CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. Par définition d'une intégrale, et puisque G est une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, **pour tout réel strictement positif x** :

$$\mathbf{f(x)} = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt = \int_1^x g(t)dt = [G(t)]_1^x = \mathbf{G(x) - G(1)}$$

b. G étant une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$, G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$G' = g$$

D'après l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 1.a, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme différence de la fonction dérivable G et de la fonction constante $x \mapsto G(1)$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle, et on a donc, **pour tout réel strictement positif x** :

$$f'(x) = g(x) = \mathbf{\frac{e^x}{x}}$$

c. D'après la question 1.a, on a :

$$\mathbf{f(1) = G(1) - G(1) = 0}$$

2.a. x étant un réel supérieur ou égal à 1, on a, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in [1, x] \quad e^t \geq e^1 = e$$

Il en résulte, par division par t, réel strictement positif, que :

$$\forall t \in [1, x] \quad \frac{e^t}{t} \geq \frac{e}{t}$$

En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[1, x]$, on obtient :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt \geq \int_1^x \frac{e}{t}dt$$

Or, on a :

$$\int_1^x \frac{e}{t}dt = e\int_1^x \frac{1}{t}dt = e[\ln t]_1^x = e(\ln x - \ln 1) = e\ln x$$

On a bien montré que, **pour tout réel x supérieur ou égal à 1**, on a :

$$\mathbf{f(x) \geq e\ln x}$$

b. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} e\ln x = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } e > 0$$

D'après l'inégalité de la question 2.a et un théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3.a. x étant un réel appartenant à $]0,1]$, on a, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in [x, 1] \quad e^x \leq e^t$$

Il en résulte, par division par t, réel strictement positif, que :

$$\forall t \in [x, 1] \quad \frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t}$$

En intégrant cette inégalité sur $[x,1]$, on obtient :

$$\int_x^1 \frac{e^x}{t}\,dt \le \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$$

Or, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^x}{t}\,dt = e^x \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = e^x\left[\ln t\right]_x^1 = e^x\left(\ln 1 - \ln x\right) = -e^x \ln x$$

Comme de plus $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$, il vient, pour tout réel x appartenant à $]0,1]$:

$$-e^x \ln x \le -f(x)$$

On a bien montré que, **pour tout réel x de l'intervalle** $]0,1]$, on a :

$$\mathbf{f(x) \le e^x \ln x}$$

b. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} e^x \ln x = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 0^+} e^x = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

D'après l'inégalité de la question 3.a et un théorème de comparaison, on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0^+} \mathbf{f(x) = -\infty}$$

4. D'après la question 1.b, on a, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$; le tableau de variation de f est le suivant :

x	**0**	**+∞**
f'	‖	**+**
f	‖	**−∞** ↗ **+∞**

5.a. On a vu, à la question 1.b, que pour tout réel strictement positif x, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}$$

Il en résulte que **pour tout réel strictement positif x**, on a :

$$\mathbf{f''(x)} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \mathbf{\frac{(x-1)e^x}{x^2}}$$

b. e^x et x^2 étant strictement positifs sur $\mathbb{R}_+^*$, $f''(x)$ est du signe de $x-1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et s'annule donc en changeant de signe en $x=1$. Donc **la courbe** $(\mathbf{C})$ **admet un point d'inflexion A** d'abscisse 1 ; puisque $f(1)=0$ d'après la question 1.c, les coordonnées de A sont :

$$\mathbf{A(1,0)}$$

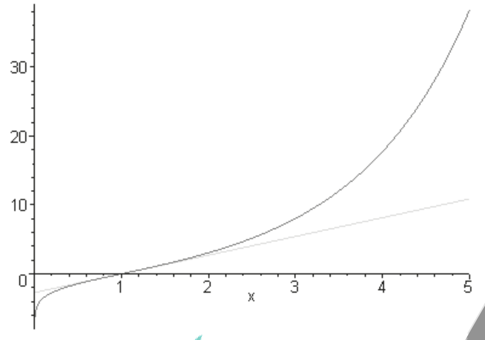
c. Une équation de la tangente $(\mathbf{T})$ **à** $(\mathbf{C})$ **au point A est** :

$$\mathbf{y} = f'(1)(x-1) + f(1) = \mathbf{e(x-1)}$$

d. D'après la question 5.b, f est concave sur $]0,1]$ et convexe sur $[1,+\infty[$, car $f'' \le 0$ sur $]0,1]$

et $f'' \geq 0$ sur $[1,+\infty[$; donc (C) **est en dessous de** (T) **sur** $]0,1]$, **et** (C) **est au-dessus de** (T) **sur** $[1,+\infty[$.

