CORRIGÉ

Par Serge Lucas, professeur en CPGE au lycée Les Bruyères, à Sotteville-les-Rouen.

EXERCICE 1

1. Par définition des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient :

$$\mathbf{u_1} = \frac{1}{2}(u_0+v_0) = \frac{1}{2}(0+1) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{v_1} = \frac{1}{2}(u_1+v_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

$$\mathbf{u_2} = \frac{1}{2}(u_1+v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$

$$\mathbf{v_2} = \frac{1}{2}(u_2+v_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8} = \mathbf{\frac{11}{16}}$$

2. Le script *Scilab* suivant est complété afin de permettre de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez la valeur de n:')
u=0
v=1
for k=1:n
    u=1/2*(u+v)
    v=1/2*(u+v)
end
disp(u)
disp(v)
```

3.a. On a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_{n+1}-u_n} = \frac{1}{2}(u_n+v_n)-u_n = \frac{1}{2}(u_n+v_n-2u_n) = \frac{1}{2}(v_n-u_n) = \mathbf{\frac{1}{2}w_n}$$

b. On a, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1}+v_n)-\frac{1}{2}(u_n+v_n) = \frac{1}{2}(u_{n+1}+v_n-u_n-v_n) = \frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)$$

D'après la question précédente, il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}w_n = \frac{1}{4}w_n$$

Donc **la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$**.

c.(i) Pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{n-1} w_k$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de raison $\frac{1}{4}$, donc on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{w_k} = w_0\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = (v_0-u_0)\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \mathbf{\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

(ii) D'après la question 3.a et par linéarité de la somme, on a, pour tout entier naturel non nul

ESCP Europe

CORRIGÉ

n :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} 2(u_{k+1}-u_k) = 2\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$$

Cette somme est une somme télescopique, qui se simplifie ainsi :

$$2\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = 2\left(u_n - \cancel{u_{n-1}} + \cancel{u_{n-1}} - \cancel{u_{n-2}} + \cdots + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} + \cancel{u_1} - u_0\right) = 2(u_n - u_0) = 2u_n$$

Il vient donc, d'après la question précédente, **pour tout entier naturel non nul n** :

$$\mathbf{u_n} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \mathbf{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}$$

(iii) Si $n = 0$, on a :

$$\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = \frac{2}{3}(1-1) = 0 = u_0$$

Donc **l'expression précédente reste valide pour $\mathbf{n = 0}$**.

d. Puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

Il résulte des deux dernières questions que **la suite $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge** et que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

e. Par définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n + w_n$$

Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$, on a, pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n = (v_0 - u_0)\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

D'après les questions 3.c (ii) et 3.c (iii), il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{v_n} = u_n + w_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \mathbf{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, on a :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} v_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

4.a. Pour que la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$ soit convergente, il faut que :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$$

Compte tenu de la question 3.d, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{9}{8}(\alpha - u_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \lim_{n\to+\infty} u_n \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

MATHÉMATIQUES

TECHNOLOGIQUE

Réciproquement, si $\alpha = \frac{2}{3}$, on a, pour tout entier naturel n :

$$t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n) = \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) = \frac{9}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

La série de terme général $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est la série géométrique de raison $\frac{1}{4}$, qui converge puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc, par linéarité, la série de terme général t_n converge.

Donc **l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.**

b. Puisque $\alpha = \frac{2}{3}$, on a, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$t_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On a bien, **pour tout entier naturel** n :

$$\mathbf{t_n > 0}$$

Et, vu la convergence de la série de terme général $\left(\frac{1}{4}\right)^n$, signalée dans la question précédente, et la formule pour calculer sa somme, il vient, par linéarité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}} = \mathbf{1}$$

5.a. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $Y = X + 1$, il vient :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$P([Y = n]) = P([X + 1 = n]) = P([X = n - 1]) = t_{n-1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{n-1} = p(1-p)^{n-1}$$

en posant $p = \frac{1}{4}$.

Donc **Y suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$**.

b. Puisque Y suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$, on a :

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

Il en résulte, par linéarité de l'espérance et propriété de la variance, que :

$$\mathbf{E(X)} = E(Y-1) = E(Y) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \mathbf{\frac{1}{3}} \text{ et } \mathbf{V(X)} = V(Y-1) = 1^2 V(Y) = V(Y) = \mathbf{\frac{4}{9}}$$

EXERCICE 2

1.a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{M^2} = MM = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{M^4} = M^2M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

b. L'égalité $M^4 = I$ peut encore s'écrire :

$$MM^3 = I$$

Elle assure que **M est inversible** et que :

$$\mathbf{M^{-1} = M^3}$$

c. Le script *Scilab* suivant est complété afin de permettre de saisir M, de calculer $N = M^{-1}$ et d'afficher les deux matrices M et M^{-1} :

