égal à 4. Il a en outre 1 comme racine évidente et il est alors très facile d'obtenir la première factorisation que voici :

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X-1)\big(X^3 + 3X^2 + 3X + 1\big)$$

que le *newtonien physio* transforme dans la foulée en :

$$X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X-1)(X+1)^3$$

Le polynôme $(X-1)(X+1)^3$ est donc désormais annulateur de la matrice M et nous sommes supposés savoir que tout multiple polynomial d'un annulateur l'est à son tour. Du coup le polynôme :

$$(X-1)^3(X+1)^3$$

annule la matrice M et l'on a effectivement :

$$\left(M-I_n\right)^3 \cdot \left(M+I_n\right)^3 = 0$$

Il faut maintenant capter que la matrice M est normale puisque sa transposée est carrément polynomiale en M. Considérons alors le polynôme :

$$P = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$$

Il semble que nous venions d'établir que :

$$P^3(M) = 0$$

et la *normale* question 10 est formelle. *No doubt that :*

$$P(M) = 0 \quad i.e. \quad M^2 = I_n$$

On répercute cela dans l'égalité initiale et voilà pour finir que :

$$M^{\mathsf{T}} = M$$

crónica de una simetría anunciada.

12. Cette question va nécessiter de sérieuses mises au point techniques en ce qui concerne les factorisations sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ des polynômes *réels* non constants. Le programme officiel parle timidement et seulement d'exemples de telles factorisations et cela ne devrait pas vraiment suffire surtout au vu et au su des futures questions 17 et 24 qui semblent prendre pour argent comptant le résultat suivant :

LEMME DE FACTORISATION DES POLYNÔMES RÉELS NON CONSTANTS :

Soit Q un polynôme réel unitaire non constant.

i. La factorisation complexe.

Il existe deux entiers naturels non tout les deux nuls r et t, des réels différents $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, des complexes non réels $\mu_1, \ldots, \mu_t$ tels que la liste :

$$(\mu_1, \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_t, \bar{\mu}_t)$$

soit formée de $2t$ nombres différents, et enfin des entiers naturels non nuls :

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_t$$

tout ce petit monde vérifiant allègrement :

$$Q = \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{t} (X-\mu_j)^{\beta_j} (X-\bar{\mu}_j)^{\beta_j} \tag{FC}$$

ii. La factorisation réelle, version basique.

Il existe deux entiers naturels non tout les deux nuls r et t, des réels différents $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et des réels $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_t$ vérifiant :

$$\forall j \in [\![1, t]\!] \qquad a_j^2 - 4b_j < 0$$

et enfin des entiers naturels non nuls :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_t$$

tous ces joyaux lurons vérifiant gentiment :

$$Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{t} \left(X^2 + a_j X + b_j\right)^{\beta_j} \qquad \text{(FRB)}$$

iii. La factorisation réelle, version trigonométrique.

Il existe deux entiers naturels non tout les deux nuls r et t, des réels différents $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, et des réels $\rho_1, \dots, \rho_t, \theta_1, \dots, \theta_t$ vérifiant :

$$\forall j \in [\![1, t]\!] \qquad \rho_j > 0 \quad \theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

et enfin des entiers naturels non nuls :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_t$$

toute cette petite bande vérifiant coquettement :

$$Q = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^{t} \left(X^2 - 2\rho_j \cos\theta_j X + \rho_j^2\right)^{\beta_j} \qquad \text{(FRT)}$$

↱ Même si le programme officiel n'est pas très explicite à propos de ces factorisations, il faut bien reconnaître que rien n'est vraiment difficile à partir du moment où l'on admet le théorème de D'Alembert-Gauss(*). Le point crucial est en effet l'officielle propriété que voici. Lorsqu'un complexe z est racine d'un polynôme *réel* son conjugué $\bar{z}$ *s'y enracine* également et avec la même multiplicité de surcroît. Le reste n'est alors que littérature procédant, pour (FRB), de l'égalité :

$$(X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j) = X^2 + a_j X + b_j$$

dans laquelle :

$$a_j = -(\mu_j + \bar{\mu}_j) = -2\,\Re(\mu_j) \quad \text{et} \quad b_j = |\mu_j|^2$$

puis pour, (FRT), de sa cousine :

$$(X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j) = X^2 - 2\rho_j \cos\theta_j X + \rho_j^2$$

(*) Qui lui est plutôt coriace !

si l'on choisit d'écrire μ_j sous la forme exponentielle :

$$\mu_j = \rho_j e^{i\theta_j}$$

Nous pouvons maintenant attaquer la redoutable douzième question.

Le professeur a fatalement établi en classe l'existence d'un polynôme annulateur réel non nul — carrément unitaire même — pour n'importe quelle matrice carrée et en particulier pour notre matrice A. Quitte à le multiplier par X, il reste annulateur unitaire de A et son degré est supérieur ou égal à un.

Nous disposons donc déjà d'un polynôme réel unitaire de degré supérieur ou égal à un qui a la bonté d'annuler la matrice A et nous décidons de le noter Q. Sa factorisation complexe permet alors de l'écrire sous la forme :

$$Q = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}\prod_{j=1}^{t}(X-\mu_j)^{\beta_j}(X-\bar{\mu}_j)^{\beta_j}$$

et cela nous donne l'idée de proposer pour P le polynôme *simplifié* :

$$P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)\prod_{j=1}^{t}(X-\mu_j)(X-\bar{\mu}_j)$$

puisqu'il n'a ouvertement que des racines simples, et pour q le *plus grand* — on peut aussi prendre la *somme* — des entiers $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_t$. Ce judicieux choix de q fait que le polynôme P^q est un multiple polynomial de l'annulateur Q et, à ce titre, il vérifie :

$$P^q(A) = 0$$

Remarquons pour finir que *basiquement*, nous avons également :

$$P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)\prod_{j=1}^{t}(X^2+a_jX+b_j)$$

écriture qui tout d'abord, révèle inéluctablement la réalité du polynôme P, et qui, *because* :

$$(r,t) \neq (0,0)$$

assure également sa non constance. Comme la précédente question oblige :

$$P(A) = 0$$

la messe est définitivement dite…

13. La définition même de l'ensemble I_A fait que le polynôme nul ne lui appartient pas(*) et nous espérons donc ne froisser personne en imposant *manu militari* « l'unitarité » des

(*) C'est le moment rêvé pour méditer sur les multiplicités des racines du polynôme nul !

