CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{M^2} = MM = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{M^3} = M^2M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Si M était inversible, on aurait :

$$M^3 = 0 \Rightarrow M^{-1}M^3 = M^{-1}0 \Leftrightarrow M^2 = 0$$

Ceci est absurde vu le calcul de M^2 effectué ci-dessus, donc **M n'est pas inversible**.

b. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$\mathbf{M^n} = M^3M^{n-3} = 0M^{n-3} = \mathbf{0}$$

c. On obtient, en développant et en utilisant la question 1.a :

$$(\mathbf{I}-\mathbf{M})(\mathbf{I}+\mathbf{M}+\mathbf{M^2}) = I + M + M^2 - M - M^2 - M^3 = I - M^3 = \mathbf{I}$$

D'après l'égalité précédente, $(I-M)$ est inversible et son inverse est :

$$(\mathbf{I}-\mathbf{M})^{-1} = \mathbf{I}+\mathbf{M}+\mathbf{M^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

d. D'après la question 1.a, $M^3 = 0$, donc $\mathbf{X^3}$ **est un polynôme annulateur de la matrice M**.

e. Les valeurs propres possibles de M sont les racines de tout polynôme annulateur de M ; puisque 0 est la seule racine du polynôme X^3, **0 est la seule valeur propre possible de M**.

2.a. Puisque M et I commutent, la formule du binôme de Newton donne, pour tout entier naturel n :

$$S^n = (M+I)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^kI^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^kI = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^k$$

Il en résulte de la question 1.b que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S^n = \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}M^k = \binom{n}{0}M^0 + \binom{n}{1}M^1 + \binom{n}{2}M^2$$

On a :

$$\binom{n}{0} = 1,\ \binom{n}{1} = n \text{ et } \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ainsi a-t-on, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2$$

Cette égalité reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ car :

$$I + 0M + \frac{0(0-1)}{2}M^2 = I = S^0 \text{ et } I + 1M + \frac{1(1-1)}{2}M^2 = I + M = S = S^1$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{S^n = I + nM + \frac{n(n-1)}{2}M^2}$$

b. D'après l'égalité de la question précédente, la deuxième colonne de la matrice S^n est la somme des deuxièmes colonnes des matrices I, nM et $\frac{n(n-1)}{2}M^2$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+\frac{n(n-1)}{2}\\1-n-n(n-1)\\\frac{n(n-1)}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)}{2}\\1-n^2\\\frac{n(n-1)}{2}\end{pmatrix}$$

La deuxième colonne de la matrice S^n est $\begin{pmatrix}\mathbf{\frac{n(n+1)}{2}}\\\mathbf{1-n^2}\\\mathbf{\frac{n(n-1)}{2}}\end{pmatrix}$.

3.a. On a :

$$S = M + I = \begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-3&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u_{n+1}}\\\mathbf{v_{n+1}}\\\mathbf{w_{n+1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3u_n+v_n\\-3u_n+w_n\\u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-3&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}\mathbf{=S}\begin{pmatrix}\mathbf{u_n}\\\mathbf{v_n}\\\mathbf{w_n}\end{pmatrix}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=S^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$S^0\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}=I\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=S^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 360 13/10/2017 11:36

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

On a, d'après la question 3.a et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = SS^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^{n+1} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u_n} \\ \mathbf{v_n} \\ \mathbf{w_n} \end{pmatrix} = \mathbf{S^n} \begin{pmatrix} \mathbf{u_0} \\ \mathbf{v_0} \\ \mathbf{w_0} \end{pmatrix}$$

c. Il résulte de la question précédente que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ est donc la deuxième colonne de S^n, obtenue à la question 2.b ; ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n = \frac{n(n+1)}{2}}, \ \mathbf{v_n = 1 - n^2} \ \text{ et } \ \mathbf{w_n = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n + v_n + w_n} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - n^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 - n^2 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \mathbf{1}$$

4.a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{V} = -MU = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{W} = M^2U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

b. Par définition, on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vient donc :

$$\mathbf{P^2} = PP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Puisque $P^2 = I$, **P est inversible** et son inverse est la matrice :

$$\mathbf{P^{-1} = P}$$

c. Les calculs donnent :

$$MP=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

Puis :

$$\mathbf{J}=PMP=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&2&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Notons que J est bien une matrice d'ordre 3, triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux tous nuls.

