CORRIGÉ

Par Jean-Louis Roque, professeur au lycée Pasteur à Neuilly-sur-Seine, et external lecturer *à Essec Business School.*

Partie 1

Le début de cette partie est pour le moins étrange. En effet, on démontre officiellement en classe de première année que :

– la fonction $\tan$ réalise une bijection de l'ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$ et l'on note :

$$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

la bijection réciproque. L'on a donc *réciproquement* et instantanément :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \mathrm{Arctan}(\tan x) = x$$

– la fonction Arctan est impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

d'où il ressort d'un coup de baguette magique que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}\, t\Big]_0^x = \mathrm{Arctan}\, x$$

puisque nul ne peut ignorer que :

$$\mathrm{Arctan}\, 0 = 0$$

C'est donc pour ne pas perdre de temps que nous autoriserons à ne pas traiter les trois premières questions.

↱ Comme :

$$\mathrm{Arctan}\, x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

nous déduisons de la précédente égalité que :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

ce qui démontre précisément que l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

existe et que l'on a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Nous saurons nous en souvenir !

https://vertuprepas.com/
VERTU PREPAS

4. Soit x et y deux réels. D'après ce que nous venons de rappeler, la fonction Arctan est dérivable sur le segment $[x, y]$ et sa dérivée y est positive et ouvertement majorée par 1. L'inégalité des accroissements finis, dans sa forme valuée, termine alors la petite histoire.

↱ Les initiés auront reconnu une fonction 1-lipschitzienne…

5. Considérons la fonction :

$$u : t \longmapsto \operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}$$

Selon les théorèmes généraux, elle est assurément dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, après une énorme simplification, l'on trouve aisément que :

$$\forall t > 0 \qquad u'(t) = 0$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un *intervalle*(*), la fonction u est d'ores et déjà constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Il reste alors à faire valoir que :

$$u(1) = 2 \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{2}$$

l'égalité :

$$\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

étant bien entendu connue comme *the white wolf*.

↱ Cette relation est souvent attribuée à John Machin.

Partie 2

Avant de nous lancer dans cette partie, nous allons causer un peu de la fameuse N_0.

Nous notons tout d'abord que si f est une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $|f|$ est majorée sur $\mathbb{R}$ et, si l'on en croit le théorème de la borne supérieure, elle se doit de posséder un *supremum* ce qui est déjà une excellente chose.

Il se trouve également que N_0 est une *genuine* norme sur l'espace vectoriel E_0 ce qui signifie qu'elle possède les quatre faciles propriétés suivantes :

i. C'est une application de E_0 dans $\mathbb{R}_+$.

ii. Pour toute fonction $f \in E_0$, l'on a :

$$N_0(f) = 0 \implies f = 0$$

iii. Pour toute fonction $f \in E_0$ et tout réel λ, l'on a :

$$N_0(\lambda f) = |\lambda| N_0(f)$$

iv. Pour tout couple (f, g) d'éléments de E_0, l'on a :

$$N_0(f + g) \leqslant N_0(f) + N_0(g)$$

(*) L'argument est d'importance ! D'aucuns l'ayant oublié un certain matin du mois de mai 1982 en gardent encore un souvenir très amer…

https://vertuprepas.com/
VERTUPREPAS

Nous nous permettrons donc de les utiliser librement tout en suggérant à notre dévoué lecteur d'en écrire les preuves.

6. Nous allons naturellement procéder par plongement.

– l'inclusion :

$$E_0 \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ne procède que de la définition de E_0 ;

– la fonction nulle étant aussi bornée au propre qu'au figuré, notre E_0 est assurément non vide ;

– soit deux fonctions f et g appartenant à E_0 et λ appartenant à $\mathbb{R}$. Il existe deux réels M et N tels que :

$$|f| \leqslant M \quad \text{et} \quad |g| \leqslant N$$

d'où il ressort, triangulairement, que :

$$|f + \lambda g| \leqslant M + |\lambda| N$$

ce qui nous permet de passer à la suite.

↱ Pour les connaisseurs, le couple (E_0, N_0) est donc un espace vectoriel normé.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Selon les théorèmes généraux et tout ce que nous savons, la fonction :

$$t \longmapsto \operatorname{Arctan}(tx) \frac{f(t)}{1+t^2}$$

est ouvertement continue sur $[0, +\infty[$ et son intégrale n'est impropre qu'une fois en plus l'infini. Une fois que — *bornitude* oblige — l'on a mentionné la triviale inégalité :

$$|f| \leqslant N_0(f)$$

et puisque les valeurs absolues d'Arctan dépassent rarement la moitié de π, il semble difficile de s'opposer à ce que :

$$\forall t \in [0, +\infty[\qquad 0 \leqslant \frac{|\operatorname{Arctan}(tx) f(t)|}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi N_0(f)}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

Comme il a été mentionné *supra* que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

existe, il ne reste plus qu'à positivement comparer !

↱ Il semble bien que nous venions d'établir que :

$$\operatorname{def} \Phi(f) = \mathbb{R}$$

Absolument d'ailleurs !

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

8. Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}$. La convergence *absolue* que nous venons de rencontrer permet l'utilisation de l'inégalité triangulaire intégrale et l'on a déjà :

$$\left|\Phi(f)(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left|\mathtt{Arctan}(tx)f(t)\right|}{1+t^2}dt$$

puisque les bornes... Profitant alors de la comparaison très récemment mise en place, la croissance et la linéarité de l'intégration prennent le relais en assénant dans la foulée que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left|\mathtt{Arctan}(tx)f(t)\right|}{1+t^2}dt \leqslant \frac{\pi N_0(f)}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

et à nouveau puisque les bornes... Comme nous avons rappelé *supra* que l'intégrale située tout à fait à droite vaut légendairement $\pi/2$, il s'ensuit transitivement que :

$$\left|\Phi(f)(x)\right| \leqslant \frac{\pi^2 N_0(f)}{4}$$

et cela montre déjà que $\Phi(f)$ est bornée. Le réel $\pi^2 N_0(f)/4$ étant un majorant de $\left|\Phi(f)\right|$ et la borne supérieure étant par définition le *plus petit* des majorants, Monsieur de la Palice se doit alors de clamer que :

$$N_0\big(\Phi(f)\big) \leqslant \frac{\pi^2 N_0(f)}{4}$$

↱ Nous avons déjà signalé que N_0 est une norme sur l'espace vectoriel E_0 et les initiés des espaces vectoriels normés auront maintenant reconnu en Φ une application linéaire *continue*. Cette étrange continuité sera — mais sans le dire bien sûr ! — au cœur du débat de la dix septième question !