éléments de I_A, les annulateurs non nuls non unitaires n'étant pas vraiment prisés par la profession. L'ensemble D_A est en conséquence une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est assurément pas vide puisqu'elle contient le degré du polynôme que nous avons mis en évidence lors de la question 12. Il reste alors à ne pas avoir oublié l'émotionnel théorème de la première fois selon lequel « toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ».

↱ Le texte, dans son chapeau, précise que l'entier n est supérieur ou égal à un et il est alors important de savoir que les polynômes de degré zéro n'annulent absolument aucune matrice d'ordre n. Cela *démontre* que l'entier d que nous venons de rencontrer est supérieur ou égal à un, ce qui va s'avérer plutôt rassurant pour la suite.

a. Il est déjà dit que π est annulateur de A et la teneur du théorème « annulateur et spectre » nous apprend que :

$$\operatorname{Spec} A \subset \operatorname{root} \pi$$

c'est-à-dire :

$$\operatorname{Spec} A \subset \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$$

Soit alors réciproquement $k \in [\![1, d]\!]$ et supposons par l'absurde que λ_k ne soit pas valeur propre de A. On écrit alors :

$$\pi = (X - \lambda_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} (X - \lambda_j)$$

à telle enseigne que, annulateur oblige, l'on ait :

$$(A - \lambda_k I_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} (A - \lambda_j I_n) = 0$$

Oui mais voilà, vu ce que nous avons suposé la matrice $A - \lambda_k I_n$ est inversible et du coup simplifiable à gauche dans l'égalité précédente, ce qui conduit à la perverse :

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} (A - \lambda_j I_n) = 0$$

méritant absolument son appellation puisqu'elle indique que le polynôme de degré $d - 1$:

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} (X - \lambda_j)$$

appartient inéluctablement à I_A ce qui est *minimalement* insupportable !

↱ Heureusement que nous avons justifié que $d \geqslant 1$, n'est-il pas ?

b. Vu les dispositions que nous avons prises, nous ne parlerons pas de coefficient dominant. Nous attaquons alors la question en deux temps.

– Il ne fait déjà pas l'ombre d'un doute que :

$$\pi = \prod_{j=1}^{d}(X - \lambda_j)$$

est un élément de degré d de I_A.

– Soit maintenant π_1 un autre élément de degré d de l'ensemble — autoritairement unitarisé ! — I_A. Nous ressortons le thème « annulateur et spectre » qui oblige :

$$\mathtt{Spec}\, A \subset \mathtt{root}\, \pi_1$$

et autant dire alors que $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont des racines *différentes* du polynôme π_1 et comme ce dernier est unitaire de degré d, il n'y a pas vraiment d'autre issue que :

$$\pi_1 = \pi$$

chronique d'une unicité annoncée…

14. Lors de la question 11, nous avons déjà démontré que :

$$M^2 = I_n$$

. La matrice M est donc ce qu'il est convenu d'appeler une matrice de « symétrie vectorielle » et nous savons alors depuis la classe de première année qu'elle est diagonalisable et qu'en tout et pour tout elle ne possède au plus que les deux valeurs propres -1 et 1. Oui mais voilà :

– si M ne possédait que la valeur propre 1, elle serait *mono valeur propre* 1 et diagonalisable ce qui, selon un sacré argument, obligerait l'inconcevable :

$$M = I_n$$

– si M ne possédait que la valeur propre 1, elle serait *mono valeur propre* -1 et diagonalisable ce qui, selon le même sacré, obligerait l'inacceptable :

$$M = -I_n$$

Bref, la matrice M ne posséde en tout et pour tout que les deux valeurs propres 1 et -1 et comme nous avons bien capté comment se construit π_M, nous revendiquons :

$$\pi_M = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$$

Partie 4

15. Comme A est normale, l'endomorphisme f l'est également et nous avons appris en question 6 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$$

Il en résulte mentalement que :

$$\mathsf{Ker}\, f = \mathsf{Ker}\, f^*$$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Après avoir gentiment observé que :

$$f^* - \lambda\,\mathrm{Id} = \big(f - \lambda\,\mathrm{Id}\big)^*$$

il ne fait plus aucun doute que :

$$\mathsf{E}_\lambda(f) = \mathsf{E}_\lambda(f^*)$$

Nous venons ainsi de démontrer que les espaces $\mathsf{E}_\lambda(\,\cdot\,)$ de l'endomorphisme f et de son adjoint sont rigoureusement identiques et comme leurs espaces propres sont précisément les espaces $\mathsf{E}_\lambda(\,\cdot\,)$ qui ne sont pas nuls…

16. Il semble que nous ayons quatre points à passer en revue et nous les traitons deux par deux.

- Soit $x \in \mathsf{Ker}\, Q(f)$.
  - Comme les polynômes d'endomorphismes en f commutent, c'est le cas de $Q(f)$ et de f et nous avons tour à tour :

$$Q(f)\big(f(x)\big) = Q(f) \circ f(x) = f \circ Q(f)(x) = f\big(Q(f)(x)\big)$$

et vu la position géographique de x ainsi que la linéarité de f, nous avons effectivement :

$$f(x) \in \mathsf{Ker}\, Q(f)$$

↱ La stabilité, par un endomorphisme u, de tous les noyaux — et de toutes les images aussi d'ailleurs — des polynômes d'endomorphisme en u est une propriété qui doit se trouver dans tous les cours dignes de ce nom ! Ce que nous venons de refaire n'est donc pas vraiment étonnant.

  - Il a été signalé plus haut que la « *commutance* » de f et f^* entraîne également celle des endomorphismes $Q(f)$ et f^* et un simple *copier-coller* amène alors à :

$$Q(f)\big(f^*(x)\big) = Q(f) \circ f^*(x) = f^* \circ Q(f)(x) = f^*\big(Q(f)(x)\big)$$

égalités qui conduiront à une analogue conclusion.

- Il nous faut maintenant causer de « *perpendicularité* ».

Le professeur a démontré en classe un important lemme de stabilité qui pourrait se résumer ainsi :

Lemme de stabilité :

Soit $(V, <\,,\,>)$ un espace euclidien, u un endomorphisme de E et W un sous-espace vectoriel de V. On suppose que u est symétrique. *Alors, si u stabilise W, ce même endomorphisme u stabilise également $W^\perp$.*

Lorsque u n'est plus n'est plus vraiment symétrique, on démontre, *mutatis mutandis*, que le sous-espace $W^\perp$ est encore stabilisé, sauf que ce n'est plus exactement par u, mais par son adjoint… Nous recommandons cependant à notre dévoué lecteur de s'assurer qu'il s'agit d'un *genuine mutatis mutandis*.

