CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. Avec les notations de l'énoncé, les matrices de $\mathcal{E}$ vérifient $ad - bc = 0$, donc **les matrices de $\mathcal{E}$ ne sont pas inversibles**.

b. Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

$$a + d = 1 - 1 = 0 \text{ et } ad - bc = 1(-1) - 1(-1) = 0$$

Pour la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a :

$$a + d = 1 - 1 = 0 \text{ et } ad - bc = 1(-1) - (-1)1 = 0$$

Donc **les matrices** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **et** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ **appartiennent à $\mathcal{E}$**.

c. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$, car on a :

$$ad - bc = 2(-2) - 0 = -4, \text{ donc } ad - bc \neq 0$$

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$, car on a :

$$a + d = 2 + 2 = 4, \text{ donc } a + d \neq 0$$

Ainsi, **la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$**.

d. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

Puisque M appartient à $\mathcal{E}$, on a :

$$a + d = 0 \text{ et } ad - bc = 0$$

Il en résulte que :

$$a^2 + bc = a^2 + ad = a(a + d) = a \cdot 0 = 0$$
$$ab + bd = b(a + d) = b \cdot 0 = 0$$
$$ac + cd = c(a + d) = c \cdot 0 = 0$$
$$bc + d^2 = ad + d^2 = d(a + d) = d.0 = 0$$

Ainsi vient-il, en notant 0 la matrice carrée nulle d'ordre 2 :

$$\mathbf{M^2 = 0}$$

On en déduit donc, **pour tout entier $n \geq 2$**, que :

$$\mathbf{M^n} = M^2 M^{n-2} = 0M^{n-2} \mathbf{= 0}$$

2.a. Pour la matrice A, on a :

$$ad - bc = 1 \cdot 5 - 2(-2) = 9$$

Puisque $ad-bc\neq 0$, **A est inversible**.

b. On a :

$$K=A-3I=\begin{pmatrix}1&2\\-2&5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-2&2\end{pmatrix}$$

Pour la matrice K, on a :

$$a+d=-2+2=0 \text{ et } ad-bc=(-2)2-2(-2)=0$$

Donc **la matrice K appartient à $\mathcal{E}$.**

c.(i) Puisque $K=A-3I$, on a, pour tout entier naturel n :

$$A^n=(K+3I)^n$$

Puisque A et 3I commutent pour la multiplication des matrices, la formule du binôme de Newton s'applique et donne :

$$A^n=(K+3I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}K^k(3I)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}3^{n-k}\binom{n}{k}K^k$$

Puisque K appartient à $\mathcal{E}$, on a, d'après la question 1.d, pour tout entier $k\geq 2$:

$$K^k=0$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$A^n=\sum_{k=0}^{1}3^{n-k}\binom{n}{k}K^k=3^n\binom{n}{0}K^0+3^{n-1}\binom{n}{1}K=3^nI+3^{n-1}nK$$

Le résultat précédent reste vrai si $n=0$, car :

$$3^0I+3^{-1}0K=I=A^0$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n=3^nI+3^{n-1}nK}$$

(ii) Il résulte de la question précédente qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n}=3^nI+3^{n-1}nK=3^n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+3^{n-1}n\begin{pmatrix}-2&2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{3^n-2n3^{n-1}}&\mathbf{2n3^{n-1}}\\\mathbf{-2n3^{n-1}}&\mathbf{3^n+2n3^{n-1}}\end{pmatrix}$$

3.a. On a, d'après la question précédente, en remplaçant n par 2, ou par un calcul direct, tout aussi rapide :

$$A^2=\begin{pmatrix}-3&12\\-12&21\end{pmatrix}$$

Il vient donc :

$$A^2+\alpha A+\beta I=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3&12\\-12&21\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1&2\\-2&5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-3+\alpha+\beta&12+2\alpha\\-12-2\alpha&21+5\alpha+\beta\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3+\alpha+\beta=0\\12+2\alpha=0\\-12-2\alpha=0\\21+5\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=3-\alpha=9\\\alpha=-6\\\alpha=-6\\\beta=-21-5\alpha=9\end{cases}$$