9. Nous n'avons pas oublié que $\Phi(f)$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et nous ne le redirons plus ! En outre, les bornes de toutes les intégrales qui vont suivre, sont visiblement dans le sens croissant ce qui, nous le savons bien, est crucial aussi bien pour la croissance de l'intégration que pour l'inégalité triangulaire intégrale. Cela aussi, nous ne le répéterons plus...

a. L'intégration étant linéaire nous avons tout d'abord :

$$\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \big(\mathtt{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \mathtt{Arctan}(tx)\big)\frac{f(t)}{1+t^2}dt$$

la grosse intégrale située *on the right hand side* étant assez facilement *absolument*(*) convergente. Cela autorise à nouveau l'inégalité triangulaire intégrale et voici donc que :

$$\left|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\mathtt{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \mathtt{Arctan}(tx)\right|\frac{\left|f(t)\right|}{1+t^2}dt$$

(*) Il est assez aisé d'établir qu'une combinaison linéaire de fonctions *absolument* intégrables est elle-même absolument intégrable.

https://vertuprepas.com/

Il ne reste alors plus qu'à dominer $|f|$ par $N_0(f)$, à faire jouer derechef la croissance puis la linéarité de l'intégration et à s'attirer les faveurs de Michel Chasles.

b. Soit $A > 0$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Nous allons nous occuper séparément des deux intégrales du *right hand side*.

– Soit tout d'abord $t \in [0, A]$. La question 4 nous a appris que :

$$\left|\operatorname{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \operatorname{Arctan}(tx)\right| \leqslant t|h|$$

les données déjà positives étant, *as usual*, dispensées de valuation. Il en résulte dans la foulée que :

$$\int_0^A \frac{\left|\operatorname{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \operatorname{Arctan}(tx)\right|}{1+t^2} dt \leqslant |h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt$$

la linéarité et la croissance de l'intégration ayant, encore une fois, été mises à contribution, et au regard de notre projet, ce premier résultat est plutôt prometteur.

– Soit maintenant $t \geqslant A$. L'inégalité triangulaire assurant tranquillement que :

$$\left|\operatorname{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \operatorname{Arctan}(tx)\right| \leqslant \left|\operatorname{Arctan}\big(t(x+h)\big)\right| + \left|\operatorname{Arctan}(tx)\right|$$

il s'en déduit aisément que :

$$\left|\operatorname{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \operatorname{Arctan}(tx)\right| \leqslant \pi$$

puisque les Arctan ont très rarement l'occasion de sortir de la zone $]-\pi/2, \pi/2[$. Il en résulte cette fois et comme *supra* que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\left|\operatorname{Arctan}\big(t(x+h)\big) - \operatorname{Arctan}(tx)\right|}{1+t^2} dt \leqslant \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

ce qui n'est pas mal non plus. Il reste alors à faire état de la positivité de $N_0(f)$ et à changer de question…

↱ Notons cependant que, jusque là, l'hypothèse $h \neq 0$ n'a pas eu la moindre utilisation. Affaire à suivre…

c. D'après la formule de Barrow nous avons tout d'abord et sans détour :

$$\int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^A = \frac{1}{2}\ln(1+A^2)$$

puis :

$$\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_A^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} A = \operatorname{Arctan}\frac{1}{A}$$

la toute dernière égalité reposant sur la stricte positivité de A ainsi que sur la formule de John Machin de la question 5. Il suffit alors d'avoir bien capté que le texte a très légalement(*) choisi :

$$A = \frac{1}{|h|}$$

(*) Il faut ici impérativement supposer que $h \neq 0$…

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

d. Soit à nouveau $h \in \mathbb{R}^*$. Nous mettons en avant deux choses :

– grâce à l'écriture tranquille :

$$|h| \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = |h| \ln \frac{1+h^2}{h^2} = |h| \ln(1+h^2) - 2|h| \ln |h|$$

et à la prépondérance classique :

$$u \ln u \xrightarrow[\substack{u \to 0 \\ u > 0}]{} 0$$

il s'avère déjà que :

$$|h| \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}]{} 0$$

– la fonction Arctan étant officiellement continue en zéro, nous avons ensuite :

$$\operatorname{Arctan} |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

puisque, au risque d'en vexer certains, $\operatorname{Arctan} 0$ est bien connu pour être nul.

Il résulte ainsi des théorèmes généraux que :

$$\frac{N_0(f)}{2} |h| \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) + \pi N_0(f) \operatorname{Arctan} |h| \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}]{} 0$$

et le *squeezing process* est alors formel. Nous avons :

$$\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x) \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}]{} 0$$

ce qui, par définition, montre que la fonction $\Phi(f)$ est continue en x et comme cela vaut pour *tous* les réels x…

↱ Qu'est-ce qu'il ne faut pas faire pour ne pas traumatiser nos chers agneaux avec de l'*epsilontik* ? En effet, si nous nous étions donné $\epsilon > 0$, nous aurions mentionné deux choses :

– *primo*, reste d'une intégrale convergente, sans même une obligation de calcul, nous avons à coup sûr :

$$\pi N_0(f) \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

il existe donc un réel $A_0 > 0$ tel que :

$$\pi N_0(f) \int_{A_0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

https://vertuprepas.com/
VERTU PREPAS

et si l'on choisit $A = A_0$ dans la récente question b nous parvenons déjà à :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad \left|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)\right| \leqslant |h| N_0(f) \int_0^{A_0} \frac{t}{1+t^2} dt + \frac{\epsilon}{2}$$

– *deuzio*, comme il est totalement évident que :

$$|h| N_0(f) \int_0^{A_0} \frac{t}{1+t^2} dt \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

il existe un réel $\eta > 0$ vérifiant cette fois :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad |h| \leqslant \eta \implies |h| N_0(f) \int_0^{A_0} \frac{t}{1+t^2} dt \leqslant \frac{\epsilon}{2}$$

Le résultat des courses est alors le suivant :

$$\forall h \in \mathbb{R} \qquad |h| \leqslant \eta \implies \left|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)\right| \leqslant \epsilon$$

chronique d'une continuité annoncée...