Forts de cet énorme *scoop*, vous pouvons clamer haut et fort que :

- vu que f stabilise F, l'adjoint f^* stabilise $F^\perp$;
- puisque f^* stabilise F son adjoint f^{**} stabilise $F^\perp$ et comme $f^{**} = f$…

Faut-il maintenant rappeler que le principe philosophique de la notion d'endomorphisme *induit*, est le non changement d'action — *the famous nca* —, principe selon lequel :

$$\forall x \in F \quad f_F(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in F^\perp \quad f_{F^\perp}(x) = f(x)$$

et lycée de Versailles pour f^*. Soit alors x et y appartenant à F. *Because nca*, nous avons tour à tour :

$$< f_F(x) \mid y > = < f(x) \mid y > = < x \mid f^*(y) > = < x \mid (f^*)_F(y) >$$

l'égalité centrale profitant de la propriété d'adjonction appliquée à f, propriété qui, appliquée maintenant à l'induit f_F, conduit également à :

$$< f_F(x) \mid y > = < x \mid (f_F)^*(y) >$$

L'*unicité* de l'adjoint dans l'espace euclidien(*) $\big(F, < \mid >\big)$ est alors formelle. Nous avons inéluctablement :

$$(f^*)_F = (f_F)^*$$

and, with crafty tactics, l'on se doute bien que l'on a également :

$$(f^*)_{F^\perp} = (f_{F^\perp})^*$$

Cela dit puisqu'il est *normalement* écrit que f et f^* commutent, ce n'est plus qu'une *nca* formalité que de vérifier que :

$$f_F \circ (f_F)^* = (f_F)^* \circ f_F \quad \text{et} \quad f_{F^\perp} \circ (f_{F^\perp})^* = (f_{F^\perp})^* \circ f_{F^\perp}$$

chroniques de deux normalités annoncées…

↱ L'ordre des phrases dans ces questions est pour le moins curieux. Il nous a fallu trouver l'adjoint de l'induit *avant* de prouver sa normalité et non l'inverse ! Nous avons d'ailleurs eu un anachronisme du même acabit lors de la question 11. Décidément…

17.a. Nous avons bien compris — question 13 — que les racines de π_A sont les valeurs propres complexes de la *matrice* A. En conséquence, celles d'entre-elles qui sont *réelles* ne sont, ni plus ni moins, que les valeurs propres de l'*endomorphisme* f. Ainsi λ se retrouve-t-il valeur propre de f ce qui doit aisément impliquer :

$$\mathsf{E}_\lambda(f) \neq \{0\}$$

(*) Comme cela se pratique habituellement, nous ne changeons pas la notation du produit scalaire quand on le restreint à $F \times F$.

Un vecteur e non nul dans cet espace est donc bien dans l'obligation d'exister même qu'il devrait être vecteur propre de f. Le sous-espace vectoriel :

$$\operatorname{Vect} e$$

est à coup sûr une droite vectorielle, qui, parce qu'elle est dirigée par un vecteur propre de f, est officiellement stabilisée par f.

b. L'absence de racines réelle de π_A a un gros impact sur sa réelle factorisation dont nous avons parlé quelques lignes plus haut. En factorisation basique, elle a obligatoirement le *look* (FRB) :

$$\pi_A = \prod_{j=1}^{t} (X^2 + a_j X + b_j)$$

où t est un entier naturel non nul et où :

$$\forall j \in [\![1, t]\!] \quad a_j^2 - 4b_j < 0$$

La mission annulatrice de notre polynôme nous amène alors à :

$$\prod_{j=1}^{t} (f^2 + a_j f + b_j \operatorname{Id}) = 0$$

égalité qui a au moins le privilège de mettre en lumière t endomorphismes ayant le type très recherché :

$$f^2 + af + b \operatorname{Id} \quad \text{où} \quad a^2 - 4b < 0$$

et ce serait bien le diable que, dans la bande, il n'y en ait pas au moins un *very interesting for us*.

Nous allons — merci Zénon ! — nous en assurer *by contradiction*. Supposons ainsi à cet effet que, pour tout $j \in [\![1, t]\!]$, l'endomorphisme :

$$f^2 + a_j f + b_j \operatorname{Id}$$

soit inversible. Un composé d'endomorphismes inversibles étant à son tour inversible, ce serait donc le cas de l'endomorphisme nul, mais comme n est non nul(*)…

↱ Notons pour nous rassurer que, selon la question 16, le sous-espace G est *stable* par f ce qui donne du sens à l'induit $g = f_G$.

c. Il y a deux choses, certes facilement captables, que le texte aurait pu faire un peu plus émerger.

– *primo*, l'adjoint d'une somme d'endomorphismes n'est autre que la somme de leurs adjoints ;

– *deuzio*, les endomorphismes *symétriques* sont exactement ceux qui sont leurs *own adjoints*, ce qui leur vaut d'ailleurs parfois le qualificatif d'endomorphismes « auto-adjoints ».

(*) En dimension non nulle, l'endomorphisme nul n'est pas inversible mais, bizarrement, il l'est en dimension zéro…

Grâce à ces précieuses allégations et à une certaine question $4.a$, il devrait tranquillement en résulter que :

$$h^* = g^* + g^{**} = g^* + g = h$$

et l'endomorphisme h hériterait alors d'une très providentielle symétrie. Il reste alors une chose à préciser en ce qui concerne l'espace G. Il est dit que $f^2 + af + b\,\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, son noyau n'est donc pas réduit à zéro et par conséquent :

$$\dim G \geqslant 1$$

Bref, h est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à un et le théorème spectral emporte spectaculairement l'affaire.

↱ On peut sûrement tergiverser à propos de la diagonalisabilité en dimension zéro, mais une chose est claire, un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à un possède au moins un vecteur propre. Le vecteur e est donc bel et bien là !