Ainsi a-t-on montré **l'existence d'un unique couple $(\alpha,\beta)=(-6,9)$ pour lequel $A^2+\alpha A+\beta I$ est la matrice nulle.**

b. On a, d'après la question précédente :

$$A^2-6A+9I=0 \Leftrightarrow 6A-A^2=9I \Leftrightarrow A(6I-A)=9I \Leftrightarrow A\left(\frac{2}{3}I-\frac{1}{9}A\right)=I$$

La dernière égalité ci-dessus assure que **A est inversible et que** $\mathbf{A^{-1}=\frac{2}{3}I-\frac{1}{9}A}$.

c. Puisque $K=A-3I$, il vient, d'après la question précédente :

$$A^{-1}=\frac{2}{3}I-\frac{1}{9}A=\frac{2}{3}I-\frac{1}{9}(K+3I)=\frac{2}{3}I-\frac{1}{9}K-\frac{1}{3}I=\mathbf{\frac{1}{3}I-\frac{1}{9}K}$$

La fin de cette question semble hors-programme, puisqu'elle utilise des puissances négatives de matrices ; en voilà néanmoins une solution possible :

Lorsque $n\in\mathbb{Z}^*$, on a :

$$A^n=\left(A^{-1}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{3}I-\frac{1}{9}K\right)^{-n}, \text{ avec } n\in\mathbb{N}^*$$

Puisque $\frac{1}{3}I$ et $\frac{1}{9}K$ commutent pour la multiplication des matrices, la formule du binôme de Newton s'applique et donne :

$$A^n=\left(\frac{1}{3}I-\frac{1}{9}K\right)^{-n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{-n}{k}\left(\frac{1}{3}I\right)^{-n-k}\left(-\frac{1}{9}K\right)^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{-n}{k}(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{-n+k}K^k$$

Puisque K appartient à $\mathcal{E}$, on a toujours, pour tout entier $k\geq 2$:

$$K^k=0$$

Il vient donc, pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$:

$$A^n=\sum_{k=0}^{1}\binom{-n}{k}(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{-n+k}K^k=\binom{-n}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}K^0-\binom{-n}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n+1}K=3^nI+n3^{n-1}nK$$

Ainsi **la formule trouvée à la question 2.c(i) pour tout $n\in\mathbb{N}$ est encore valable pour tout $n\in\mathbb{Z}$**.

4.a. D'après la question 3.a, on sait que :

$$A^2-6A+9I=0$$

Donc le polynôme X^2-6X+9 est un polynôme annulateur de A.
3 est la seule racine de ce polynôme, car celui-ci s'écrit, par identité remarquable :

$$X^2-6X+9=(X-3)^2$$

Puisque toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, **la seule valeur propre possible λ de A est $\lambda=3$**.

b. Cherchons s'il existe des matrices non nulles $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ telles que $AX=3X$; on a :

$$AX=3X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2\\-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y&=&3x\\-2x+5y&=&3y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+2y&=&0\\-5x+5y&=&0\end{cases} \Leftrightarrow x=y$$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est par exemple une matrice non nulle vérifiant $AX=3X$, donc **3 est effectivement valeur propre de A, et l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre 3 est** $\left\{\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$.

EXERCICE 2

1.a. On a, par définition de I_0 :

$$\mathbf{I_0} = \int_1^e t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{e^2-1}{2}}$$

b. On a, comme produit de nombres positifs ou nuls sur $[1,e]$:

$$\forall t \in [1,e] \quad t(\ln t)^n \geq 0$$

Il en résulte, par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur le segment $[1,e]$ que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\mathbf{I_n \geq 0}$$

c. Par définition de I_n, et par linéarité de l'intégrale, on a, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e t(\ln t)^{n+1}\,dt - \int_1^e t(\ln t)^n\,dt = \int_1^e \left(t(\ln t)^{n+1} - t(\ln t)^n\right)dt = \int_1^e t(\ln t)^n(\ln t - 1)\,dt$$

On a, puisque $t(\ln t)^n \geq 0$ et $\ln t - 1 \leq 0$ sur $[1,e]$:

$$\forall t \in [1,e] \quad t(\ln t)^n(\ln t - 1) \leq 0$$

Il vient donc, par négativité de l'intégrale d'une fonction négative sur le segment $[1,e]$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Ceci prouve que **la suite $(\mathbf{I_n})_{n\geq 0}$ est décroissante**.