↱ L'avantage de la preuve *epsilontik* est qu'elle a un champ d'action immensément plus large. Il est vrai que l'on peut la contourner parfois de façon tordue comme ici pour parvenir à conclure par *squeeze* mais nous ne sommes plus vraiment dans l'élégance. En outre, dans notre seconde preuve — *the epsilontik one !* — nous n'avons eu besoin ni de l'égalité de *John Machin*, ni de l'hypothèse $h \neq 0$.

e. Comme à l'acoutumée, nous procédons en deux temps.

– Soit $f \in E_0$. Les questions 8 et 9.d nous ont permis d'apprendre que $\Phi(f)$ est une application bornée et continue sur $\mathbb{R}$, autrement dit, un élément de E_0. Cela montre donc déjà que Φ applique bien E_0 dans lui-même.

– Quant à sa linéarité, elle se résume essentiellement à celle de l'intégration.

En bref :

$$\Phi \in \mathcal{L}(E_0)$$

et nous pouvons alors changer de partie.

Partie 3

La fonction constante égale à 1 — évidemment continue et bornée sur $\mathbb{R}$ — est parfaitement dans les clous et heureusement !

10. *No comment !* car $\texttt{Arctan}$ est impaire... Combien de points de barême pour cela ?

11. Une sempiternelle « méthode du D_h » de Leibniz semble se profiler à l'horizon... Laissons-nous donc porter par les événements.

a. Soit $u \in \mathbb{R}$. Nous savons que $\texttt{Arctan}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ — donc *a fortiori* de classe $\mathcal{D}_2$ — et un facile calcul révèle que :

$$\left|\texttt{Arctan}'' u\right| = \frac{2|u|}{(1+u^2)^2}$$

https://vertuprepas.com/

Mais, vu une identité très remarquée en classe de quatrième, nous avons mentalement(*) :

$$2|u| \leqslant 1+u^2$$

à telle enseigne que, *due to the ambiant positivity*, l'on a effectivement :

$$\left|\mathrm{Arctan}'' u\right| \leqslant \frac{1}{1+u^2}$$

b. Comme l'on est jamais assez prudent, nous notons avant de commencer que la fonction :

$$u \longmapsto \frac{1}{1+u^2}$$

possède effectivement un maximum sur I car elle y est continue et que ce dernier est un *segment*. Cela étant, compte tenu de l'excellente classe sur $\mathbb{R}$ — donc sur I — de la fonction Arctan et comme, si l'on en croit la récente *a*, le réel :

$$\max_{u\in I} \frac{1}{1+u^2}$$

est un majorant sur I de sa dérivée seconde, nous nous en remettons à Brook Taylor et à Joseph-Louis Lagrange mais dans leur version inégalitaire s'entend.

↱ Nous n'avons jamais utilisé l'hypothèse $a \neq b$. À bon entendeur !

c. Après avoir ouvert correctement ses mirettes, le « bon entendeur » sait qu'il peut utiliser la précédente question en y choisissant :

$$a = tx \quad \text{et} \quad b = t(x+h)$$

Tout se met alors *farpaitement* en place à l'exception de la quantité :

$$\max_{u\in I} \frac{1}{1+u^2}$$

où I est ici le segment d'extrémités tx et $tx+th$, quantité que nous allons devoir gérer pertinemment. Nous nous organisons.

– Le texte a fait l'hypothèse — de confort(**) pour les initiés ! — selon laquelle :

$$-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2}$$

Comme t est positif, il s'ensuit en particulier que :

$$th \geqslant -\frac{tx}{2}$$

(*) Il suffit, droit dans les yeux, d'observer la différence !

(**) Nous l'appelons ainsi parce qu'elle apporte un réel confort — la preuve ! — mais qu'elle ne gêne surtout pas la problématique, en l'occurrence un certain h qui ne devrait pas tarder à tendre vers zéro.

https://vertuprepas.com/

d'où il ressort déjà que :

$$tx + th \geqslant \frac{tx}{2}$$

– À coté de cela, nous avons également :

$$tx \geqslant \frac{tx}{2}$$

la raison essentielle étant qu'un réel *positif* est rarement plus petit que sa moitié !

Il résulte alors de tout cela qu'ici :

$$I \subset \left[\frac{tx}{2}, +\infty\right[$$

et comme la fonction :

$$U : u \longmapsto \frac{1}{1+u^2}$$

est vraisemblablement *décroissante* sur $[0, +\infty[$ il devrait s'ensuivre que :

$$\forall u \in I \qquad \frac{1}{1+u^2} \leqslant U\left(\frac{tx}{2}\right)$$

ce qui, vu la positivité ambiante, devrait finir par satisfaire tout le monde.

d. Il nous faut impérativement commencer par établir l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt$$

Elle n'est visiblement impropre qu'en plus l'infini et vu la *stricte* positivité de x nous pouvons nous réclamer de l'équivalence :

$$\frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2t^3}$$

L'évidente positivité du *right hand side* et l'idyllique position géographique de l'entier 3 permettent ainsi d'emballer l'affaire par équivalence en signe positif.

Nous pouvons alors aller de l'avant en annonçant un réel h au même endroit qu'à la question précédente et nous déduisons de la linéarité de l'intégration que la quantité :

$$\Delta_h = g(x+h) - g(x) - h\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt$$

a également le *look* :

$$\Delta_h = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t(x+h) - \text{Arctan}\, tx - \dfrac{th}{1+t^2x^2}}{1+t^2}dt$$

VERTU PREPAS

cette grosse intégrale étant par ailleurs absolument(*) convergente. Aucun frein donc à sa triangulation et nous en sommes déjà à :

$$|\Delta_h| \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\left| \operatorname{Arctan}(t(x+h) - \operatorname{Arctan} tx - \dfrac{th}{1+t^2x^2} \right|}{1+t^2} dt$$

Soit alors $t \geqslant 0$. La précédente question ayant fini par révéler que :

$$\left| \operatorname{Arctan}(t(x+h) - \operatorname{Arctan} tx - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leqslant \frac{2t^2h^2}{4+t^2x^2}$$

c'est dans une très positive atmosphère que nous assénons que :

$$\frac{\left| \operatorname{Arctan}(t(x+h) - \operatorname{Arctan} tx - \dfrac{th}{1+t^2x^2} \right|}{1+t^2} \leqslant \frac{2t^2h^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)}$$