L'allure de la courbe (C) est la suivante :



6.a. Remarquons que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n \Leftrightarrow f(u_n) = n$$

f est continue $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1.b) et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 4), donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f(\mathbb{R}_+^*)$.

On a, d'après les questions 2.b et 3.b :

$$f(\mathbb{R}_+^*) = f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

Pour tout entier naturel n, n appartient à $f(\mathbb{R}_+^*)$, donc **il existe un unique réel, noté** $\mathbf{u_n}$, **appartenant à** $\mathbb{R}_+^*$ **et vérifiant** $f(u_n) = n$, **c'est à dire** $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$.

b. Par définition de u_n, on a, pour tout entier naturel n :

$$f(u_n) = n < f(u_{n+1}) = n+1$$

Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < u_{n+1}$$

Donc **la suite** $(\mathbf{u_n})_{n\geq 0}$ **est (strictement) croissante.**

c. D'après la question 6.b, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ; elle peut donc avoir une limite finie ℓ ou diverger vers $+\infty$.

Si la suite avait une limite finie ℓ, on aurait, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Soit encore, par définition de u_n, le résultat absurde :

$$\lim_{n\to+\infty} n = f(\ell)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{u_n} = +\infty$$

EXERCICE 2

1. Dans cette question, on choisit $a=b=-1$, donc on a :

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

a. La transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la matrice M en la matrice $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, qui est triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la **matrice M n'est pas inversible**.

b. On a, en notant 0 la matrice carrée nulle d'ordre 2 :

$$M^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{M^n}=M^{n-2}M^2=M^{n-2}0=\mathbf{0}$$

2. Dans cette question, on choisit $a=b$, donc on a :

$$M=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & a\end{pmatrix}$$

a. La même transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la matrice M en la matrice $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, qui est triangulaire avec un 0 sur la diagonale, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la **matrice M n'est pas inversible**.

b. On a :

$$M^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a & a+a^2\\ 1+a & a+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a & a(1+a)\\ 1+a & a(1+a)\end{pmatrix}=(1+a)\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & a\end{pmatrix}=(1+a)M$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, par :

$$M^n=(1+a)^{n-1}M$$

<u>Initialisation</u> :

P_2 est vraie car on a, d'après ce qui précède :

$$(1+a)^{2-1}M=(1+a)^1M=(1+a)M=M^2$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$M^n=(1+a)^{n-1}M$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$M^{n+1}=(1+a)^nM$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité $M^2=(1+a)M$:

$$M^{n+1}=M^nM=(1+a)^{n-1}MM=(1+a)^{n-1}M^2=(1+a)^{n-1}(1+a)M=(1+a)^nM$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2**, on a :

$$\mathbf{M^n = (1+a)^{n-1} M}$$

3. La même transformation $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme la matrice M en la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$, qui est triangulaire, donc la méthode du pivot de Gauss assure que la matrice M est inversible si et seulement si les termes diagonaux de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$ sont non nuls.

Ainsi **la matrice M est-elle inversible si et seulement si $a \neq b$**.