La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, minorée par 0 d'après la question 1.b, donc le théorème de la convergence monotone assure que **la suite $(\mathbf{I_n})_{n\geq 0}$ est convergente**.

2.a. Compte-tenu de la formule de dérivation $(u^n)' = nu'u^{n-1}$, on obtient, **pour tout $t \in [1,e]$** :

$$\mathbf{f_n'(t)} = (n+1)\frac{1}{t}(\ln t)^n = \mathbf{(n+1)\frac{(\ln t)^n}{t}}$$

b. Par définition de I_n, on a, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = \int_1^e t(\ln t)^{n+1}\,dt$$

Calculons I_{n+1} à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel t de $[1,e]$:

$$u(t) = f_n(t) = (\ln t)^{n+1} \qquad u'(t) = f_n'(t) = (n+1)\frac{(\ln t)^n}{t}$$

$$v'(t) = t \qquad v(t) = \frac{1}{2}t^2$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[1,e]$, il vient :

$$I_{n+1} = \int_1^e t(\ln t)^{n+1}\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2(\ln t)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{(\ln t)^n}{t}\cdot\frac{1}{2}t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{n+1}{2}\int_1^e t(\ln t)^n\,dt = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n+1}{2}I_n$$

Ainsi a-t-on, après multiplication par 2 de cette égalité, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2} \quad (*)$$

c. En donnant à n la valeur 0 dans l'égalité $(*)$ de la question précédente, on a :

$$2I_1 + I_0 = e^2$$

Compte-tenu de la valeur de I_0 calculée à la question 1.a, il vient :

$$\mathbf{I_1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - I_0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{e^2-1}{2}\right) = \mathbf{\frac{e^2+1}{4}}$$

d. Puisque la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, on a, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} \leq I_n$$

Il résulte de la relation $(*)$ qu'on a, pour tout entier naturel n :

$$2I_{n+1} + (n+1)I_{n+1} = (n+3)I_{n+1} \leq 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2 \leq 2I_n + (n+1)I_n = (n+3)I_n$$

L'inégalité de droite donne, pour tout entier naturel n :

$$\frac{e^2}{n+3} \leq I_n$$

L'inégalité de gauche donne, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} \leq \frac{e^2}{n+3}$$

Et donc, en remplaçant n par $n-1$, pour tout entier naturel n :

$$I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$$

Ainsi a-t-on établi, **pour tout entier naturel n**, l'encadrement suivant :

$$\mathbf{\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}}$$

e. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^2}{n+2} = 0$$

L'encadrement de la question précédente et le théorème d'encadrement assurent que suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

En multipliant l'encadrement de la question précédente par n, on obtient, pour tout entier naturel n :

$$\frac{ne^2}{n+3} \leq nI_n \leq \frac{ne^2}{n+2}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n} = \lim_{n\to+\infty} e^2 = e^2 \text{ puis, de même, } \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^2}{n+2} = e^2$$

L'encadrement précédent et le théorème d'encadrement assurent que la suite $(nI_n)_{n\geq 0}$ converge et que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} nI_n = e^2}$$

f. On sait que :

$$I_0 = \frac{e^2-1}{2}$$

En utilisant la relation $(*)$, on obtient, pour tout entier naturel k :

$$I_{k+1}=\frac{e^2-(k+1)I_k}{2}$$

Donc, pour tout entier naturel k non nul :

$$I_k=\frac{e^2-kI_{k-1}}{2}$$

On peut alors complèter le script Scilab, afin qu'il calcule et affiche I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur, de la manière suivante :

```
n=input('donner une valeur à n:')
I=(exp(2)-1)/2
for k=1:n
   I=(exp(2)-k*I)/2
end
disp(I)
```