En s'inspirant de ce que nous avons fait lors de la genèse de cette question, on démontre *mutatis mutandis* que la toute nouvelle venue :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

existe et nous pouvons ainsi revendiquer aisément la conclusion, la croissance et la linéarité de l'intégration ayant encore une fois…

e. Nous nous remettons dans le contexte de la question précédente, nous y supposons en outre que h est non nul, et nous décidons de diviser membre à membre par le *strictement* positif $|h|$. Il advient alors que :

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt \right| \leqslant 2|h| \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

et la suite est alors d'un navrant classicisme. L'intégrale située à la *very* droite ne dépendant aucunement de h il y a incontestablement *squeeze* lorsque h tend vers zéro et nous avons finalement établi que :

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

Cela montre *par définition* que g est dérivable en x et que :

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt$$

(*) Au risque de radoter, nous avons déjà dit qu'une combinaison linéaire de fonctions *absolument* intégrables est elle-même absolument intégrable.

https://vertuprepas.com/

et comme cela est véritablement d'actualité pour tous les réels $x > 0$, nous sommes autorisés à clamer haut et fort que g est effectivement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x > 0 \qquad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt$$

f. La réponse à la première question est « oui » puisque, depuis la question 10, la fonction g est impaire et cette dernière se retrouve donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Il faut alors savoir que sa dérivée y est paire et du coup :

$$\forall x < 0 \qquad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}dt$$

12.*a*. Grâce à la formule de Barrow, nous avons sans détour :

$$g'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Autant dire, à bien y regarder, que nous recherchons des expressions $A(x)$ et $B(x)$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \frac{A(x)}{1+t^2x^2} + \frac{B(x)}{1+t^2} = \frac{1}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$$

Soit alors a, b deux réels pour l'instant quelconques. Après une nécessaire réduction au même dénominateur, nous avons tout d'abord :

$$\frac{a}{1+t^2x^2} + \frac{b}{1+t^2} = \frac{(a+bx^2)t^2 + a + b}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$$

et nous allons *foxly* essayer de nous arranger pour que :

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad a + bx^2 = 0$$

Puisque x est positif et différent de 1, le réel $1 - x^2$ n'est pas nul, et un tel projet est assurément — et mentalement ! — possible *via* :

$$b = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{et} \quad a = \frac{x^2}{x^2-1}$$

Nous proposons évidemment :

$$A(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

quantités ne contenant visiblement pas de lettre t et tout le monde devrait s'en contenter.

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

c. Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La formule de Barrow est encore à l'ordre du jour puisqu'elle affirme, après quelques gentilles simplifications, que :

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2-1}\ln(1+t^2x^2) - \frac{1}{x^2-1}\ln(1+t^2)\right]_0^{+\infty}$$

égalité que nos connaissances intactes de la classe de terminale métamorphosent en :

$$g'(x) = \frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\frac{1+t^2x^2}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}$$

La limite en plus l'infini vaut facilement $\ln x^2 = 2\ln x$ — ne surtout pas oublier où est logé x — et la valeur en 0 est manifestement nulle. Il s'ensuit ainsi effectivement que :

$$g'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$$

d. Nous mettons en avant les réalités suivantes :

– la fonction g est depuis fort longtemps continue sur $\mathbb{R}$ et donc *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+^*$;

– d'après l'expression que nous venons de trouver pour g', elle est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ — car carrément de classe $\mathcal{C}^\infty$ — sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$;

– compte tenu de l'équivalence standard :

$$\ln u \underset{u\to 1}{\sim} u-1$$

nous déduisons aisément que :

$$g'(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x+1}$$

d'où il ressort très tranquillement que g' possède une limite finie en 1, à savoir $1/2$. L'important théorème de prolongement en classe $\mathcal{C}^1$ est alors catégorique. La fonction g est bel et bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et nous retrouvons en prime le résultat du récent *a*.

13.*a*. Soit $x > 0$. Nous devons obligatoirement nous organiser.

– Si $x < 1$, la fonction :

$$t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2-1}$$

est continue sur le semi-ouvert $]0, x]$ et son intégrale n'est impropre qu'une fois en zéro. Oui mais voilà, nous venons d'apprendre à l'instant que g est l'une de ses primitives sur le semi-ouvert $]0, x]$, primitive qui a une limite finie à droite en zéro pour la simple et bonne raison qu'elle y est continue. Le test de la primitive est alors catégorique. L'intégrale :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt$$

existe. Nous pourrions nous en tenir là pour ce premier cas mais nous allons en outre faire un peu de zèle calculatoire, zèle qui se révèlera payant à la question suivante. Si l'on en croit la formule de Barrow, nous avons dans la foulée :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt = g(x) - \lim_0 g = g(x) - g(0) = g(x)$$

https://vertuprepas.com/

l'avant-dernière égalité reposant sur la continuité que nous venons de mentionner et la dernière, sur une simple ouverture des mirettes.

– Si maintenant $x = 1$, la fonction :

$$t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2 - 1}$$

est continue sur l'ouvert $]0, 1[$ et son intégrale est impropre deux fois. Il nous faut alors étudier séparément :

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

– La première existe d'après le premier cas que nous venons d'examiner.

– Quant à la deuxième, il se trouve que la fonction g est aussi une primitive de notre intégrande sur le semi-ouvert $[1/2, 1[$ et qu'elle a une limite finie à gauche en un puisqu'elle y est également continue. Le test de la primitive persiste alors à faire des siennes, nous pouvons ainsi conclure à nouveau à l'existence de :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

et Isaac révèle cette fois que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \lim_1 g - \lim_0 g = g(1)$$

– Si pour finir, $x > 1$, la fonction :

$$t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2 - 1}$$

est continue sur $]0, 1[\cup]0, x]$ et son intégrale est impropre trois fois. Il nous faut donc ici étudier séparément :

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt \quad ; \quad \int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt \quad ; \quad \int_1^{x} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

– les deux premières sont déjà *in the pocket*.