4.a. X et Y suivant toutes les deux une loi géométrique, on a :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

On a donc :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([X = k] \cap [Y = k])$$

Puisque les événements $[X = k] \cap [Y = k]$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = k])$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient enfin :

$$\mathbf{P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) P([Y = k])}$$

b. La série $\sum_{k \geq 0} (q^2)^k$ est une série géométrique de raison q^2 avec $-1 < q^2 < 1$, donc cette série est convergente et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{1}{1-q^2}$$

Il en résulte que la série $\sum_{k \geq 1} p^2 q^{2k-2}$ est convergente et qu'on a, par changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{(k-1)} = p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{(1-q)(1+q)}$$

Puisque $q = 1 - p$, on a finalement :

$$\mathbf{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{p(1+q)} = \frac{p}{1+q}}$$

c. D'après la question 3, N est inversible si et seulement si $X \neq Y$, donc on a :

$$A = \overline{[X = Y]}$$

Il en résulte, d'après la question 4.a, que :

$$P(A) = P\left(\overline{[X = Y]}\right) = 1 - P([X = Y]) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) P([Y = k])$$

X et Y suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p, on a, pour tout entier naturel non nul k :

$$P([X=k])=P([Y=k])=pq^{k-1}$$

Donc :

$$P([X=k])P([Y=k])=\left(pq^{k-1}\right)^2=p^2q^{2(k-1)}$$

Il vient donc, d'après la question 4.b :

$$\mathbf{P(A)}=1-\sum_{k=1}^{+\infty}p^2q^{2k-2}=1-\frac{p}{1+q}=\frac{1+q-p}{1+q}=\frac{1+q-(1-q)}{1+q}=\mathbf{\frac{2q}{1+q}}$$

5.a. L'utilisation de la formule du binôme de Newton donne, **pour tout réel x et tout entier naturel n supérieur ou égal à 1** :

$$\mathbf{(x+1)^n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k1^{n-k}=\mathbf{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k}$$

Et, de même :

$$\mathbf{(x+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k}$$

b. L'identité $(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n$ et les résultats de la question 5.a permettent d'écrire :

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)$$

$\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le polynôme $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$; dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus, le terme de degré n est obtenu comme somme des termes $\binom{n}{k}x^k\binom{n}{i}x^i$ avec $k+i=n$, donc on a :

$$\mathbf{\binom{2n}{n}}=\sum_{k+i=n}\binom{n}{k}\binom{n}{i}=\mathbf{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c. X et Y suivant toutes les deux une binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, on a:

$$X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$$

On a donc :

$$[X=Y]=\bigcup_{k=0}^{n}([X=k]\cap[Y=k])$$

Puisque les événements $[X=k]\cap[Y=k]$ sont deux à deux incompatibles, on a :

$$P([X=Y])=\sum_{k=0}^{n}P([X=k]\cap[Y=k])$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient enfin :

$$P([X=Y])=\sum_{k=0}^{n}P([X=k])P([Y=k])$$

X et Y suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, on a, pour tout entier

https://vertuprepas.com/

naturel k de $[\![0,n]\!]$:

$$P([X=k])=P([Y=k])=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc :

$$P([X=k])P([Y=k])=\left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2=\binom{n}{k}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^n}\binom{n}{k}^2$$

Il en résulte, d'après la question 5.b, que :

$$\mathbf{P([X=Y])}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^n}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\mathbf{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

d. Comme dans la question 4.c, et en utilisant le résultat de la question 5.c, on obtient :

$$\mathbf{P(A)}=1-P([X=Y])=\mathbf{1-\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$

EXERCICE 3

1. T étant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$, les valeurs de l'espérance $E(T)$ et de la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T sont respectivement :

$$\mathbf{E(T)}=\frac{1}{\lambda}=\mathbf{1}\text{ et }\mathbf{V(T)}=\frac{1}{\lambda^2}=\mathbf{1}$$

2.a. f est continue sur $]-\infty,0[$ comme fonction nulle, et continue sur $[0,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues ; on a :

$$\lim_{x\to0^-}f(t)=\lim_{x\to0^-}0=0\text{ et }\lim_{x\to0^+}f(t)=\lim_{x\to0^+}te^{-t}=0=f(0)$$

Puisque $\lim_{x\to0^-}f(t)=\lim_{x\to0^+}f(t)=f(0)$, f est continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel positif ou nul t, on a :

$$f(t)=te^{-t}\geq0$$

Pour tout réel strictement négatif t, on a :

$$f(t)=0\geq0$$

Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
Une densité d de la variable aléatoire T de la question 1 est définie par :

$$d(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}=e^{-t} & \text{si } t\geq0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$$