```
M=[-1,-1,-1;1,0,0;0,1,0]
N=M^3
disp(M,'la matrice M est:')
disp(N,'la matrice inverse de M est:')
```

2.a. On a :

$$M - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrons que la matrice $M - I$ est inversible en utilisant la méthode de Gauss :

$$M - I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$$

Cette dernière matrice est triangulaire sans zéro sur sa diagonale, donc **la matrice $\mathbf{M - I}$ est inversible**.

b. En développant et en utilisant la question 1.a, on obtient, en notant 0 la matrice nulle d'ordre 3 :

$$(\mathbf{M-I})(\mathbf{M^3+M^2+M+I}) = M^4+M^3+M^2+M-M^3-M^2-M-I = M^4-\mathbf{I}=\mathbf{0}$$

D'après la question 2.a, la matrice $M-I$ est inversible ; on obtient donc, en multipliant à gauche par $(M-I)^{-1}$:

$$(M-I)(M^3+M^2+M+I)=0 \Rightarrow (M-I)^{-1}(M-I)(M^3+M^2+M+I)=(M-I)^{-1}0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{M^3+M^2+M+I=0}$$

c. Les calculs donnent :

$$\mathbf{M^3} = M^2M == \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Puis :

$$M^3+M^2+M+I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=0$$

Ainsi **a-t-on retrouvé le résultat de la question 2.b**.

3.a. En développant, on trouve :

$$(\mathbf{x+1})(\mathbf{x^2+1}) = x^3+x+x^2+1 = \mathbf{x^3+x^2+x+1}$$

On sait, d'après la question 2.b, que :

$$M^3+M^2+M+I=0$$

Donc le polynôme x^3+x^2+x+1 est un polynôme annulateur de M.

Les valeurs propres possibles de M sont les racines du polynôme x^3+x^2+x+1 ; d'après le développement précédent, et puisque $x^2+1\neq 0$ sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$x^3+x^2+x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

Donc **M possède au plus une valeur propre, à savoir $\mathbf{-1}$**.

b. Les calculs donnent :

$$\mathbf{MU} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{-U}$$

Puisque $U \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'égalité $MU=-U$ assure que U est un vecteur propre de M, associé à la valeur propre -1.

Donc, d'après la question précédente, il en résulte que **M possède une unique valeur propre, qui est $\mathbf{-1}$**.

4.a. On a :

$$xM^2+yM+zI = x'M^2+y'M+z'I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -y+z & -y & x-y \\ -x+y & -x+z & -x \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'+z' & -y' & x'-y' \\ -x'+y' & -x'+z' & -x' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y+z & = & -y'+z' \\ -y & = & -y' \\ x-y & = & x'-y' \\ -x+y & = & -x'+y' \\ -x+z & = & -x'+z' \\ -x & = & -x' \\ x & = & x' \\ y & = & y' \\ y & = & z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & x' \\ y & = & y' \\ z & = & z' \end{cases}$$

Ona bien montré **que si $xM^2+yM+zI=x'M^2+y'M+z'I$, alors $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$**.

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

il existe un unique triplet de réels (a_n,b_n,c_n) tels que $M^n=a_nM^2+b_nM+c_nI$.

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$M^0=I=0M^2+0M+1I$$

Par unicité d'une telle décomposition, résultant de la question 4.a, on a :

$$M^0=a_0M^2+b_0M+c_0I \text{ avec } (a_0,b_0,c_0)=(0,0,1)$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

il existe un unique triplet de réels (a_n,b_n,c_n) tels que $M^n=a_nM^2+b_nM+c_nI$.

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

il existe un unique triplet de réels $(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$ tels que $M^{n+1}=a_{n+1}M^2+b_{n+1}M+c_{n+1}I$.

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et par définition de la multiplication des matrices :

$$M^{n+1}=M^nM=\left(a_nM^2+b_nM+c_nI\right)M=a_nM^3+b_nM^2+c_nM$$

Puisque $M^3+M^2+M+I=0$ d'après la question 2.b, il vient :

$$M^{n+1}=a_n\left(-M^2-M-I\right)+b_nM^2+c_nM=(-a_n+b_n)M^2+(-a_n+c_n)M-a_nI$$

Par unicité d'une telle décomposition, résultant de la question 4.a, on a :

$$M^{n+1}=a_{n+1}M^2+b_{n+1}M+c_{n+1}I \text{ avec } \begin{cases} a_{n+1} & = & b_n-a_n \\ b_{n+1} & = & c_n-a_n \\ c_{n+1} & = & -a_n \end{cases}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (a_n,b_n,c_n) tels que $M^n=a_nM^2+b_nM+c_nI$ avec $(a_0,b_0,c_0)=(0,0,1)$ et, pour tout entier naturel n :**

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = -a_n \end{cases}$$

5. D'après les relations trouvées à la question 4.b, le script *Scilab* suivant est complété afin qu'il calcule et affiche a_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
n=input('entrez la valeur de n:')
a=0
b=0
c=1
for k=1:n
    u=a
    a=b-a
    b=c-u
    c=-u
end
disp(a)
```