– la troisième l'est également puisque la sempiternelle fonction g est une primitive de notre intégrande, cette fois sur le semi-ouvert $]1, x]$, et pour la simple et bonne raison que…

L'intégrale :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

existe à nouveau et nous sommes tenus de savoir que :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt + \int_1^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$$

https://vertuprepas.com/

que les ténors du Barrow transforment immédiatement en :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt = g(1) + g(x) - \lim_1 g = g(x)$$

Il est important pour la suite d'avoir bien capté qu'en réalité nous avons :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt = g(x)$$

dans chacun des trois cas, c'est-à-dire *in fine*, pour *tous* les réels x strictement positifs.

b. Soit $x > 0$. Nous ne dirons que deux choses :

– Nous savons déjà et par définition que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2}dt = g(x)$$

– À côté de cela, et si l'on en croit le zèle que nous venons de nourrir, nous avons également :

$$\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}dt = g(x)$$

Tout le monde devrait alors y trouver son compte.

14.*a*. Soit à nouveau $x > 0$. La fonction :

$$t \longmapsto \operatorname{Arctan}\frac{1}{tx}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

est continue sur l'ouvert $]0, +\infty[$ et la nouvelle venue est impropre deux fois ce qui nous amène à étudier séparément :

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}\frac{1}{tx}\cdot\frac{dt}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \operatorname{Arctan}\frac{1}{tx}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$$

– la première est faussement impropre puisqu'à l'évidence :

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{tx}\cdot\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow[t>0]{t\to 0} \frac{\pi}{2}$$

– nous coinçons la deuxième en observant simplement que :

$$\forall t \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{tx}\cdot\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

et en obéissant à un certain principe…

La situation est donc bien sous contrôle. Soit alors $t > 0$. Grâce à la *John's formula*, nous avons :

$$\frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{tx}\cdot\frac{1}{1+t^2}$$

https://vertuprepas.com/

Notre travail préliminaire permet alors d'intégrer sur l'ouvert $]0,+\infty[$ et autorise surtout la linéarisation du côté droit. Comme nous avons dit mille fois que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

nous pouvons envisager la suite.

b. Quelle drôle d'idée cette valeur absolue dans la deuxième partie de la question, mais quelle drôle d'idée ! Auguste Compte ne doit pas en croire ses yeux… Trèfle de paisanterie et prenons donc notre mal en patience.

Pour la toute première écriture, il suffit de se rappeler la définition(*) de la valeur d'une intégrale impropre deux fois. Nous allons ensuite travailler séparément les deux termes du *right hand side*.

– Soit t un réel vérifiant :

$$0 < t \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Au vu et au su de la situation géographique des Arctan de réels positifs, nous revendiquons tout d'abord :

$$0 \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{1}{tx} \cdot \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

puisque sans vouloir blesser personne :

$$0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$$

La *linéacroissance* de l'intégration amène alors déjà à :

$$0 \leqslant \int_0^{1/\sqrt{x}} \operatorname{Arctan} \frac{1}{tx} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

et c'est un bon début.

– Poursuivons cette fois *via* un réel $t \geqslant 1/\sqrt{x}$. Puisque définivement, nous sommes farouchement opposés à la valuation des positifs nous déduisons de la question 4 que :

$$0 \leqslant \operatorname{Arctan} \frac{1}{xt} \leqslant \frac{1}{xt}$$

d'où l'on déduit *mutatis mutandis* que :

$$0 \leqslant \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{tx} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{x} \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$$

(*) D'aucuns pourraient être tentés d'évoquer la relation de Chasles, mais à bien y regarder, Michel n'y est pour rien ! Cela dit, le ciel ne nous tomberait pas sur la tête pour autant…

https://vertuprepas.com/

ce qui n'est pas mal non plus. Nous en sommes donc déjà à :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{tx} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$$

Il nous reste alors à peaufiner impérativement la toute dernière intégrale. Soit donc à nouveau un réel t vérifiant :

$$t \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Il est alors capital de bien capter que :

$$\frac{1}{t(1+t^2)} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{1+t^2}$$

d'où il ressort *as usual* puis tour à tour que :

$$\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} \leqslant \sqrt{x} \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \sqrt{x}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{x}}\Big) \leqslant \sqrt{x}\frac{\pi}{2}$$

Il doit alors très positivement s'ensuivre que :

$$\frac{1}{x} \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

et nous voilà fins prêts à changer de question.

b. Soit derechef $x > 0$. Nous venons d'apprendre à l'instant que :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{tx} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

Il en résulte évidemment par *squeeze* que :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} \frac{1}{tx} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et si l'on n'a pas égaré la récente a, il semble alors bien que :

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{4}$$

15. Curieux changement de signe ! Jusqu'à présent nous avions $t^2 - 1$ au dénominateur et voilà que maintenant on y trouve $1 - t^2$. Si cela ne dérange personne, nous en resterons définitivement à $t^2 - 1$...

a. La fonction :

$$t \longmapsto \frac{\ln t}{t^2 - 1}$$

https://vertuprepas.com/
VERTU PREPAS

est assez clairement continue sur l'ensemble :

$$]0,1[\cup]1,+\infty[$$

et son intégrale se retrouve impropre quatre fois. Aussi devons-nous étudier séparément :

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t^2-1}dt \quad ; \quad \int_{1/2}^{1} \frac{\ln t}{t^2-1}dt \quad ; \quad \int_1^{2} \frac{\ln t}{t^2-1}dt \quad ; \quad \int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt$$

– les trois premières vivent un existence paisible depuis fort longtemps ;

– en ce qui concerne la quatrième, nous avons un peu l'impression de radoter en assénant que l'inénarrable fonction g est une primitive sur $[2,+\infty[$ de sa fonction intérieure et comme depuis peu g a une limite finie en plus l'infini… Alors, comme nous l'avons maintes fois fait lors de la question 13.a, on trouve aisément que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt = \frac{\pi^2}{4}$$

b. Selon la *définition* de la valeur d'une intégrale impropre plusieurs fois, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt = \int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2-1}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt$$

et compte tenu du projet — il faut *in fine* uniquement les bornes 0 et 1 — nous devons impérativement transformer, *manu militari*, la seconde intégrale du *right hand side* en une intégrale entre 0 et 1. Le changement de variable « inversion », en l'occurrence :

$$t = \frac{1}{u}$$

semble bien placé pour se charger de l'affaire. En effet, la fonction :

$$u \longmapsto \frac{1}{u}$$

réalisant à l'évidence une bijection de classe C^1 de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$, on déduit du théorème de changement de variable que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt = -\int_1^{0} \frac{\ln(1/u)}{(1/u)^2-1} \cdot \frac{du}{u^2}$$

ce qui, après quelques aménagements, devient miraculeusement :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt = \int_0^{1} \frac{\ln u}{u^2-1}du$$

et comme on sait jongler avec les « *ghosts* », on a effectivement :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt = 2\int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2-1}dt$$

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

c. Soit t appartenant à l'ouvert $]0,1[$. Comme t^2 est différent de 1, la formule de la « somme géométrique » dont la *mnémo* est

$$\frac{\text{premier terme écrit} - \text{premier terme non écrit}}{1 - \text{raison}}$$

révèle que :

$$\sum_{k=0}^{n} t^{2k} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}$$

d'où l'on déduit tout d'abord que :

$$\frac{1}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{t^2-1}$$

puis dans la foulée :

$$\frac{\ln t}{t^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln t + \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} \qquad (*)$$

Prenons alors les choses les unes après les autres.