EXERCICE 2

1. On a bien :

$$\mathbf{u_2}=\frac{u_1^2}{u_1+v_1}=\frac{1^2}{1+2}=\mathbf{\frac{1}{3}} \text{ et } \mathbf{v_2}=\frac{v_1^2}{u_1+v_1}=\frac{2^2}{1+2}=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

On a :

$$\mathbf{u_3}=\frac{u_2^2}{u_2+v_2}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{1}{15}} \text{ et } \mathbf{v_3}=\frac{v_2^2}{u_2+v_2}=\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{5}{3}}=\frac{16}{9}\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{\frac{16}{15}}$$

2. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n>0 \text{ et } v_n>0$$

Initialisation :

P_1 est vraie car on a :

$$u_1=1>0 \text{ et } v_1=2>0$$

Hérédité :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$u_n>0 \text{ et } v_n>0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1}>0 \text{ et } v_{n+1}>0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n>0 \text{ et } v_n>0,\text{ donc } u_n^2>0,\ v_n^2>0 \text{ et } u_n+v_n>0$$

Donc, par définition de u_{n+1} et v_{n+1}, il vient :

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2}{u_n+v_n}>0 \text{ et } v_{n+1}=\frac{v_n^2}{u_n+v_n}>0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n non nul**, on a :

$$\mathbf{u_n>0 \text{ et } v_n>0}$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 362 13/10/2017 11:36

3. Puisque $u_n > 0$ et $v_n > 0$ d'après la question précédente, il vient, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} < 0$$

Et :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} - v_n = \frac{v_n^2 - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = -\frac{u_n v_n}{u_n + v_n} < 0$$

Donc **les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont décroissantes**.

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont décroissantes et minorées par 0, d'après la question 2 ; donc **les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes**, d'après le théorème de la convergence monotone.

4.a. On a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - \frac{v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = u_n - v_n$$

Ceci prouve que **la suite $(u_n - v_n)_{n\geq 1}$ est constante**, et on a, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n - v_n = u_1 - v_1 = 1 - 2 = -1$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette dernière égalité, on en déduit la relation suivante entre ℓ et ℓ' :

$$\boldsymbol{\ell - \ell' = -1}$$

b. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, il vient :

$$\ell(\ell + \ell') = \ell^2$$

On a alors :

$$\ell(\ell + \ell') = \ell^2 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell\ell' = \ell^2 \Leftrightarrow \ell\ell' = 0$$

Donc on a bien :

$$\boldsymbol{\ell\ell' = 0}$$

c. On a, d'après la question 4.b :

$$\ell\ell' = 0 \Leftrightarrow (\ell = 0 \text{ ou } \ell' = 0)$$

En utilisant la relation $\ell - \ell' = -1$ obtenue à la question 4.a, il vient :

$$(\ell = 0 \Rightarrow \ell' = 1) \text{ et } (\ell' = 0 \Rightarrow \ell = -1)$$

Par passage à la limite dans l'inégalité $u_n > 0$ obtenue à la question 2, on obtient :

$$\ell \geq 0$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\ell = 0 \text{ et } \ell' = 1}$$

5. Les lignes (6) et (7) du programme Scilab complétées afin qu'il calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n pour une valeur n entrée par l'utilisateur sont les suivantes :

(6) u=u^2/(u+v)
(7) v=v^2/(a+v)

6.a. Au départ, s est une matrice ligne à n colonnes ne contenant que des 1 ; pour chaque valeur de l'entier naturel k comprise entre 2 et 10, l'instruction (9) remplace le k-ième terme de s par u_k, et puisque le premier terme de s vaut $u_1 = 1$, **la variable s contient l'issue du programme les valeurs $u_1, u_2, \ldots u_n$**.