EXERCICE 3

1.a. Il fait beau le jour 1, donc :

$$\mathbf{u_1} = P(B_1) = \mathbf{1}$$

b. S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$, donc :

$$\mathbf{P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{4}{5}}$$

S'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$, donc :

$$\mathbf{P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})} = 1 - P_{\overline{B_n}}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

2.a. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\{B_n, \overline{B_n}\}$, il vient, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{u_{n+1}} = P(B_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P\left(\overline{B_n}\right)P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \mathbf{\frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n}$$

b. Puisque $u_n + v_n = P(B_n) + P\left(\overline{B_n}\right) = 1$, il vient, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\mathbf{u_{n+1}} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}(1-u_n) = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{5}u_n = \mathbf{\frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5}}$$

c. D'après la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique ; cherchons son point fixe x :

$$x = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5x = x + 3 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Posons, pour tout entier naturel non nul n :

$$w_n = u_n - \frac{3}{4}$$

On a, pour tout entier naturel non nul n :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}u_n + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}u_n - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}\left(u_n - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{5}w_n$$

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$, donc on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$w_n = w_1\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(u_1 - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

On a, pour tout entier naturel non nul n :

$$w_n = u_n - \frac{3}{4} \Leftrightarrow u_n = w_n + \frac{3}{4}$$

Donc il vient, **pour tout entier naturel non nul n** :

$$\mathbf{u_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}}$$

d. Puisque $-1 < \frac{1}{5} < 1$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}\right) = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Ce résultat signifie **qu'après un grand nombre de jours, il fait beau environ trois jours sur quatre**.