Nous noterons α la valeur propre de h attachée au vecteur propre e.

d. We have a lot to do ! Nous allons même numéroter nos tâches.

i. Supposons par l'absurde que la famille $\big(e, f(e)\big)$ soit liée. Comme e n'est *proprement pas nul*, il existerait un *réel* λ tel que :

$$f(e) = \lambda e$$

mais cela est hors de question puisque, dans le cas présent, f n'a aucune valeur propre vu que π_A est fort dépourvu(*) de racine réelle…

L'espace vectoriel F est donc déjà un plan vectoriel et c'est bien.

ii. Il faut ensuite causer de stabilité de F par f ce qui, nous le savons bien, ne nécessite que les deux appartenances :

$$f(e) \in F \quad \text{et} \quad f\big(f(e)\big) \in F$$

- la première appartenance ne mérite évidemment rien de plus que *no comment* ;
- quant à la seconde, puisque e appartient au noyau de $f^2 + af + b\,\mathrm{Id}$, nous avons :

$$f^2(e) = -be - af(e)$$

dont l'appartenance à F se voit comme le nez au milieu…

iii. Il reste, pour finir, à papoter de stabilité de F par l'adjoint f^* ce qui, comme *supra*, passe cette fois par les deux appartenances :

$$f^*(e) \in F \quad \text{et} \quad f^*\big(f(e)\big) \in F$$

(*) *Comme la cigale !*

– En ce qui concerne *la primera* nous commençons par faire valoir que :

$$f^*(e) = (f^*)_G(e) = (f_G)^*(e) = g^*(e)$$

la position géographique de e et la fin de la question 16 — adjoint de l'induit, induit de l'adjoint, même combat ! — n'étant pas totalement étrangers à l'affaire. Nous poursuivons en écrivant :

$$g^*(e) = h(e) - g(e) = \alpha e - f(e)$$

égalités reposant sur la même géographie et surtout sur la h-propreté du vecteur e. Il résulte ainsi de tout cela que :

$$f^*(e) \in F$$

ce qui est déjà sympathique.

– Nous avons pour finir :

$$f^*\big(f(e)\big) = f^* \circ f(e) = f \circ f^*(e) = f\big(f^*(e)\big)$$

la *normalité* de la situation étant évidemment au cœur du débat. Nous venons d'apprendre à l'instant que $f^*(e)$ appartient à F et un peu plus tôt que f stabilise F. Il n'en faut pas plus pour réclamer :

$$f^*\big(f(e)\big) \in F$$

et pour envisager de changer de question.

18. Le décor choisi par le texte n'est décidément pas le bon. Comme nous l'avons déjà fait remarquer à la fin de la partie **2**, le cadre idéal eut été celui d'un espace euclidien *quelconque* de dimension n et non le carcan $\mathbb{R}^n$. Voilà donc notre nouvelle version de la dix-huitième question.

18. *Soit* $\big(E, <\ |\ >\big)$ *un espace euclidien de dimension* n *et* f *un endomorphisme de* E. *On suppose que* f *est normal. Démontrer qu'il existe une base orthonormale* $\mathcal{C}$ *de* E *dans laquelle la matrice de* f *est de la forme :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & \square_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *sont des réels et où, pour chaque* $j \in [\![1, s]\!]$, *le bloc* $\square_j$ *est une matrice carrée* $(2, 2)$ *de genre :*

$$\square_j = \rho_j R_{\theta_j}$$

dans laquelle :

$$\rho_j > 0 \quad \text{et} \quad \theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Quand, en classe, le professeur a démontré le théorème spectral, il a sûrement dû procéder par récurrence sur la dimension de l'espace euclidien ambiant. Comme nous sommes ici dans une situation analogue, nous ne changeons pas une équipe qui gagne et nous suggérons donc une preuve par induction sur l'entier $n \geqslant 1$. En outre, comme certains arguments vont être identiques à ceux, *spectralement* développé en classe par le maître, il nous arrivera parfois de « glisser » allègrement sur ces points là.

• Si $n = 1$, l'argument est exactement le même que le *spectrally yours*. *So*...

• Supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème acquis dans tous les euclidiens de dimension *inférieure ou égale* à n et considérons alors un espace euclidien $\big(E, < \mid >\big)$ de dimension $n+1$ ainsi que f un endomorphisme normal de E. Utilisons maintenant les pépites de la question 17.

– Supposons tout d'abord que f et f^* stabilisent une droite D. Celle-ci est fatalement dirigée par un vecteur propre ε_0 de f, que l'on peut évidemment supposer unitaire, et dont nous noterons λ_0 la valeur propre attachée. La question 16 assure que $f_{D^\perp}$ est un endomorphisme normal de $D^\perp$ et la formule « dimension d'un orthogonal » révèle quant à elle que :

$$\dim D^\perp = \dim E - \dim D = n$$

L'hypothèse de récurrence s'applique et il existe donc une base orthonormale :

$$\epsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

de $D^\perp$ dans laquelle la matrice de $f_{D^\perp}$ a la forme si fortement prisée dans cette question, mettons :

$$\operatorname{Mat}_\epsilon(f_{D^\perp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & \square_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

Il ne fait aucun doute — exactement comme en classe — que :

$$\mathcal{C} = \big(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\big)$$

est une base orthonormale de E. Observons ensuite que :

$$f(\varepsilon_0) = \lambda_0 \varepsilon_0$$

et que — non changement d'action merci ! — il est dit que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad f(\varepsilon_j) = f_{D^\perp}(\varepsilon_j)$$

la matrice de f dans $\mathcal{C}$ a le *look* :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & & & & 0 \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_p & & & \\ & & & & \square_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

et tout le monde est ravi.

– Supposons maintenant que f et f^* stabilisent un plan P. En question 17, ce cas est d'actualité lorsque f ne possède aucune valeur propre et il va donc en être de même des induits f_P et $f_{P^\perp}$, par ailleurs très normaux depuis la question 16. Le théorème d'existence des bases orthonormales dans les espaces euclidiens autorise la considération d'une base orthonormale $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ de P et selon les questions 1 — seconde situation — et 8, la matrice de f_P dans cette base est de la forme :

$$\square_0 = \rho_0 R_{\theta_0} \quad \text{où} \quad \rho_0 > 0 \;\text{ et }\; \theta_0 \in \mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$$

Maintenant, puisque :

$$\dim P^\perp = n - 1$$

l'hypothèse de récurrence s'applique au normal $f_{P^\perp}$ et il existe ainsi une base orthonormale :

$$(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

de $P^\perp$ telle que la matrice de $f_{P^\perp}$ dans cette base soit de type :

$$\begin{bmatrix} \square_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \square_s \end{bmatrix}$$

l'absence, cette fois, de valeurs propres étant totalement responsable de la disparition des réels λ_i dans cette matrice. *As usual*, la famille :

$$\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

est une base orthonormale de E et toujours, *because nca*, nous avons ici :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} \square_0 & & & 0 \\ & \square_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \square_s \end{bmatrix}$$

ce qui ne fera de mal à personne !