3.a. Rappelons l'encadrement obtenu à la question 2.d, pour tout entier naturel n :

$$\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$$

En remplaçant n par $n+1$ dans cet encadrement, et en le multipliant par 2, il vient :

$$\frac{2e^2}{n+4}\le 2I_{n+1}\le\frac{2e^2}{n+3}$$

En ajoutant ces deux encadrements, on obtient, pour tout entier naturel n :

$$\frac{2e^2}{n+4}+\frac{e^2}{n+3}\le 2I_{n+1}+I_n\le\frac{2e^2}{n+3}+\frac{e^2}{n+2}$$

Soit, après simplification, et **pour tout entier naturel n** :

$$\boldsymbol{\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)}\le 2I_{n+1}+I_n\le\frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}}$$

b. D'après la relation $(*)$ de la question 2.b, on a, pour tout entier naturel n :

$$w_n=n\left(e^2-nI_n\right)=n\left(2I_{n+1}+I_n\right)$$

En multipliant l'encadrement de la question 3.a par n, on obtient, pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)}\le w_n=n\left(2I_{n+1}+I_n\right)\le\frac{n(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2e^2}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}3e^2=3e^2 \text{ puis, de même, } \lim_{n\to+\infty}\frac{n(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}=3e^2$$

L'encadrement précédent et le théorème d'encadrement assurent que la suite $(w_n)_{n\ge0}$ converge et que :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}w_n=3e^2}$$

4. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$I_n=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a, d'après la question 1.a :

$$\frac{(-1)^0 0!}{2^{0+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{0}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)=\frac{1}{2}\left(e^2\frac{(-2)^0}{0!}-1\right)=\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)=I_0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$I_n=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$I_{n+1}=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)$$

On a, d'après la relation $(*)$ et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)\\
&=\frac{e^2}{2}+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}+\frac{e^2}{2}\cdot\frac{2^{n+2}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}-1\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}+e^2\frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}-1\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{2^{n+2}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)
\end{aligned}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{I_n=\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}-1\right)}$$

EXERCICE 3

1.a. A l'issue de la première expérience, l'urne contient une boule rouge si on a tiré une boule blanche (remise avec une boule blanche supplémentaire), et deux boules rouges, si on a tiré une boule rouge (remise avec une boule rouge supplémentaire), donc on a bien :

$$\mathbf{X_1(\Omega)=[\![1,2]\!]}$$

On a :

$$P([X_1=1])=P(B_1)=\frac{1}{2} \text{ et } P([X_1=2])=P(R_1)=\frac{1}{2}$$

Donc $\mathbf{X_1}$ **suit la loi uniforme sur** $[\![1,2]\!]$.

Il en résulte, d'après les formules du cours appliquées avec $n=2$, que :

$$\mathbf{E(X_1)}=\frac{n+1}{2}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \text{ et } \mathbf{V(X_1)}=\frac{n^2-1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

b. L'événement $[X_2=1]$ est réalisé si on a tiré deux boules blanches lors des deux premiers tirages, donc on a :

$$\mathbf{[X_2=1]=B_1\cap B_2}$$

L'événement $[X_2=2]$ est réalisé si on a tiré une boule blanche et une boule rouge lors des deux premiers tirages, donc on a :

$$\mathbf{[X_2=2]=(R_1\cap B_2)\cup(B_1\cap R_2)}$$

L'événement $[X_2=3]$ est réalisé si on a tiré deux boules rouges lors des deux premiers tirages, donc on a :

$$\mathbf{[X_2=3]=R_1\cap R_2}$$

c. D'après la question précédente, tous les cas de tirages de deux boules ayant été envisagés, on a :

$$X_2(\Omega)=[\![1,3]\!]$$

On a :

$$P([X_2=1])=P(B_1\cap B_2)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Et :

$$P([X_2=3])=P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P_{R_1}(R_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Il en résulte, puisque $X_2(\Omega)=[\![1,3]\!]$, que :

$$P([X_2=2])=1-P([X_2=1])-P([X_2=3])=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Donc $\mathbf{X_2}$ **suit la loi uniforme sur** $[\![1,3]\!]$.