La variable y contient l'issue du programme les valeurs u_1, $u_1 + u_2, \ldots, u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

b. L'instruction plot2d(x,y) de la ligne (15) relie par des segments les points de coordonnées $\left(k, \sum_{i=1}^{k} u_i\right)$, pour k entier naturel compris entre 1 et n, avec ici $n = 10$; en observant le graphique, on peut conjecturer que la somme $\sum_{i=1}^{k} u_i$ admet une limite finie proche de $1{,}4$, lorsque k tend vers $+\infty$, c'est-à-dire **conjecturer que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} u_i$ est convergente et que sa somme est proche de $1{,}4$**.

EXERCICE 3

1. f est continue sur $]-\infty,-1[$, $[-1,0]$, $]0,1]$ et sur $]1,+\infty[$ comme fonction constante sur chacun de ces intervalles ; de plus, f admet des limites finies à gauche et à droite en -1, 0 et 1, puisque :

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} 0 = 0 \text{ et } \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1-a}{2} = \frac{1-a}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1-a}{2} = \frac{1-a}{2} \text{ et } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1+a}{2} = \frac{1+a}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1+a}{2} = \frac{1+a}{2} \text{ et } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 0 = 0$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x appartenant à $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, on a :

$$f(x) = 0 \geq 0$$

Pour tout réel x appartenant à $[-1,0]$, on a, puisque $a \leq \frac{1}{2} < 1$:

$$f(x) = \frac{1-a}{2} > 0$$

Pour tout réel x appartenant à $]0,1]$, on a, puisque $-1 < -\frac{1}{2} \leq a$:

$$f(x) = \frac{1+a}{2} > 0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

$\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ convergent et valent :

$$\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx = 0 \text{ et } \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} 0dx = 0$$

On a :

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2}dx = \frac{1-a}{2}(0+1) = \frac{1-a}{2} \text{ et } \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2}dx = \frac{1+a}{2}(1-0) = \frac{1+a}{2}$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 364 13/10/2017 11:36

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} + 0 = 1$$

Ainsi **f est bien une densité de probabilité**.

2. Sous réserve de convergence, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} xf(x)dx$ convergent et valent :

$$\int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx = 0 \text{ et } \int_{1}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{+\infty} 0dx = 0$$

On a :

$$\int_{-1}^{0} xf(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2} xdx = \frac{1-a}{2}\int_{-1}^{0} xdx = \frac{1-a}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{a-1}{4}$$

Et :

$$\int_{0}^{1} xf(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2} xdx = \frac{1+a}{2}\int_{0}^{1} xdx = \frac{1+a}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1+a}{4}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge, et on a :

$$\mathbf{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} xf(x)dx + \int_{-1}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{+\infty} xf(x)dx$$
$$= 0 + \frac{a-1}{4} + \frac{1+a}{4} + 0 = \mathbf{\frac{a}{2}}$$

Sous réserve de convergence, on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx$$

$\int_{-\infty}^{-1} x^2f(x)dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2f(x)dx$ convergent et valent :

$$\int_{-\infty}^{-1} x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} 0dx = 0 \text{ et } \int_{1}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} 0dx = 0$$

On a :

$$\int_{-1}^{0} x^2f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1-a}{2} x^2dx = \frac{1-a}{2}\int_{-1}^{0} x^2dx = \frac{1-a}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = \frac{1-a}{6}$$

Et :

$$\int_{0}^{1} x^2f(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1+a}{2} x^2dx = \frac{1+a}{2}\int_{0}^{1} x^2dx = \frac{1+a}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1+a}{6}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx$ converge, et on a :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} x^2f(x)dx + \int_{-1}^{0} x^2f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} x^2f(x)dx$$
$$= 0 + \frac{1-a}{6} + \frac{1+a}{6} + 0 = \frac{1}{3}$$

Puisque $E(X^2)$ existe, $V(X)$ existe et d'après la formule de Koenig-Huygens, on a bien :

$$\mathbf{V(X)} = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{a^2}{4} = \mathbf{\frac{4-3a^2}{12}}$$

3. Par définition de la fonction de répartition F_X de X, on a, pour tout réel x :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