19. La réponse est désormais claire. Ce sont *exactement* celles qui se diagonalisent *réellement* et en base orthonormale de surcroît !

Partie 5

20. Soit z un complexe convenable. Nous devons avoir :

$$\begin{cases} (z+1)^7 = z^7 + 1 \\ (z+1)^6 = z^6 \end{cases}$$

En écrivant :

$$(z+1)^7 = (z+1)(z+1)^6 = z(z+1)^6 + (z+1)^6$$

on en déduit aisément que :

$$(z+1)^6 = z^6 = 1$$

et z fait donc partie de l'ensemble $\mathbb{U}_6$ des racines sixièmes complexes de l'unité. Notre cultivé lecteur se souvient sûrement de l'année de ses *seventies* durant laquelle il a dû apprendre que :

$$\mathbb{U}_6 = \left\{1, -1, j, j^2, -j, -j^2\right\}$$

où j désigne le fameux complexe :

$$j = e^{2i\pi/3}$$

vérifiant la bien connue :

$$1 + j + j^2 = 0$$

Nous allons maintenant passer en revue les diverses possibilités pour z.

- Si $z = 1$, nous avons :

$$(z+1)^6 = 2^6 \quad \text{et} \quad z^6 = 1$$

- Si $z = -1$, nous avons cette fois :

$$(z+1)^6 = 0 \quad \text{et} \quad z^6 = 1$$

- Si $z = -j$ ou $z = -j^2$, on a facilement et quasi mentalement :

$$|z+1| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad |z| = 1$$

Bref, les seuls complexes *potentiellement* convenables sont $z = j$ et $z = j^2$ et il est très facile — lecteur à toi l'honneur ! — de constater qu'ils le sont *définitivement*.

À bien y regarder, grâce à la caractérisation des multiplicités *via* les dérivées succssessives, nous venons de démontrer que les complexes j et j^2 sont, chacun, racine de P d'ordre de multiplicité au moins égal à deux et il est impensable de ne pas avoir aperçu les racines réelles 0 et -1. Notre parfaite maîtrise de la factorisation polynomiale fait alors que le polynôme :

$$X(X+1)\big(X-j\big)^2\big(X-j^2\big)^2$$

divise P et comme ce dernier est ouvertement de degré 6 et de coefficient dominant 7(*) nous revendiquons :

$$P = 7X(X+1)\big(X-j\big)^2\big(X-j^2\big)^2$$

ce qui constitue la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$. Maintenant, étant donné qu'il est bien connu que :

$$\big(X-j\big)\big(X-j^2\big) = X^2 + X + 1$$

(*) Le « binomage » de $(X+1)^7$ et quelques bénignes simplifications conduisent aisément à l'égalité :

$$P = 7X^6 + 21X^5 + 35X^4 + 35X^3 + 21X^2 + 7X$$

nous avons également :

$$P = X(X+1)\left(X^2+X+1\right)^2$$

chronique d'une factorisation *réelle* annoncée.

↱ Nous avons déjà évoqué l'égalité :

$$P = 7(X^6+3X^5+5X^4+5X^3+3X^2+X)$$

Les racines très évidentes 0 et -1 révèlent la mise en facteur du produit $X(X+1)$ et c'est alors assez facilement que l'on parvient à :

$$P = 7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)$$

Grâce à la formule du carré du trinôme, en l'occurrence :

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

le *physio* se réveille et assène que :

$$X^4+2X^3+3X^2+2X+1 = X^4+X^2+1+2X^3+2X^2+2X = \left(X^2+X+1\right)^2$$

et nous obtenons le même résultat sans avoir à résoudre de fastidieux systèmes…

21. La question est assez violente, c'est le moins que l'on puisse dire ! Allons-y calmement.

– Il faut tout d'abord bien comprendre comment l'on obtient une « réduite » de f comme celle obtenue lors de la dix-huitième question. Les λ_k sont les valeurs propres *réelles* de la matrice A et les blocs :

$$\square_h = \rho_h R_{\theta_h} = \rho_h \begin{bmatrix} \cos\theta_h & \sin\theta_h \\ -\sin\theta_h & \cos\theta_h \end{bmatrix}$$

correspondent aux couples de valeurs propres complexes non réelles mais conjuguées :

$$\left(\rho_h e^{i\theta_h}, \rho_h e^{-i\theta_h}\right)$$

À bon entendeur donc !

– Il est dit ensuite, depuis le début, que :

$$A\left(A+I_n\right)\left(A^2+A+I_n\right)^2 = 0$$

le polynôme P ayant, entre-temps, subi un *lifting* factorisant. Oui mais voilà, le texte précise que la matrice A est inversible, à telle enseigne qu'après multiplication à gauche par A^{-1}, nous avons aussi :

$$\left(A+I_n\right)\left(A^2+A+I_n\right)^2 = 0$$

Le polynôme :

$$(X+1)(X^2+X+1)^2$$

est donc désormais annulateur de A, ses racines sont ouvertement le réel -1, le complexe non réel j et bien sûr son conjugué j^2, et nous sommes alors tenus de savoir que ce sont aussi les seules valeurs propres possibles de A. Il existe ainsi une base orthonormale $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit du genre :

$$\mathsf{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & \square_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

où, pour tout $h \in [\![1, s]\!]$, le bloc $\square_h$ n'est ni plus ni moins que :

$$\square_h = \begin{bmatrix} \cos 2\pi/3 & \sin 2\pi/3 \\ -\sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{bmatrix}$$

puisque nous avons pris soin de rappeler que :

$$j = e^{2i\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

– Nous rappelons maintenant un théorème important.

Caractérisation de l'orthogonalité via les colonnes :

Soit U une matrice carrée réelle d'ordre n. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice U est orthogonale, autrement dit :

$$U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

ii. Les colonnes de U forment une famille orthonormale de l'espace $\mathsf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ équipé de sa structure euclidienne canonique.