On sait que $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$ converge car :

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx=0$$

$\int_{0}^{+\infty}f(x)dx$ converge car, d'après la question 1 :

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty}xd(x)dx=E(T)=1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 0+1=1$$

Donc **f est bien une densité de probabilité**.

b. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge, et dans ce cas, on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

On sait que $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx$ converge car :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0$$

$\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx$ converge car, d'après la question 1 et la formule de Koënig :

$$\int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \int_{0}^{+\infty} x^2d(x)dx = E(T^2) = V(T)+(E(T))^2 = 1+1=2$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ converge, donc **la variable aléatoire X admet une espérance** et on a :

$$\mathbf{E(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)dx = 0+2 \mathbf{= 2}$$

3. La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Il vient donc :

$$\forall x \in]-\infty, 0[\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

Et :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} te^{-t}dt = \int_{0}^{x} te^{-t}dt$$

On pose :

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1$$
$$v'(t) = e^{-t} \qquad v(t) = -e^{-t}$$

Il vient alors, par intégration par parties, u' et v' étant continues sur $[0, x]$:

$$\int_{0}^{x} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_0^x - \int_{0}^{x}(-e^{-t})dx = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1-(x+1)e^{-x}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} \mathbf{1-(x+1)e^{-x}} & \textbf{si } \mathbf{x \geq 0} \\ \mathbf{0} & \textbf{si } \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

4.a. On a, pour tout réel x :

$$Z > x \Leftrightarrow \min(X_1, X_2) > x \Leftrightarrow (X_1 > x \text{ et } X_2 > x)$$

Il vient donc, puisque X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{P([Z > x])} = P([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) \mathbf{= P([X_1 > x])P([X_2 > x])}$$

b. Par définition de la fonction de répartition H de la variable aléatoire Z et d'après la question 4.a, on a, pour tout réel x :

$$H(x) = P([Z \leq x]) = 1 - P([Z > x]) = 1 - P([X_1 > x])P([X_2 > x])$$

X_1 et X_2 étant deux variables aléatoires suivant toutes les deux la même loi que X, on a :

$$P([X_1 > x]) = P([X_2 > x]) = P([X > x]) = 1 - P([X \le x]) = 1 - F(x)$$

Il en résulte, pour tout réel x :

$$H(x) = 1 - (1 - F(x))^2$$

D'après la question 3, il vient donc, **pour tout réel x** :

$$\mathbf{H(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)^2 e^{-2x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

c. Une densité h de Z s'obtient en dérivant H là où cela est possible, c'est-à-dire ici sur $\mathbb{R}^*$, et en prolongeant h en 0, pour obtenir une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On a donc :

$$h(x) = H'(x) = \begin{cases} -2(x+1)e^{-2x} - (x+1)^2(-2)e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a, pour tout réel x strictement positif :

$$-2(x+1)e^{-2x} - (x+1)^2(-2)e^{-2x} = 2(-x-1+x^2+2x+1)e^{-2x} = 2(x^2+x)e^{-2x} = 2x(x+1)e^{-2x}$$

En posant $h(0) = 0$, **une densité h de Z est bien donnée par** :

$$\mathbf{h(x) = \begin{cases} 2x(x+1)e^{-2x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

5.a. On a, **pour tout réel x** :

$$g'(x) = -\left(3x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} - \left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)\left(-2e^{-2x}\right)$$

$$= \left(-3x^2 - 5x - \frac{5}{2} + 2x^3 + 5x^2 + 5x + \frac{5}{2}\right)e^{-2x} = \left(2x^3 + 2x^2\right)e^{-2x}$$

$$\mathbf{= 2x^2(x+1)e^{-2x}}$$

b. La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$ converge, et dans ce cas, on a :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$$