Il en résulte, d'après les formules du cours appliquées avec $n=3$, que :

$$\mathbf{E(X_2)}=\frac{n+1}{2}=\frac{4}{2}=\mathbf{2} \text{ et } \mathbf{V(X_2)}=\frac{n^2-1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

2.a. Puisque $X_1\le X_2$, on a :

$$P([X_1=2]\cap[X_2=1])=P(\varnothing)=0$$

On a également, puisque $X_2\le X_1+1$:

$$P([X_1=1]\cap[X_2=3])=P(\varnothing)=0$$

En utilisant les lois marginales de X_1 et de X_2, on en déduit successivement que :

$$P([X_1=1]\cap[X_2=1])=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$P([X_1=2]\cap[X_2=3])=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$P([X_1=1]\cap[X_2=2])=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-0=\frac{1}{6}$$

$$P([X_1=2]\cap[X_2=2])=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

La loi conjointe du couple (X_1,X_2) est donc donnée par le tableau :

$X_1 \backslash X_2$	**1**	**2**	**3**	$P([X_1=x])$
1	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	**0**	$\frac{1}{2}$
2	**0**	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{2}$
$P([X_2=y])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

b. On a :

$$\operatorname{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$$

On a déjà vu, aux questions 1.a et 1.c que :

$$E(X_1)=\frac{3}{2} \text{ et } E(X_2)=2$$

On a :

$$E(X_1X_2)=\sum_{\substack{x\in X_1(\Omega)\\ y\in X_2(\Omega)}} xyP([X_1=x]\cap[X_2=y])=1\cdot1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot3\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+2=\frac{10}{3}$$

Il vient donc :

$$\mathbf{cov}(\mathbf{X_1},\mathbf{X_2})=\frac{10}{3}-\frac{3}{2}\cdot2=\frac{10}{3}-3=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

Puisque $\operatorname{cov}(X_1,X_2)\neq0$, **les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes**.

3.a. Pour tout entier $n\geq1$, l'événement $[X_n=1]$ est réalisé si on tire une boule blanche lors de chacun des n tirages, donc on a, **pour tout entier $n\geq1$**,

$$\mathbf{[X_n=1]=B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_n}$$

b. D'après la question précédente et la formule des probabilités composées, il vient :

$$\mathbf{P([X_n=1])}=P(B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_n)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)\ldots P_{B_1\cap B_2\cap\ldots\cap B_{n-1}}(B_n)$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\cancel{\cdots}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+1}=\mathbf{\frac{1}{n+1}}$$

De même, pour tout entier $n\geq1$, l'événement $[X_n=n+1]$ est réalisé si on tire une boule rouge lors des n tirages, donc on a, pour tout entier $n\geq1$:

$$[X_n=n+1]=R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_2$$

Puis :

$$\mathbf{P([X_n=n+1])}=P(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)=P(R_1)P_{R_1}(R_2)\ldots P_{R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_{n-1}}(R_n)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{}}{} \cdots \frac{}{\cancel{}} \cdot \frac{\cancel{n}}{n+1} = \mathbf{\frac{1}{n+1}}$$

4.a. Pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, $P_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k])$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans une urne contenant $k-1$ boules rouges et $n+2$ boules (les deux initiales et n boules rajoutées), donc :

$$\mathbf{P_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) = \frac{k-1}{n+2}}$$

Pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, $P_{[X_n = k]}([X_{n+1} = k])$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules rouges, $n+2$ boules (les deux initiales et n boules rajoutées), et donc $n+2-k$ boules blanches ; ainsi :

$$\mathbf{P_{[X_n = k]}([X_{n+1} = k]) = \frac{n+2-k}{n+2}}$$

b. Pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $[X_{n+1} = k]$ est réalisé si et seulement si l'événement $[X_n = k]$ ou l'événement $[X_n = k-1]$ est réalisé ; il vient donc, par incompatibilité, **pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$** :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P([X_{n+1} = k])} &= P\big(([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k]) \cup ([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k-1])\big) \\
&= P([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k]) + P([X_{n+1} = k] \cap [X_n = k-1]) \\
&= P([X_n = k]) P_{[X_n = k]}([X_{n+1} = k]) + P([X_n = k-1]) P_{[X_n = k-1]}([X_{n+1} = k]) \\
&= \mathbf{\frac{n+2-k}{n+2} P([X_n = k]) + \frac{k-1}{n+2} P([X_n = k-1])}
\end{aligned}$$

c. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier $n \geq 1$, par :

X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$

Initialisation :

P_1 est vraie car, d'après la question 1.a, X_1 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier $n \geq 1$, c'est-à-dire :

X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

X_{n+1} suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$

On sait, d'après la question 3.b, en remplaçant n par $n+1$, que :

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{n+2} \text{ et } P([X_{n+1} = n+2]) = \frac{1}{n+2}$$

D'après la question précédente, et l'hypothèse de récurrence, on a, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}
P([X_{n+1} = k]) &= \frac{n+2-k}{n+2} P([X_n = k]) + \frac{k-1}{n+2} P([X_n = k-1]) = \frac{n+2-k}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n+2-k+k-1}{(n+2)(n+1)} = \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier $n \geq 1$, la variable**

aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

5. Le programme Scilab est complété comme suit, afin qu'il simule une réalisation de la variable X_n où l'entier n est entré au clavier.

```
n=input('donner une valeur à n:')
r=1;b=1
for k=1:n
   if rand()<r/(r+b) then r=r+1
                        else b=b+1
   end
end
x=r
disp(x)
```

6.a. Si on échange la couleur des boules, l'expérience est inchangée, et Y_n devient X_n, donc **les variables aléatoires X_n et Y_n sont de même loi**.

b. Pour tout entier $n \geq 1$, $X_n + Y_n$ est le nombre de boules contenues dans l'urne après la n-ième expérience ; comme il y avait initialement deux boules dans l'urne, et qu'il en a été rajouté n à l'issue de la n-ième expérience, on a, **pour tout entier $n \geq 1$** :

$$\mathbf{X_n + Y_n = n+2}$$

c. D'après la question précédente, on a :

$$Y_n = -X_n + n + 2$$

Puisque Y_n s'écrit sous la forme $Y_n = aX_n + b$ avec $a < 0$, il en résulte que le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n vaut :

$$\rho(\mathbf{X_n}, \mathbf{Y_n}) = -\mathbf{1}$$

EXERCICE 4

1.a. Puisque Z est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, les formules du cours donnent :

$$\mathbf{E(Z) = \frac{1}{\lambda}} \text{ et } \mathbf{V(Z) = \frac{1}{\lambda^2}}$$

La formule de Koenig-Huygens s'écrit :

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$$

On en déduit que :

$$\mathbf{E(Z^2)} = V(Z) + (E(Z))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \mathbf{\frac{2}{\lambda^2}}$$

2.a. f est continue sur $]-\infty, 0[$ comme fonction constante nulle, et continue sur $[0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions qui le sont ; de plus, f est continue en 0 car :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 0 = 0 = f(0)$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, car on a :

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}\geq 0 & \text{si } x\geq 0\\ 0\geq 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Sous réserve de convergence, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda x g(x)\,dx$$

Puisque, d'après la question 1, $E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\,dx$ existe et vaut $\frac{1}{\lambda}$, par linéarité de l'intégrale, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\,dx=\lambda E(Z)=\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}=1$$

Ainsi **f est bien une densité de probabilité**.