Cela étant, il est totalement lumineux que toutes les matrices de type :

$$\begin{bmatrix} \omega_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \omega_p & & & \\ & & & \square_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \square_s \end{bmatrix}$$

où :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \qquad \omega_k \in \{-1, 1\}$$

et où :

$$\forall h \in [\![1, s]\!] \qquad \square_h = \begin{bmatrix} \cos\theta_h & \sin\theta_h \\ -\sin\theta_h & \cos\theta_h \end{bmatrix} \qquad \theta_h \in \mathbb{R}$$

sont mentalement orthogonales, les raisons essentielles étant tout bêtement les égalités :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \text{et} \quad \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$$

On notera la *cruciale* absence de réels « ρ » dans les blocs $\square_h$ de cette affaire.

– La matrice dans la base $\mathcal{C}$ de f, puisqu'elle a justement le *look* que nous venons d'évoquer, est donc définitivement orthogonale et nous la noterons M.

Il est alors temps de faire le bilan. Nous avons :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) \quad ; \quad M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$$

et les deux bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{C}$ sont orthonormales. La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{C}$ est donc officiellement orthogonale et le théorème de changement de base est formel. Il stipule que :

$$A = PMP^{-1}$$

Nous n'avons pas oublié que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable pour l'inversion et *in fine*, la matrice A est produit de trois matrices orthogonales et comme nous n'avons pas non plus égaré la stabilité de l'orthogonalité pour la multiplication…

22. Nous avons déjà remarqué que :

$$(I_n + A)(I_n + A + A^2)^2 = 0$$

et après multiplication à gauche par $I_n + A$, nous avons aussi :

$$(I_n + A)^2(I_n + A + A^2)^2 = 0$$

égalité qui, puisque les polynômes en A commutent, peut également s'écrire :

$$\left[(I_n + A)(I_n + A + A^2)\right]^2 = 0$$

Comme A est normale, la délicieuse question 10 tombe à pic et révèle qu'en réalité :

$$(I_n + A)(I_n + A + A^2) = 0$$

qu'un simple développement transforme en :

$$I + 2A + 2A^2 + A^3 = 0$$

Nous avons du coup :

$$A(-2I_n - 2A - A^2) = I_n$$

puis carrément :

$$A^{-1} = -2I_n - 2A - A^2$$

grâce à la multiplication à gauche par A^{-1}. En bref, la matrice A^{-1} est un polynôme en A et comme depuis peu :

$$A^{\mathsf{T}} = A^{-1}$$

nous pouvons changer de question.

↱ Il n'est pas exclu que le professeur ait évoqué en classe le résultat suivant :

ANNULATEUR ET INVERSIBILITÉ :

Soit U une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à un. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i. La matrice U est inversible.

ii. La matrice U possède un polynôme annulateur dont le terme constant n'est pas nul.

En outre et cerise sur le gâteau, lorsque U est inversible, son inverse U^{-1} est toujours un polynôme en U c'est-à-dire :

$$U^{-1} \in \mathbb{K}[U]$$

Ceci explique donc cela…

23. Au risque de radoter, nous rappelons que le polynôme :

$$(X+1)\left(1+X+X^2\right)$$

est annulateur de A et vu l'état de ses racines, il semblerait que :

$$\mathtt{Spec}_{\mathbb{C}}\, A \subset \left\{-1, j, j^2\right\}$$

et il est temps de discuter *un poquitín*.

– Si le réel -1 n'était pas valeur propre, il n'y aurait pas de « -1 » dans notre super réduite M qui aurait donc l'aspect suivant :

$$M = \begin{bmatrix} \square_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \square_s \end{bmatrix}$$

Nos petits blocs $\square_h$ étant d'ordre 2, l'ordre de M serait l'entier *pair* :

$$n = 2s$$

ce que le texte a définitivement écarté.

– À l'opposé, si les complexes j et j^2 n'étaient pas des valeurs propres de A, ce sont nos petits blocs $\square_h$ qui quitteraient le navire de la réduite M qui deviendrait alors :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} = -I_n$$

La matrice A finirait donc par être semblable à $-I_n$ et par conséquent égale(*) à $-I_n$ et cela non plus, n'est pas d'actualité.

Bref, nous avons en réalité :

$$\mathtt{Spec}_{\mathbb{C}}\, A = \{-1, j, j^2\}$$

et comme nous avons bien compris comment se trame le polynôme π_A, nous pouvons revendiquer l'égalité :

$$\pi_A = (X+1)(1+X+X^2)$$

Partie 6

24. Nous avons déjà eu l'occasion d'observer que la matrice A est *orthogonalement* semblable à la réduite M de la question 18 ce qui signifie l'existence d'une matrice *orthogonale* P telle que l'on ait au choix :

$$A = PMP^{-1} = PMP^{\mathsf{T}}$$

Vu la situation que l'on nous propose ici notre réduite M est maintenant diagonale et, si cele ne dérange personne, nous la noterons plutôt D pour bien marquer sa *diagonalitude*. Nous avons alors :

$$A = PDP^{\mathsf{T}}$$

égalité qui, après un petit coup de *dressing undressing principle* et parce que les diagonales sont symétriques, amène mentalement à :

$$A^{\mathsf{T}} = A$$

chronique d'une symétrie *a priori* inattendue mais *a posteriori* bien prévisible…

Vu les exigences du projet, nous allons devoir faire un peu attention.

– Si $n \geqslant 2$, le polynôme :

$$P = X$$

semble *farpaitement* faire l'affaire d'autant que son degré est ouvertement idoine.

– En revanche, si $n = 1$, il existe un réel a tel que :

$$A = [a]$$

et le polynôme constant $P = a$ est assurément *adhoc*.

25. Il nous est déjà arrivé de noter P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{C}$, matrice dont nous avons, *au passage*, signalé l'orthogonalité. Le théorème de changement de base est à nouveau mis à contribution et voilà donc que :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = P^{-1} \cdot \mathtt{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^*) \cdot P = P^{\mathsf{T}} \cdot \mathtt{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^*) \cdot P$$

(*) Nul ne peut ignorer que quand on est semblable à λI_n, on est fatalement égal à λI_n…

la possibilité de choisir entre la transposée de P et son inverse étant l'un des privilèges de l'orthogonalité. Autant dire alors que :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = P^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}} \cdot P$$

égalité que l'ineffable *dressing undressing* transforme dans la foulée en :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = \left(P^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot P\right)^{\mathsf{T}}$$

Le *physio* ayant assurément capté que :

$$P^{\mathsf{T}} \cdot A \cdot P = \mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = M$$

il s'avère, comme l'on pouvait s'y attendre, que la matrice dans $\mathcal{C}$ de l'adjoint f^* n'est autre que la transposée de celle de f, ce qui, compte tenu des notations que nous avons adoptées, s'écrit aussi :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = M^{\mathsf{T}}$$