On a donc, pour tout réel x de $]-\infty, -1[$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

Et pour tout réel x de $[-1, 0]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{1-a}{2}\,dt = 0 + \frac{1-a}{2}(x+1) = \frac{1-a}{2}(x+1)$$

Et pour tout réel x de $]0, 1]$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1+a}{2}\,dt = F_X(0) + \frac{1+a}{2}x = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2}x$$

Et pour tout réel x de $]1, +\infty[$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = F_X(1) + 0 = \frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2} = 1$$

Ainsi a-t-on déterminé que :

$$\mathbf{F_X(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \textbf{si } \mathbf{x < -1} \\ \mathbf{\frac{1-a}{2}(x+1)} & \textbf{si } \mathbf{-1 \le x \le 0} \\ \mathbf{\frac{1-a}{2} + \frac{1+a}{2}x} & \textbf{si } \mathbf{0 < x \le 1} \\ \mathbf{1} & \textbf{si } \mathbf{x > 1} \end{cases}$$

4.a. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(Y_n) = E(2\overline{X}_n) = 2E(\overline{X}_n) = 2E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

Comme $X_1, X_2, \ldots X_n$ suivent la même loi que X, on a, d'après la question 2, pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$E(X_k) = E(X) = \frac{a}{2}$$

Il en résulte que :

$$E(Y)_n = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{2} = \frac{2}{n}\left(n\frac{a}{2}\right) = a$$

Ceci prouve que **la variable aléatoire $Y_n = 2\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais du paramètre a**.

b. Puisque Y_n est un estimateur sans biais du paramètre a, son risque quadratique $r(Y_n)$ est :

$$r(Y_n) = V(Y_n)$$

On a, par propriété de la variance :

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 366 13/10/2017 11:36

$$r(Y_n)=V(Y_n)=V(2\overline{X_n})=4V(\overline{X_n})=4V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{4}{n^2}V\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)$$

$X_1, X_2, \dots X_n$ étant indépendantes, il vient :

$$r(Y_n)=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$$

Comme $X_1, X_2, \dots X_n$ suivent la même loi que X, on a, d'après la question 2, pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$V(X_k)=V(X)=\frac{4-3a^2}{12}$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{r(Y_n)}=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{4-3a^2}{12}=\frac{4}{n^2}\left(n\frac{4-3a^2}{12}\right)=\mathbf{\frac{4-3a^2}{3n}}$$

c. Puisque Y_n est une variable aléatoire à densité admettant une variance, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut s'écrire, ε étant un réel strictement positif :

$$p\left(\left[|Y_n-E(Y_n)|>\varepsilon\right]\right)\leq\frac{V(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

Soit encore, d'après la question 2 :

$$p\left(\left[|Y_n-a|>\varepsilon\right]\right)\leq\frac{4-3a^2}{3n\varepsilon^2}$$

Puis :

$$1-P\left(\left[|Y_n-a|\leq\varepsilon\right]\right)\leq\frac{4}{3n\varepsilon^2}$$

Il en résulte que :

$$\mathbf{P\left(\left[|Y_n-a|\leq\varepsilon\right]\right)\geq 1-\frac{4}{3n\varepsilon^2}}$$

5.a. Comme $X_1, X_2, \dots X_n$ suivent la même loi que X, on a, d'après la question 3, pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$P\left(\left[X_k\leq\frac{1}{2}\right]\right)=F_X\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-a}{2}+\frac{1+a}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2-2a+1+a}{4}=\frac{3-a}{4}$$

$X_1, X_2, \dots X_n$ étant indépendantes, les événements $\left[X_1\leq\frac{1}{2}\right], \left[X_2\leq\frac{1}{2}\right], \dots, \left[X_n\leq\frac{1}{2}\right]$ sont indépendants.

Si on appelle succès l'événement « une des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots X_n$ prend une valeur inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$ », de probabilité $\frac{3-a}{4}$, Z_n compte le nombre de succès au cours de n épreuves identiques et indépendantes, donc **Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{3-a}{4}\right)$**.