– L'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt$$

existe depuis déjà longtemps !

– Soit alors $k \in [\![0,n]\!]$. L'intégrale :

$$I_k = \int_0^1 t^{2k}\ln t\,dt$$

n'est visiblement impropre qu'en zéro et :

– lorsque $k=0$, il s'agit d'une référence logarithmique bien connue pour exister ;

– lorsque $k \geqslant 1$, l'intégrale I_k est faussement impropre puisque — prépondérance classique oblige — l'on a :

$$t^{2k}\ln t \xrightarrow[t>0]{t\to 0} 0$$

et I_k se doit donc d'exister également.

– Compte tenu des deux premiers points et de l'égalité $(*)$ on déduit du théorème de linéarité que l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1}dt$$

existe à son tour et qu'*in fine* on a effectivement :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt = -\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}\ln t\,dt + \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1}dt$$

https://vertuprepas.com/

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous considérons les fonctions :

$$u : t \longmapsto \ln t \quad \text{et} \quad v : t \longmapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

la seconde devant sa survie à son dénominateur manifestement non nul. Elles sont assurément de classe $\mathcal{C}^1$ sur le semi-ouvert $]0,1]$ et l'on a :

$$\forall t \in]0,1] \qquad u'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad v'(t) = t^{2n}$$

En outre, grâce à nouveau aux prépondérances classiques, le produit uv a en zéro, la limite finie zéro. Le théorème d'intégration impropre(*) par parties assure alors que :

$$I_n = -\frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n} dt$$

d'où l'on déduit aisément — intégrale de Cavalieri — que :

$$I_n = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,1[$. Nous écrivons :

$$\frac{\ln t}{t^2-1} t^{2n+2} = \frac{t \ln t}{t^2-1} t^{2n+1}$$

et nous nous intéressons à la fonction :

$$\phi : x \longmapsto \frac{x \ln x}{x^2-1}$$

à propos de laquelle nous avons des choses à dire !

– Selon les théorèmes généraux, elle est continue sur l'ouvert $]0,1[$.
– La classique prépondérance :

$$u \ln u \xrightarrow[\substack{u \to 0 \\ u>0}]{} 0$$

fait qu'elle admet en zéro la limite finie zéro.

– L'équivalence standard :

$$\ln u \underset{u \to 1}{\sim} u - 1$$

fait, mentalement, qu'elle admet en 1 la limite finie $1/2$.

(*) On rappelle aux candidats qu'ils ne peuvent utiliser directement ce théorème et qu'ils doivent impérativement passer par une partialisation.

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

Elle est donc prolongeable par continuité au *segment* $[0, 1]$ et son prolongement $\tilde{\phi}$ est donc classiquement borné. Comme il s'agit enfin d'une fonction positive, nous revendiquons l'existence d'un réel M tel que :

$$\forall x \in [0, 1] \qquad 0 \leqslant \tilde{\phi}(x) \leqslant M$$

et *a fortiori :*

$$0 \leqslant \frac{t \ln t}{t^2 - 1} \leqslant M$$

où t est bien sûr le réel qui a été annoncé *supra*. On multiplie alors par le positif t^{2n+1} et voilà donc déjà que :

$$0 \leqslant \frac{\ln t}{t^2 - 1} t^{2n+2} \leqslant M t^{2n+1}$$

La croissance de l'intégration prend du coup le relais et finalement :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} t^{2n+2} dt \leqslant \frac{M}{2n + 2}$$

puisque $2n + 2$ n'est pas nul. C'est en conséquence par *squeeze* que se termine cette affaire.

f. Soit $n \in \mathbb{N}$. On rassemble tout ce que nous venons d'apprendre aux récentes questions a, b, c, d et il semble ainsi se dessiner que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} t^{2n+2} dt$$

La question e porte alors l'estocade ! *No doubt that :*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k + 1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{8}$$

et comme l'on maîtrise la théorie des séries, on se doit d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Soit à nouveau $n \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de séparation pair-impair d'une somme, nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k + 1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k + 1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

La série de Riemann de paramètre deux converge bien sûr et si l'on note S sa somme, un simple passage à la limite conduit à :

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}$$

https://vertuprepas.com/

et il s'ensuit aisément que $S = \pi^2/6$. C'est donc une des nombreuses preuves de cette célébrité eulerienne selon laquelle :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie 4

16. Soit f une fonction non nulle appartenant à E_0. Dans la question 8, nous avons appris que :

$$N_0(\Phi(f)) \leqslant \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$$

et comme $N_0(f)$ est *ici*(*) strictement positif, nous avons déjà :

$$\frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} \leqslant \frac{\pi^2}{4}$$

Le réel $\pi^2/4$ est donc déjà un majorant de l'ensemble :

$$\left\{ \frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)} \mid f \in E_0 \smallsetminus \{0\} \right\}$$

Il est alors temps de ressortir la fonction constante égale à un — notée grassement $\mathbf{1}$ — et surtout son image g par l'application Φ que nous avons étudiée en long en large et de travers ! Nous allons alors nous occuper du dénominateur, puis du numérateur du quotient qui est au cœur du débat. Voici nos arguments.

- Fonction constante égale à un oblige, nous avons évidemment :

$$N_0(\mathbf{1}) = 1$$

- La fonction $g = \Phi(\mathbf{1})$ étant impaire, nous avons :

$$N_0(g) = \sup_{\mathbb{R}} |g| = \sup_{\mathbb{R}_+} |g|$$

Oui mais voilà, d'après tout ce que nous avons appris, il semble bien que sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g est autant *positive que croissante*, et nous sommes alors tenus de savoir que la borne supérieure de g sur $\mathbb{R}_+$ n'est autre que sa limite en plus l'infini à telle enseigne que :

$$N_0(\Phi(\mathbf{1})) = N_0(g) = \frac{\pi^2}{4}$$

et du coup :

$$\frac{N_0(\Phi(\mathbf{1}))}{N_0(\mathbf{1})} = \frac{\pi^2}{4}$$

(*) C'est la deuxième propriété de la norme N_0 qui l'affirme !