26. L'équivalence logique oblige une organisation en deux temps.

$i.$ $\Rightarrow$ Nous commençons par déduire de l'hypothèse que :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f^*) = \mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(P(f)) = P\Big(\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\Big)$$

la dernière égalité reposant sur les excellentes propriétés de l'opérateur :

$$\mathtt{Mat}_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

que sont sa linéarité et sa compatibilité avec la composition(*). Oui mais voilà, compte tenu de la précédente cela devient gentiment :

$$M^{\mathsf{T}} = P(M)$$

Nous demandons alors à notre dévoué lecteur d'accepter sans sourciller que l'égalité précédente se détaille en réalité en :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \square_1^{\mathsf{T}} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \square_t^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & P(\lambda_r) & & & \\ & & & P(\square_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & P(\square_t) \end{bmatrix}$$

(*) Les initiés parlent de morphisme d'algèbre.

l'égalité :

$$P(M) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & P(\lambda_r) & & & \\ & & & P(\square_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & P(\square_t) \end{bmatrix}$$

réclamant, par ci, par là, quelque dextérité avec les produits par bloc — pas vraiment officiels d'ailleurs — mais au point où nous en sommes…

Soit tout d'abord $k \in [\![1, r]\!]$. L'égalité :

$$\lambda_k = P(\lambda_k)$$

doit, bien sûr, ne casser aucune patte de palmipède.

Soit maintenant $k \in [\![1, t]\!]$. Ce qui est totalement limpide est évidemment l'égalité :

$$\square_k^{\mathsf{T}} = P(\square_k)$$

mais il semble que la route soit encore longue… Nous devons donc nous organiser en conséquence.

– Nous commençons par rappeler que :

$$\square_k = \rho_k \begin{bmatrix} \cos\theta_k & \sin\theta_k \\ -\sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$$

et que :

$$\mu_k = \rho_k\big(\cos\theta_k + i\sin\theta_k\big)$$

et nous observons également que $\square_k^{\mathsf{T}}$ se déduit de $\square_k$ en changeant tout bêtement θ_k en son opposé.

– Il se trouve maintenant que toutes les matrices de type :

$$\rho \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

sont très sympathiquement $\mathbb{C}$-diagonalisables, le fabuleux côté de l'affaire reposant sur une diagonalisation *via* une matrice de passage Q qui ne dépend ni de ρ, ni de θ. Après une rapide recherche d'éléments propres, *as usual* laissée à la sagacité de l'impétrant, il s'avère en effet que la matrice :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

qui ne dépend *caïman* de personne vérifie l'égalité :

$$\rho\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix}\mu & 0\\ 0 & \bar{\mu}\end{bmatrix}Q^{-1}$$

où, à la surprise générale, nous avons noté :

$$\mu = \rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$$

– Il résulte alors de toutes ces belles choses que :

$$\square_k^{\mathsf{T}} = Q\begin{bmatrix}\bar{\mu}_k & 0\\ 0 & \mu_k\end{bmatrix}Q^{-1} \quad \text{et} \quad \square_k = Q\begin{bmatrix}\mu_k & 0\\ 0 & \bar{\mu}_k\end{bmatrix}Q^{-1}$$

et nous sommes alors impérativement tenus de savoir que :

– *primo*, l'on a l'égalité :

$$P(\square_k) = Q\cdot P\left(\begin{bmatrix}\mu_k & 0\\ 0 & \bar{\mu}_k\end{bmatrix}\right)\cdot Q^{-1}$$

qui pourrait s'inscrire dans le thème « polynôme matriciel et similitude » ;

– *Deuzio*, l'on a l'officielle(*) :

$$P\left(\begin{bmatrix}\mu_k & 0\\ 0 & \bar{\mu}_k\end{bmatrix}\right) = Q\begin{bmatrix}P(\mu_k) & 0\\ 0 & P(\bar{\mu}_k)\end{bmatrix}Q^{-1}$$

Il semble bien désormais que nous soyons au bout du chemin puisque que nous venons de parvenir à :

$$Q\begin{bmatrix}\bar{\mu}_k & 0\\ 0 & \mu_k\end{bmatrix}Q^{-1} = Q\begin{bmatrix}P(\mu_k) & 0\\ 0 & P(\bar{\mu}_k)\end{bmatrix}Q^{-1}$$

d'où il ressort en particulier et quasi mentalement que :

$$P(\mu_k) = \bar{\mu}_k$$

$ii.$ $\Leftarrow$ On suppose maintenant que :

$$\forall k\in[\![1,r]\!]\quad \lambda_k = P(\lambda_k) \quad \text{et} \quad \forall k\in[\![1,t]\!]\quad \bar{\mu}_k = P(\mu_k)$$

Comme P est un polynôme réel, il s'ensuit sans problème que l'on a également :

$$\forall k\in[\![1,t]\!]\quad \mu_k = P(\bar{\mu}_k)$$

(*) Un peu plus haut nous avions un polynôme en une matrice bloc-diagonale d'où la demande expresse d'admettre le *déblocage* de la situation alors qu'ici nous avons un polynôme en une *genuine* matrice diagonale. *So*…

et du coup tout se « remonte » aisément jusqu'à l'obtention de :

$$M^{\mathsf{T}} = P(M)$$

qui n'est autre que la matricielle façon d'écrire l'égalité :

$$f^* = P(f)$$

↱ Sacrée question n'est-il pas ?

27. Le texte a pris soin de préciser que les r réels :

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$$

sont deux à deux distincts, ainsi que les $2t$ complexes non réels :

$$\mu_1, \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_t, \bar{\mu}_t$$

Les dénominateurs des polynômes en question sont donc assurément non nuls, les joyeux lurons L_j, Q_j et T_j sont là et bel et bien là mais, ici encore, il semble qu'il y ait pas mal de pain sur la planche !

– Soit tout d'abord $j \in [\![1, r]\!]$. Comme le polynôme Q est réel et que les λ_k le sont également, il ne fait aucun doute que :

$$L_j \in \mathbb{R}[X]$$

– Soit ensuite $j \in [\![1, t]\!]$. Nous allons devoir commencer par un petit prolégomène de conjugaison polynomiale.