On a de même pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$P\left(\left[X_k>\frac{1}{2}\right]\right)=1-P\left(\left[X_k\leq\frac{1}{2}\right]\right)=1-F_X\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{3-a}{4}=\frac{1+a}{4}$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 367 13/10/2017 11:36

Il en résulte, par une argumentation similaire, que T_n **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}\left(\mathbf{n}, \frac{\mathbf{1+a}}{\mathbf{4}}\right)$.

b. Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(W_n) = E\left(1+\frac{2}{n}(T_n - Z_n)\right) = 1+\frac{2}{n}\big(E(T_n)-E(Z_n)\big)$$

Puisque Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$ et T_n la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$, il vient :

$$E(Z_n) = n\frac{3-a}{4} \text{ et } E(T_n) = n\frac{1+a}{4}$$

Il en résulte que :

$$E(W_n) = 1+\frac{2}{n}\left(n\frac{1+a}{4} - n\frac{3-a}{4}\right) = 1+\frac{2}{n}n\frac{a-1}{2} = 1+a-1 = a$$

Ceci prouve que **W_n est un estimateur sans biais de a.**

c. Puisqu'il y a n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots X_n$ prenant des valeurs inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$ ou strictement supérieures à $\frac{1}{2}$, on a :

$$\mathbf{Z_n + T_n = n}$$

On sait que :

$$V(Z_n + T_n) = V(Z_n) + V(T_n) + 2\operatorname{Cov}(T_n, Z_n)$$

Il vient donc :

$$\operatorname{Cov}(T_n, Z_n) = \frac{1}{2}\big(V(Z_n+T_n) - V(Z_n) - V(T_n)\big)$$

Puisque $Z_n + T_n$ est constante, on a :

$$V(Z_n + T_n) = 0$$

Puisque $T_n = n - Z_n$, il vient :

$$V(T_n) = (-1)^2 V(Z_n) = V(Z_n)$$

Il en résulte que :

$$\operatorname{Cov}(T_n, Z_n) = -V(Z_n)$$

Puisque Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$, on obtient enfin :

$$\mathbf{Cov(T_n, Z_n)} = -V(Z_n) = -n\frac{3-a}{4}\left(1-\frac{3-a}{4}\right) = -n\frac{(3-a)(a+1)}{16} = \mathbf{n\frac{(a-3)(a+1)}{16}}$$

d. D'après la formule $V(aX+b) = a^2V(X)$ linéarité de l'espérance, on a :

$$V(W_n) = V\left(1+\frac{2}{n}(T_n - Z_n)\right) = \frac{4}{n^2}V(T_n - Z_n)$$

Il vient donc :

$$V(W_n) = \frac{4}{n^2}\big(V(T_n) + V(Z_n) - 2\operatorname{Cov}(T_n, Z_n)\big) = \frac{4}{n^2}\big(V(Z_n)+V(Z_n)+2V(Z_n)\big) = \frac{16}{n^2}V(Z_n)$$

On a donc :

$$\mathbf{V(W_n)} = \frac{16}{n^2}V(Z_n) = \frac{16}{n^2}n\frac{(3-a)(a+1)}{16} = \mathbf{\frac{(3-a)(a+1)}{n}}$$

Puisque W_n est un estimateur sans biais de a, son risque quadratique $r(W_n)$ est :

$$\mathbf{r(W_n)} = V(W_n) = \frac{\mathbf{(3-a)(a+1)}}{\mathbf{n}}$$

Il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{r(W_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3-a)(a+1)}{n} = \mathbf{0}$$

EXERCICE 4

1.a. Une exponentielle étant toujours strictement positive, on a bien, pour tout x de $[0,1]$:

$$0 \le e^{-x^2}$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on a, pour tout x de $[0,1]$:

$$x^2 \ge 0 \Rightarrow -x^2 \le 0 \Rightarrow e^{-x^2} \le e^0 = 1$$

On a bien établi, **pour tout x de $[0,1]$**, l'encadrement :

$$\mathbf{0 \le e^{-x^2} \le 1}$$

b. On a, pour tout entier naturel n, par définition de I_n :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx$$