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

Notre majorant *supra* est donc atteint et nous avons beaucoup plus que ce qui est en réalité demandé. Nous avons en effet et définitivement :

$$\frac{\pi^2}{4} = \max_{f \in E_0 \setminus \{0\}} \frac{N_0(\Phi(f))}{N_0(f)}$$

et comme dirait Hervé Christiani, un $\max$ c'est bien mieux qu'un $\sup$, surtout quand il est libre ! N'est-il pas ?

17. Notons avant de commencer que *toutes* les fonctions φ_k appartiennent à E_0 puisque c'est le cas de f et que Φ applique E_0 dans lui-même. *Everything is therefore under control*.

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application Φ étant linéaire et φ_n étant *under control*(*), nous avons :

$$\Phi(\varphi_n) = \lambda^n \Phi^{n+1}(f)$$

et l'on a effectivement :

$$\lambda\Phi(\varphi_n) = \lambda^{n+1}\Phi^{n+1}(f) = \varphi_{n+1}$$

Nous poursuivons. Vu ce que nous venons d'écrire, nous avons :

$$|\varphi_{n+1}| = |\lambda|\big|\Phi(\varphi_n)\big|$$

d'où, grâce à la troisième propriété de la norme N_0, il ressort aisément que :

$$N_0(\varphi_{n+1}) = |\lambda| N_0\big(\Phi(\varphi_n)\big)$$

Étant donné que :

$$N_0\big(\Phi(\varphi_n)\big) \leqslant \frac{\pi^2}{4} N_0(\varphi_n)$$

et que, au risque de radoter, $|\lambda|$ est un nombre positif, nous avons assurément :

$$N_0(\varphi_{n+1}) \leqslant \gamma N_0(\varphi_n)$$

ce qui ne peut que nous satisfaire.

18. Supposons que l'on ait :

$$\lambda\Phi(f) = f$$

Comme f est supposée non nulle, nous apprenons déjà que λ n'est pas nul, et exactement comme *supra*, nous avons en outre :

$$|\lambda| N_0\big(\Phi(f)\big) = N_0(f)$$

Comme λ n'est pas nul, il en résulte dans un premier temps que :

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{N_0\big(\Phi(f)\big)}{N_0(f)}$$

(*) Il est évidemment hors de question d'appliquer Φ à une fonction qui n'appartient pas à E_0…

https://vertuprepas.com/

puis dans un second :

$$\frac{1}{|\lambda|} \leqslant \frac{\pi^2}{4}$$

et vu que par hypothèse, il est dit que :

$$\frac{1}{|\lambda|} > \frac{\pi^2}{4}$$

l'affaire semble mal embarquée… La réponse à la question est donc *niet !*

À bien y regarder, nous venons d'établir que :

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \lambda\Phi) = \{0\}$$

et la réponse à la seconde question est donc : « $\mathrm{Id} - \lambda\Phi$ est injective ».

↱ L'hypothèse $f \neq 0$ n'a finalement servie que pour cette question. Nous la rayerons donc de la carte à l'avenir. Qu'on se le dise !

19. La première partie de la question se fait aisément par récurrence sur n — c'est la classique récurrence sous-géométrique — les arguments essentiels étant, la seconde partie de la question précédente et les deux égalités :

$$\varphi_0 = f \quad \text{et} \quad M = N_0(f)$$

Vu que désormais :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant N_0(\varphi_n) \leqslant M\gamma^n$$

et que la raison γ est idéalement située, en l'occurrence :

$$0 \leqslant \gamma < 1$$

la seconde partie de la question procède d'une simple comparaison en signe positif.

20. Soit $x \in \mathbb{R}$. *Supremum* oblige, nous avons maintenant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |\varphi_n(x)| \leqslant N_0(\varphi_n)$$

et si l'on en croit derechef la comparaison en signe positif, la série concernée est donc *absolument* convergente et par conséquent convergente.

21. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous partons bien sûr de :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x) \tag{1}$$

tout en rappelant que la série définissant $\varphi(x)$ est *absolument* convergente. Nous pouvons allègrement trianguler et voilà donc déjà que :

$$|\varphi(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |\varphi_k(x)|$$

https://vertuprepas.com/

VERTU PREPAS

d'où, grâce principalement aux deux questions précédentes, l'on déduit tranquillement que :

$$\left|\varphi(x)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} N_0(\varphi_k)$$

chronique d'une *bornitude* annoncée. Nous pourrions encore une fois en rester là mais nous en profitons pour ajouter dans la foulée que :

$$N_0(\varphi) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} N_0(\varphi_k)$$

d'où l'on déduit aisément que :

$$N_0(\varphi) \leqslant M \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma^k = \frac{M}{1-\gamma}$$

la dernière égalité reposant derechef sur l'idyllique situation géographique de γ ainsi que sur une parfaite maîtrise de la *géométricité*.

↱ Nous profitons de l'excès de zèle que nous venons d'infliger à notre vénéré lecteur pour glisser maintenant un joli complément qui sera fort utile un peu plus loin.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Notons d'ores et déjà S_n la fonction :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k$$

dont la ressemblance avec une somme partielle n'est pas qu'une pure coïncidence, et intéressons-nous à la différence :

$$\varphi(x) - S_n(x)$$

C'est ici en demandant son *reste* que nous avons :

$$\varphi(x) - S_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \varphi_k(x)$$

égalité dont le *right hand side* ressemble à s'y méprendre à celui de la récente (1) à cela près que le rang de départ y est passé de zéro à n.

On démontre alors *mutatis mutandis* — lecteur à toi l'honneur ! — que :

$$N_0(\varphi - S_n) \leqslant M \sum_{k=n}^{+\infty} \gamma^k = M \frac{\gamma^n}{1-\gamma}$$

d'où il ressort par *squeeze* que :

$$N_0(\varphi - S_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

https://vertuprepas.com/

le réel γ n'ayant toujours pas tourné casaque. Nous remercierons beaucoup ce résultat plus tard !