b. Sous réserve de convergence, l'espérance de la variable aléatoire U est :

$$E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda x^2 g(x)\,dx$$

Puisque, d'après la question 1, $E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$ existe et vaut $\frac{2}{\lambda^2}$, par linéarité de l'intégrale, $\mathbf{E(U)}$ **existe**, et on a :

$$\mathbf{E(U)}=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,dx=\lambda E(Z^2)=\lambda\cdot\frac{2}{\lambda^2}=\mathbf{\frac{2}{\lambda}}$$

3.a. Pour tout réel $A>0$, calculons $\int_0^A x^3 e^{-\lambda x}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel x de $[0,A]$:

$$u(x)=x^3 \qquad u'(x)=3x^2$$
$$v'(x)=e^{-\lambda x} \qquad v(x)=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[0,A]$, il vient :

$$\int_0^A x^3 e^{-\lambda x}\,dx=\left[-\frac{x^3}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A-\int_0^e -\frac{1}{\lambda}3x^2 e^{-\lambda x}\,dt=-\frac{A^3}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{3}{\lambda}\int_0^A x^2 e^{-\lambda x}\,dx$$

b. On a, d'après la question 1 :

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{3}{\lambda}\int_0^A x^2 e^{-\lambda x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{3}{\lambda^2}\int_0^A \lambda x^2 e^{-\lambda x}\,dx=\frac{3}{\lambda^2}E(Z^2)=\frac{3}{\lambda^2}\cdot\frac{2}{\lambda^2}=\frac{6}{\lambda^4}$$

Et :

$$\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A^3}{\lambda}e^{-\lambda A}\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda^4}\cdot\frac{(\lambda A)^3}{e^{\lambda A}}\right)=0$$

Car :

$$\lim_{A\to+\infty}\lambda A=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty \text{ (croissance comparée)}$$

Il en résulte de la question précédente que :

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^3 e^{-\lambda x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A^3}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{3}{\lambda}\int_0^A x^2 e^{-\lambda x}\,dx\right)=\frac{6}{\lambda^4}$$

Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x}\,dx$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{x^3 e^{-\lambda x}\,dx = \frac{6}{\lambda^4}}$$

Sous réserve d'existence, on a :

$$E\left(U^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x^3 g(x)\,dx$$

On a :

$$\int_{-\infty}^{0} \lambda x^3 g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$$

Et, d'après le calcul de l'intégrale précédente :

$$\int_0^{+\infty} \lambda x^3 g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^3 e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \cdot \frac{6}{\lambda^4} = \frac{6}{\lambda^2}$$

Il en résulte que $E\left(U^2\right)$ existe et que :

$$E\left(U^2\right) = \int_{-\infty}^{0} \lambda x^3 g(x)\,dx + \int_0^{+\infty} \lambda x^3 g(x)\,dx = \frac{6}{\lambda^2}$$

Puisque $E\left(U^2\right)$ existe, **la variance de U existe**.

c. La formule de Koenig-Huygens s'écrit :

$$V(U) = E\left(U^2\right) - \left(E(U)\right)^2$$

Soit encore, compte-tenu de la question précédente et de la question 2.b

$$\mathbf{V(U)} = \frac{6}{\lambda^2} - \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = \mathbf{\frac{2}{\lambda^2}}$$

4.a. Si $x < 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Si $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t}\,dt = \lambda^2 \int_0^x t e^{-\lambda t}\,dt$$

Calculons $\int_0^x t e^{-\lambda t}\,dt$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel t de $[0, x]$:

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$$

$$v'(t) = e^{-\lambda t} \qquad v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[0, x]$, il vient :

$$\int_0^x t e^{-\lambda t}\,dtx = \left[-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}$$

Il vient donc :

$$F(x) = \lambda^2 \left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda^2}\right) = -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 = 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}} & \mathbf{si\ x \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \end{cases}$$

b. D'après la question 2.b, on a :

$$\left|U-E(U)\right|\leq E(U)\Leftrightarrow\left|U-\frac{2}{\lambda}\right|\leq\frac{2}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{2}{\lambda}\leq U-\frac{2}{\lambda}\leq\frac{2}{\lambda}\Leftrightarrow 0\leq U\leq\frac{4}{\lambda}$$