Par multiplication de l'inégalité de la question précédente par x^n, positif ou nul sur $[0,1]$, il vient, pour tout x de $[0,1]$:

$$0 \le x^n e^{-x^2} \le x^n$$

Par positivité de l'intégrale d'une fonction positive sur le segment $[0,1]$, il vient :

$$I_n \ge 0$$

Par intégration d'inégalité sur le segment $[0,1]$, il vient :

$$\left(\forall x \in [0,1] \quad x^n e^{-x^2} \le x^n\right) \Rightarrow I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2} dx \le \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}}$$

c. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

L'encadrement de la question précédente et le théorème d'encadrement assurent que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{I_n = 0}$$

2.a. On a :

$$\mathbf{\forall x \in [0,1] \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}}$$

b. Par définition, on a :

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x^2} dx$$

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 369 13/10/2017 11:36

D'après la question précédente, la fonction $-\frac{1}{2}f$ est une primitive de la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ sur $[0,1]$, donc il vient :

$$\mathbf{I_1} = \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2e}}$$

3.a. Par définition de I_n, on a, pour tout entier naturel n :

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}e^{-x^2}dx = \int_0^1 x^{n+1} \cdot xe^{-x^2}dx$$

Calculons I_{n+2} à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$u(x) = x^{n+1} \qquad u'(x) = (n+1)x^n$$

$$v'(x) = xe^{-x^2} \qquad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[0,1]$, il vient :

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}e^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}x^{n+1}e^{-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx = \frac{n+1}{2}I_n - \frac{1}{2e}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n - \frac{1}{2e}}$$

b. Le résultat de la question précédente peut s'écrire :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n - \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2I_{n+2} = nI_n + I_n - \frac{1}{e} \Leftrightarrow nI_n = 2I_{n+2} - I_n + \frac{1}{e}$$

Il vient donc :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} nI_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(2I_{n+2} - I_n + \frac{1}{e}\right) = \mathbf{\frac{1}{e}}$$

Car, d'après la question 1.c, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} I_{n+2} = 0$$

4.a. En remplaçant n par $2n+1$ dans l'égalité obtenue à la question 3.a, on obtient :

$$\mathbf{u_{n+1}} = \frac{I_{2n+3}}{(n+1)!} = \frac{\frac{2n+2}{2}I_{2n+1} - \frac{1}{2e}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)I_{2n+1}}{(n+1)n!} - \frac{1}{2e(n+1)!} = \frac{I_{2n+1}}{n!} - \frac{1}{2e(n+1)!}$$

$$\mathbf{= u_n - \frac{1}{2e} \cdot \frac{1}{(n+1)!}}$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Initialisation :

P_0 est vraie car on a, d'après la question 2.b :

978-2-7590-3637-0_Annales-HEC-2017_BAT.indd 370 13/10/2017 11:36

$$u_0=\frac{I_1}{0!}=I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e} \text{ et } \frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\cdot\frac{1}{0!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$$

Donc on a bien :

$$u_0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!}$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$$

On a, d'après la formule du début de cette question et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1}=u_n-\frac{1}{2e}\cdot\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2e}\cdot\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$$

b. Il résulte de la définition de u_n et de la deuxième égalité de la question précédente, l'expression suivante de I_{2n+1} en fonction de n sous forme de somme :

$$\mathbf{I_{2n+1}}=n!u_n=n!\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=\mathbf{\frac{n!}{2}-\frac{n!}{2e}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}$$

c. En remplaçant n par $2k-1$ dans l'égalité obtenue à la question 3.a, on obtient, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 :

$$I_{2k-1+2}=\frac{2k-1+1}{2}I_{2k-1}-\frac{1}{2e}$$

Soit encore, **pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1** :

$$\mathbf{I_{2k+1}=kI_{2k-1}-\frac{1}{2e}}$$

Le programme ci-dessous initialise I à la valeur de I_1 en ligne (2) ; compte-tenu de la relation précédente, il suffit donc de compléter la ligne (4) comme suit, afin que le programme calcule et affiche la valeur de I_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

(4) I=k*I-1/(2*%e)