22.a. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. Nous avons par définition :

$$\left|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)\right| = |\lambda|\left|\Phi(\varphi_n)(x+h) - \Phi(\varphi_n)(x)\right|$$

et il suffit alors de ressortir, clefs en main, les conclusions de la question 9.c.

b. Soit à nouveau $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. La linéarité de la sommation assure tout d'abord que :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\right)$$

et nous laissons au lecteur le soin de s'assurer *absolument* que la triangulation est possible à telle enseigne que :

$$\left|\varphi(x+h) - \varphi(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)\right|$$

Nous avons déjà signalé que $\varphi_0 = f$ et comme, stratégiquement, nous nous devons de « coller » à la précédente question nous sommes, *via* un inéluctable changement d'indice, condamnés à écrire :

$$\left|\varphi(x+h) - \varphi(x)\right| \leqslant \left|f(x+h) - f(x)\right| + \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)\right|$$

Il suffit alors de ne pas avoir oublié la convergence de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} N_0(\varphi_n)$$

ainsi que la récente question a pour revendiquer exactement ce qui nous est demandé.

c. Lors de la question 9.d, nous avons déjà constaté que :

$$\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi \operatorname{Arctan}|h| \xrightarrow[\substack{h\to 0\\ h\neq 0}]{} 0$$

alors que, continuité de f oblige, nous avons également :

$$f(x+h) - f(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Selon les généreux théorèmes généraux, force est désormais de constater(*) que :

$$|\lambda|\left(\frac{|h|}{2}\ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) + \pi \operatorname{Arctan}|h|\right)\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) + f(x+h) - f(x) \xrightarrow[\substack{h\to 0\\ h\neq 0}]{} 0$$

(*) Comme dirait Claire !

VERTU PREPAS
https://vertuprepas.com/

et du coup par *squeeze* :

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) \xrightarrow[h\neq 0]{h\to 0} 0$$

La fonction φ est donc, par définition, continue en x, et comme cela vaut pour *tous* les réels x…

↱ Les questions 21 et 22.c montre qu'*in fine :*

$$\varphi \in E_0$$

et nous ne l'oublierons pas, surtout quelques lignes plus bas…

23. Le texte parle d'un entier naturel n et s'intéresse ensuite à la somme :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k$$

Cela nous semble assez curieux et pour le moins inesthétique — faute de frappe ? — et c'est la raison pour laquelle nous allons, si cela ne dérange personne, modifier par ci par là quelques petites choses. *Here you are :*

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous décidons de ressortir l'ami S_n déjà mis en place à la fin de de la vingt et unième. L'application $\mathrm{Id}-\lambda\Phi$ étant assurément linéaire, nous avons :

$$(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n) = (\mathrm{Id}-\lambda\Phi)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\big(\varphi_k - \lambda\Phi(\varphi_k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1}(\varphi_k - \varphi_{k+1})$$

la dernière égalité procédant du début de la question 17. Un providentiel télescope s'est ainsi gentiment mis en place et du coup :

$$(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n) = f - \varphi_n$$

puisque, depuis fort longtemps, nous savons que $\varphi_0 = f$. Il devrait alors immédiatement s'ensuivre que :

$$N_0\Big[f - (\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n)\Big] = N_0(\varphi_n)$$

et nous en terminerons par deux choses :

– la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} N_0(\varphi_n)$$

est convergente depuis la question 19 ;

– une célèbre condition nécessaire de convergence *sérielle* assure que son terme général se doit de tendre vers zéro. *So*…

b. Soit à nouveau $n \in \mathbb{N}^*$. Nous conservons l'ami S_n et comme nous avons eu *supra* l'excellente idée de signaler l'appartenance à E_0 de la fonction φ(*), nous pouvons écrire :

$$(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(\varphi) - f = (\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n) - f + \lambda\Phi(S_n - \varphi)$$

(*) Au risque de radoter, il est totalement interdit d'appliquer Φ à une fonction qui n'appartient pas à E_0.

https://vertuprepas.com/

ERTU PREPAS

la linéarité d'une certaine Φ ayant eu, quelque part, son pesant d'arachide. Les propriétés iii et iv de la norme N_0 permettent alors d'en déduire que :

$$N_0\Big[(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(\varphi)-f\Big] \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n)-f\Big] + |\lambda| N_0\big(\Phi(S_n-\varphi)\big)$$

inégalité que la question 8 transforme avantageusement et transitivement en :

$$0 \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(\varphi)-f\Big] \leqslant N_0\Big[(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n)-f\Big] + |\lambda|\frac{\pi^2}{4} N_0(S_n-\varphi) \qquad (2)$$

la positivité habilement ajoutée à gauche n'étant que bien *normale* ! Oui mais voilà, il vient d'être récemment dit que :

$$N_0\Big[(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(S_n)-f\Big] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et la fracassante remarque faite à la fin de la question 21 nous a appris que :

$$N_0(S_n-\varphi) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut alors passer à la limite dans la récente (2) lorsque n tend vers l'infini ce qui semble définitivement donner :

$$N_0\Big[(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(\varphi)-f\Big] = 0$$

La propriété ii de la norme N_0 est alors formelle. Nous devons avoir :

$$(\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(\varphi)-f = 0 \quad i.e. \quad (\mathrm{Id}-\lambda\Phi)(\varphi) = f$$

ce qui ne peut que nous satisfaire.

En bref, nous nous sommes donnés $f \in E_0$ — on rappelle que nous acceptons la fonction nulle depuis le début de la 19 — et nous venons, à l'instant de lui trouver un antécédent tombé du ciel — en l'occurrence φ — par l'application $\mathrm{Id}-\lambda\Phi$. Cette dernière vient donc de gagner ses galons de surjection !

c. Supposons par l'absurde que :

$$|\mu| > \frac{\pi^2}{4}$$

Le réel μ n'étant pas nul nous en déduirions que son inverse — nous le notons providentiellement λ — vérifierait :

$$|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$$

et à la lumière des questions 18 et 23.b, l'application $\mathrm{Id}-\lambda\Phi$ serait bijective. Oui mais voilà, nous avons :

$$\Phi - \mu\,\mathrm{Id} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\Phi - \mathrm{Id})$$

et $\Phi - \mu\,\mathrm{Id}$ n'est justement pas bijective. *So*...

https://vertuprepas.com/