3.a. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $\{B_n, \overline{B_n}\}$, il vient, **pour tout entier naturel n non nul** :

$$\begin{aligned}\mathbf{v_{n+1}} &= P\left(\overline{B_{n+1}}\right) = P(B_n)P_{B_n}\left(\overline{B_{n+1}}\right) + P\left(\overline{B_n}\right)P_{\overline{B_n}}\left(\overline{B_{n+1}}\right)\\ &= P(B_n)\left(1 - P_{B_n}(B_{n+1})\right) + P\left(\overline{B_n}\right)P_{\overline{B_n}}\left(\overline{B_{n+1}}\right)\\ &= \left(1 - \frac{4}{5}\right)u_n + \frac{2}{5}v_n = \mathbf{\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n}\end{aligned}$$

b. En posant $K = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n & \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = X_nK$$

Donc **la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbf{X_{n+1} = X_n K}$$

est la matrice :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n[1], par :

$$X_{n+1} = X_1 K^n$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$X_1 K^0 = X_1 I = X_1$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = X_1 K^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+2} = X_1 K^{n+1}$$

On a, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$X_{n+2} = X_{n+1} K = X_1 K^n K = X_1 K^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n :**

$$\mathbf{X_{n+1} = X_1 K^n}$$

d. Posons, pour tout entier naturel n :

$$K^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

On a, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = X_1 K^n \Leftrightarrow (u_{n+1} \quad v_{n+1}) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (u_{n+1} \quad v_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = u_{n+1} \\ b_n = v_{n+1} \end{cases}$$

Il vient donc, d'après la question 2.c :

$$a_n = u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4}$$

Et :

$$b_n = v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{4}$$

On a aussi, pour tout entier naturel n :

$$X_{n+2} = X_1 K^{n+1} = X_1 K K^n = X_2 K^n$$

Or on a, d'après la question 2.c :

$$u_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{2-1} + \frac{3}{4} = \frac{1}{20} + \frac{3}{4} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \text{ et } v_2 = 1 - u_2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

[1] L'énoncé précisait que n était non nul, mais cela est inutile ; sinon, initialiser à la valeur 1.

$$X_{n+2}=X_2K^n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+2} & v_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+2} & v_{n+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}a_n+\frac{1}{5}c_n & \frac{4}{5}b_n+\frac{1}{5}d_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4}{5}a_n+\frac{1}{5}c_n=u_{n+2}\\ \frac{4}{5}b_n+\frac{1}{5}d_n=v_{n+2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c_n=5u_{n+2}-4a_n\\ d_n=5\left(1-u_{n+2}\right)-4b_n\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c_n=5\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}+\frac{3}{4}\right)-4\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{3}{4}\right)\\ d_n=5\left(1-\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}-\frac{3}{4}\right)\right)-4\left(1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}-\frac{3}{4}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{15}{4}-\left(\frac{1}{5}\right)^{n}-3\\ d_n=5-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}-\frac{15}{4}-4+\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}c_n=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{3}{4}\\ d_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{1}{4}\end{cases}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{K^n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

4. Le script *Scilab* suivant est complété afin qu'il renvoie le nombre de jours de beau temps lors des 100 premiers jours de la période considérée, y compris le premier :

```
K=[4/5,1/5;3/5,2/5]
x=grand(99,'markov',K,1)-1
n=100-sum(x)
disp(n,'le nombre de jours de beau temps est:')
```

5.a. On a, pour tout entier naturel non nul n :

$$P\left(U_n\right)=P\left(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n\right)$$

La formule des probabilités composées donne alors, **pour tout entier naturel non nul n** :

$$\mathbf{P\left(U_n\right)}=P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(B_2\right)\ldots P_{B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1}}\left(B_n\right)=P\left(B_1\right)P_{B_1}\left(B_2\right)\ldots P_{B_{n-1}}\left(B_n\right)$$

$$=1\cdot\underbrace{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{4}{5}}_{n-1\text{ fois}}=\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{n-1}}$$

b. $\overline{V_n}$ est l'événement : « il ne fait jamais beau lors des n premiers jours de la période considérée, sauf le premier jour ».
On a, pour tout entier naturel non nul n :

$$P\left(\overline{V_n}\right)=P\left(B_1\cap\overline{B_2}\cap\cdots\cap\overline{B_n}\right)$$