On a donc l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\left[\left|\mathbf{U}-\mathbf{E}(\mathbf{U})\right|\leq\mathbf{E}(\mathbf{U})\right]\right)=\mathbf{P}\left(\left[0\leq\mathbf{U}\leq\frac{4}{\boldsymbol{\lambda}}\right]\right)$$

c. Il résulte de la question précédente que :

$$P\left(\left[\left|U-E(U)\right|\leq E(U)\right]\right)=P\left(\left[0\leq U\leq\frac{4}{\lambda}\right]\right)=F\left(\frac{4}{\lambda}\right)-F(0)$$

Compte-tenu de la question 4.a, il vient :

$$P\left(\left[\left|U-E(U)\right|\leq E(U)\right]\right)=F\left(\frac{4}{\lambda}\right)-F(0)=1-\left(1+\lambda\cdot\frac{4}{\lambda}\right)e^{-\lambda\cdot\frac{4}{\lambda}}-0=1-5e^{-4}$$

Puisque $e^4\approx 54,6$, il vient :

$$1-5e^{-4}\approx 1-\frac{5}{54,6}>1-0,1=0,9$$

Car :

$$\frac{5}{54,6}<\frac{5}{50}=0,1$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$\mathbf{P}\left(\left[\left|\mathbf{U}-\mathbf{E}(\mathbf{U})\right|\leq\mathbf{E}(\mathbf{U})\right]\right)>\mathbf{0,9}$$

5.a. Par définition de $\overline{U_n}$ et par linéarité de l'espérance, on a :

$$E\left(\overline{U_n}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(U_k)$$

Puisque les variables aléatoires U_k suivent toutes la même loi que U, et d'après la question 2.b, il vient :

$$E\left(\overline{U_n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(U)=\frac{1}{n}\cdot nE(U)=E(U)=\frac{2}{\lambda}=2a$$

Posons alors :

$$W_n=\frac{1}{2}\overline{U_n}$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(W_n)=E\left(\frac{1}{2}\overline{U_n}\right)=\frac{1}{2}E\left(\overline{U_n}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2a=a$$

Ainsi $\mathbf{W_n=\frac{1}{2}\overline{U_n}}$ **est un estimateur sans biais du paramètre a**.

b. Par définition de W_n, de $\overline{U_n}$ et par propriété de la variance, il vient :

$$V(W_n)=V\left(\frac{1}{2}\overline{U_n}\right)=\frac{1}{4}V\left(\overline{U_n}\right)=\frac{1}{4}V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U_k\right)=\frac{1}{4n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n}U_k\right)$$

Puisque les variables aléatoires U_k suivent toutes la même loi que U et sont indépendantes, et d'après la question 3.c, il vient :

$$V(\mathbf{W_n}) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(U_k) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V(U) = \frac{1}{4n^2}\cdot nV(U) = \frac{1}{4n}V(U) = \frac{1}{4n}\cdot\frac{2}{\lambda^2} = \mathbf{\frac{a^2}{2n}}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{V(W_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^2}{2n} = \mathbf{0}$$

c. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'écrire, pour tout $\varepsilon > 0$, que :

$$P\left(\left[\left|W_n - E(W_n)\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2}$$

Compte-tenu de la question 5.a, il vient :

$$0 \leq P\left(\left[\left|W_n - a\right| \geq \varepsilon\right]\right) \leq \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2}$$

Compte-tenu de la question 5.b, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V(W_n)}{\varepsilon^2} = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0$$

L'encadrement précédent et le théorème d'encadrement assurent que la suite $\left(P\left(\left[\left|W_n - a\right| \geq \varepsilon\right]\right)\right)_{n\geq 1}$ converge et que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left[\left|\mathbf{W_n} - \mathbf{a}\right| \geq \varepsilon\right]\right) = \mathbf{0}$$