L'on se doute bien que lorsque H est un polynôme complexe, l'on définit son conjugué comme étant le polynôme, noté $\overline{H}$, dont les coefficients sont les conjugués de ceux de H. Autrement dit et sans faire de fioritures, si l'on a :

$$H = \sum_{k=0}^{m} h_k X^k$$

l'on a dans la foulée :

$$\overline{H} = \sum_{k=0}^{m} \bar{h}_k X^k$$

Les propriétés de la conjugaison des nombres complexes, largement développées durant l'année de nos *seventies*, se transmettent sans sourciller à la conjugaison des polynômes et nous avons du coup des choses polynomiales du genre :

$$\overline{H_1 + H_2} = \overline{H}_1 + \overline{H}_2 \quad ; \quad \overline{H_1 \cdot H_2} = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2$$

ou aussi :

$$H \in \mathbb{R}[X] \Leftrightarrow H = \overline{H} \quad ; \quad H + \overline{H} \in \mathbb{R}[X]$$

et d'autres choses encore que le lecteur découvrira au fur et à mesure.

Maintenant que nous sommes aguerris à cette nouvelle conjugaison il devrait être assez limpide que :

$$T_j = \overline{Q}_j$$

la réalité du polynôme S ayant eu, bien entendu et quelque part, son pesant d'arachide. Il en résulte alors tour à tour que :

$$\bar{\mu}_j Q_j + \mu_j T_j = \bar{\mu}_j Q_j + \mu_j \overline{Q}_j = \bar{\mu}_j Q_j + \overline{\bar{\mu}_j Q_j}$$

ce qui montre également que :

$$\bar{\mu}_j Q_j + \mu_j T_j \in \mathbb{R}[X]$$

De là à en déduire que P est un polynôme *réel*, il n'y a qu'un misérable pas que nous franchissons dans la plus grande des allégresses !

↱ Le texte semble ici avoir oublié une partie de son projet, en l'occurrence l'allégation concernant le degré de P. Nous allons donc combler ce vide insupportable ! Il suffit en effet de savoir compter sur ses doigts pour se convaincre de ce que :

$$\forall j \in [\![1, r]\!] \quad \deg L_j = r + 2t - 1 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![1, t]\!] \quad \deg Q_j = \deg T_j = r + 2t - 1$$

et il en résulte alors très tranquillement que :

$$\deg P \leqslant r + 2t - 1$$

Oui mais voilà, vu les origines ethniques des nombres λ_k et autres μ_k, $\bar{\mu}_k$, il ne fait pas l'ombre d'un doute que :

$$r + 2t \leqslant n$$

à telle enseigne qu'en réalité :

$$\deg P \leqslant n - 1$$

and the gap is filled...

– Si l'on en croit désormais la terrible question 26, le pain qui reste sur la planche doit passer par le calcul des nombres :

$$P(\lambda_k) \quad \text{et} \quad P(\mu_k)$$

où, histoire de rafraîchir un peu les mémoires, nous avons :

$$P = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j L_j + \sum_{j=1}^{t} (\bar{\mu}_j Q_j + \mu_j T_j)$$

We've to roll up one's sleeves !

– Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Les habitués des « galipettes lagrangiennes » n'auront aucun mal à constater que :

$$L_j(\lambda_k) = \delta_{jk} \ \text{ si } \ j \in [\![1, r]\!] \quad ; \quad Q_j(\lambda_k) = T_j(\lambda_k) = 0 \ \text{ si } \ j \in [\![1, t]\!]$$

la finesse du gadget de Kronecker étant toujours très appréciée dans ce genre de situation.

Dans ces conditions, il ne fait plus alors aucun doute que :

$$P(\lambda_k) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j L_j(\lambda_k) + \sum_{j=1}^{t} \big(\bar{\mu}_j Q_j(\lambda_k) + \mu_j T_j(\lambda_k)\big) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \delta_{jk}$$

et après une toujours aussi ludique gestion du *delta* de Leopold, voilà que :

$$P(\lambda_k) = \lambda_k$$

Nous venons ainsi de gagner le premier *round* de la 26.

– Soit maintenant $k \in [\![1, t]\!]$. On trouve de la même façon que :

$$L_j(\mu_k) = 0 \text{ si } j \in [\![1, r]\!] \quad ; \quad Q_j(\mu_k) = \delta_{jk} \text{ et } T_j(\mu_k) = 0 \text{ si } j \in [\![1, t]\!]$$

Il en résulte cette fois que :

$$P(\mu_k) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j L_j(\mu_k) + \sum_{j=1}^{t} \big(\bar{\mu}_j Q_j(\mu_k) + \mu_j T_j(\mu_k)\big) = \sum_{j=1}^{r} \bar{\mu}_j \delta_{jk}$$

ce que la sympathique gestion transforme en :

$$P(\mu_k) = \bar{\mu}_k$$

et nous permet à la fois de gagner le second *round* et de passer, dans la foulée, à la toute dernière question.

28. Nous avons ici :

$$r = 2 \quad ; \quad S = X(X+1) \quad ; \quad t = 1 \quad ; \quad Q = X^2 + X + 1$$

et du coup :

$$\lambda_1 = 0 \quad ; \quad \lambda_2 = -1 \quad ; \quad \mu_1 = j \quad ; \quad \bar{\mu}_1 = j^2$$

et comme on dit, il n'y a plus qu'à...

Précisons cependant à ceux — ou celles — qui ont peur du vide qu'il va bien falloir vaincre le vertige ! En effet, puisque $t = 1$, le produit :

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{t} \text{——}$$

qui figure à la fois dans les polynômes Q_1 et T_1, est ouvertement le produit *vide* — on ne multiplie rien ! — et il faut alors impérativement savoir que le produit *vide* est égal à 1.

Cela étant dit, et en n'oubliant pas la célèbre :

$$1 + j + j^2 = 0$$

le lecteur trouvera aisément que :

$$L_1 = (X+1)(X^2+X+1) \quad \text{et} \quad L_2 = -\,X(X^2+X+1)$$

ainsi que :

$$Q_1 = -\,X(X+1)\cdot\frac{X-j^2}{j-j^2} \quad \text{et} \quad T_1 = -\,X(X+1)\cdot\frac{X-j}{j^2-j}$$

dernières égalités qui confirment au passage que les polynômes Q_1 et T_1 se *conjuguent au présent !*

Le reste n'est alors affaire que de remplacements, de développements et autre simplifications, en bref le lots de tous ceux qui calculent et qui aiment calculer, et comme il se fait tard, nous laissons à notre valeureux lecteur le soin de parvenir à :

$$P = -\,X^2$$