La formule des probabilités composées donne alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$P\left(\overline{V_n}\right)=P(B_1)P_{B_1}\left(\overline{B_2}\right)P_{B_1\cap\overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\dots P_{B_1\cap\overline{B_2}\cap\dots\cap\overline{B_{n-1}}}\left(\overline{B_n}\right)=P(B_1)P_{B_1}\left(\overline{B_2}\right)P_{\overline{B_2}}\left(\overline{B_3}\right)\dots P_{\overline{B_{n-1}}}\left(\overline{B_n}\right)$$

$$=1\cdot\frac{1}{5}\cdot\underbrace{\frac{2}{5}\frac{2}{5}\cdots\frac{2}{5}}_{n-2\text{ fois}}=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel non nul n** :

$$\mathbf{P(V_n)}=1-P\left(\overline{V_n}\right)=\mathbf{1-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-2}}$$

EXERCICE 4

1.a. En utilisant la règle de dérivation $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$, on obtient, pour tout réel positif ou nul t :

$$\mathbf{g'(t)}=-\left(-\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\right)=\frac{\mathbf{2t}}{\mathbf{\left(1+t^2\right)^2}}$$

b. Il résulte de la question précédente que, pour tout réel positif ou nul x :

$$\mathbf{I(x)}=\int_0^x\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}dt=\int_0^x g'(t)\,dt=\left[g(t)\right]_0^x=g(x)-g(0)=-\frac{1}{1+x^2}+1$$

$$=\frac{-1+1+x^2}{1+x^2}=\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{1+x^2}}$$

c. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}I(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)=1$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)=+\infty$$

Donc $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty}\mathbf{f(t)\,dt}=\lim_{x\to+\infty}I(x)=\mathbf{1}$$

f est continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle, et continue sur $[0,+\infty[$ comme fonction rationnelle de dénominateur non nul.
f, étant continue sur $[0,+\infty[$, admet une limite finie en 0^+ ; elle a également une limite finie en 0^- car :

$$\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
f est positive sur $\mathbb{R}$ car :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{\left(1+t^2\right)^2} \geq 0 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 \geq 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ converge, et on a :

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$$

Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et que, d'après le début de cette question :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt = 0 + 1 = 1$$

Donc **f est une densité de probabilité**.

2. La fonction de répartition F de X est définie par, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Il vient donc, pour tout réel strictement négatif x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Et, pour tout réel positif ou nul x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x**, la relation suivante :

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{1+x^2}} & \textbf{si } \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{0} & \textbf{si } \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

3.a. On a, pour tout réel positif ou nul x :

$$Q'(x) = \frac{2x\left(1+x^2\right) - 2x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \geq 0$$

Donc **Q est croissante sur** $[\mathbf{0}, +\infty[$.
On sait que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; on a :

$$Q(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Puisque $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2} = Q(X)$ et que Q est croissante sur $[0, +\infty[$, il en résulte que :

$$\mathbf{Y(\Omega)} = Q\left(X(\Omega)\right) = Q\left([0, +\infty[\right) = \left[Q(0), \lim_{x\to+\infty} Q(x)\right[= \mathbf{[0,1[}$$

b. Pour tout réel y de $[0,1[$, on a :

$$G(y)=P([Y\le y])=P\left(\left[\frac{X^2}{1+X^2}\le y\right]\right)=P\left(\left[X^2\le y(1+X^2)\right]\right)=P\left(\left[X^2\le y+yX^2\right]\right)$$
$$=P\left(\left[X^2-yX^2\le y\right]\right)=P\left(\left[(1-y)X^2\le y\right]\right)$$
Puisque $1-y>0$, il vient :
$$G(y)=P\left(\left[X^2\le\frac{y}{1-y}\right]\right)$$
Puisque y appartient à $[0,1[$, on a :
$$\frac{y}{1-y}\ge 0$$
Puisque $X(\Omega)=\mathbb{R}_+$, on a enfin :
$$G(y)=P\left(\left[X^2\le\frac{y}{1-y}\right]\right)=P\left(\left[X\le\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right]\right)=F\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)=\frac{\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2}{1+\left(\sqrt{\frac{y}{1-y}}\right)^2}=\frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}}$$
$$=\frac{\frac{y}{1-y}}{1+\frac{y}{1-y}}=\frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1-y+y}{1-y}}=\frac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1}{1-y}}=\frac{y}{1-y}\cdot\frac{1-y}{1}=y$$
Ainsi a-t-on, **pour tout réel y de $[0,1[$** :
$$\mathbf{G(y)=y}$$
Puisque $Y(\Omega)=[0,1[$, on a, pour tout réel strictement négatif x :
$$G(y)=0$$
Et pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :
$$G(y)=1$$
Ainsi G est-elle définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$G(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y<0\\ y & \text{si} y\in[0,1[\\ 1 & \text{si } y\ge 1\end{cases}$$
On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$, donc **Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1[$**.

c. On a :
$$Y=\frac{X^2}{1+X^2}\Leftrightarrow Y(1+X^2)=X^2\Leftrightarrow Y+YX^2=X^2\Leftrightarrow Y=X^2-YX^2\Leftrightarrow Y=(1-Y)X^2$$
Puisque $Y(\Omega)=[0,1[$ et $X(\Omega)=\mathbb{R}_+$, il vient :
$$Y=\frac{X^2}{1+X^2}\Leftrightarrow Y=(1-Y)X^2\Leftrightarrow X^2=\frac{Y}{1-Y}\Leftrightarrow X=\sqrt{\frac{Y}{1-Y}}$$
Ainsi a-t-on vérifié que :

$$\mathbf{X}=\sqrt{\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{1-Y}}}$$

À l'aide de la commande rand( ), le script *Scilab* suivant est complété afin qu'il simule la variable aléatoire X :

```
Y=rand( )
X=sqrt(Y/(1-Y))
```

4.a. On a, pour tout réel strictement positif x fixé :

$$T_h(x)=\frac{1}{h}\cdot P_{[X>x]}\left([X\le x+h]\right)=\frac{1}{h}\cdot\frac{P\left([X\le x+h]\cap[X>x]\right)}{P\left([X>x]\right)}=\frac{1}{h}\cdot\frac{P\left([x<X\le x+h]\right)}{P\left([X>x]\right)}$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{P\left([x<X\le x+h]\right)}{1-P\left([X\le]\right)}=\frac{1}{1-F(x)}\cdot\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Puisque F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'=f$, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)=f(x)$$

On a donc, pour tout réel strictement positif x fixé :

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{T_h(x)}=\frac{1}{1-F(x)}\cdot f(x)=\frac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{1-F(x)}}$$

b. Par définition de f et d'après la question 2, on a, **pour tout réel strictement positif x** :

$$\mathbf{T(x)}=\frac{f(x)}{1-F(x)}=\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}=\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}}{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}=\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\cdot\frac{1+x^2}{1}=\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{1+x^2}}$$

c. Pour tout réel strictement positif x, on a, d'après la question précédente :

$$\int_0^x\mathbf{T(t)dt}=\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt=\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]_0^x=\ln\left(1+x^2\right)-\ln 1=\mathbf{\ln\left(1+x^2\right)}$$

On a également :

$$\int_0^x T(t)dt=\int_0^x\frac{f(t)}{1-F(t)}dt=\int_0^x\left(-\frac{-F'(t)}{1-F(t)}\right)dt=\left[-\ln\left|1-F(t)\right|\right]_0^x=-\ln\left|1-F(x)\right|+\ln\left|1-F(0)\right|$$

Puisque $F(0)=0$, on a :

$$\ln\left|1-F(0)\right|=\ln 1=0$$

Puisque $F(x)\in[0,1[$, on a :

$$\ln\left|1-F(x)\right|=\ln\left(1-F(x)\right)$$

Donc on a, **pour tout réel strictement positif x** :

$$\int_0^x\mathbf{T(t)dt=-\ln\left(1-F(x)\right)}$$