On sait que $\int_{-\infty}^{0} xh(x)dx$ converge car :

$$\int_{-\infty}^{0} xh(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0$$

Pour tout réel positif ou nul x, on a :

$$\int_0^x th(t)dt = \int_0^x th(t)dt = \int_0^x 2t^2(t+1)e^{-2t}dt = \int_0^x g'(t)dt = [g(t)]_0^x = g(x) - g(0)$$

$$= -\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + \frac{5}{4}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x th(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\left(-\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}\right)e^{-2x} + \frac{5}{4}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16x}+\frac{5}{16x^2}+\frac{5}{32x^3}\right)(2x)^3 e^{-2x}+\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

Car :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{16x}+\frac{5}{16x^2}+\frac{5}{32x^3}\right)=\frac{1}{8}$$

Et :

$$\lim_{x\to+\infty}(2x)^3 e^{-2x}=0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}2x=+\infty \text{ et, par croissance comparée, } \lim_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$$

Donc $\int_0^{+\infty} xh(x)dx$ converge et on a :

$$\int_0^{+\infty} xh(x)dx=\frac{5}{4}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx$ converge, donc **la variable aléatoire Z admet une espérance** et on a :

$$\mathbf{E(Z)}=\int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)dx=\int_{-\infty}^{0} xh(x)dx+\int_0^{+\infty} xh(x)dx=0+\frac{5}{4}=\mathbf{\frac{5}{4}}$$

6.a. Lorsque $X_1 \le X_2$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_1 \text{ et } W=\max(X_1,X_2)=X_2$$

Donc :

$$Z+W=X_1+X_2$$

Lorsque $X_2 < X_1$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_2 \text{ et } W=\max(X_1,X_2)=X_1$$

Donc :

$$Z+W=X_2+X_1$$

Donc on a, dans les deux cas :

$$\mathbf{Z+W=X_1+X_2}$$

b. Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 6.a, 2.b et 5.b, il vient :

$$\mathbf{E(W)}=E(X_1+X_2-Z)=E(2X-Z)=2E(X)-E(Z)=2\cdot 2-\frac{5}{4}=4-\frac{5}{4}=\mathbf{\frac{11}{4}}$$

c. Lorsque $X_1 \le X_2$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_1,\ W=\max(X_1,X_2)=X_2 \text{ et } |X_1-X_2|=X_2-X_1 \text{ car } X_1-X_2\le 0$$

Donc :

$$|X_1-X_2|=W-Z$$

Lorsque $X_2 < X_1$, on a :

$$Z=\min(X_1,X_2)=X_2,\ W=\max(X_1,X_2)=X_1 \text{ et } |X_1-X_2|=X_1-X_2 \text{ car } X_1-X_2>0$$

Donc :

$$|X_1-X_2|=W-Z$$

Donc on a, dans les deux cas :

$$\mathbf{|X_1-X_2|=W-Z}$$

d. Par linéarité de l'espérance, et d'après les questions 5.b et 6.c, il vient :

$$\mathbf{E(|X_1-X_2|)}=E(W-Z)=E(W)-E(Z)=\frac{11}{4}-\frac{5}{4}=\frac{6}{4}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

EXERCICE 4

1. Par définition de la matrice X_n, on a :

$$\mathbf{X_0} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Car :

$$u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$$

2.a. Par définition de la matrice X_n, et vu la relation de récurrence définissant la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{X_{n+1}} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbf{AX_n}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n X_0$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$A^0 X_0 = IX_0 = X_0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^n X_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1} X_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.a :

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^n X_0}$$

3.a. On a :

$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{4I}$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$P\left(\frac{1}{4}Q\right) = I$$

Ceci assure que **la matrice P est inversible** et que sa matrice inverse est :

$$\mathbf{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$$

b. Les calculs donnent :

$$\mathbf{PT} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$$

Et :

$$\mathbf{AP} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = PT^nP^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Le calcul des produits PT et AP permet de constater que :

$$AP = PT$$

Par multiplication à droite par P^{-1} des deux membres de cette égalité, il vient donc :

$$A = PTP^{-1}$$

On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité précédente :

$$A^{n+1} = A^nA = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^nITP^{-1} = PT^nTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = PT^nP^{-1}}$$

4.a. On a :

$$N = T - D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis, en notant 0 la matrice nulle d'ordre 3 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Il vient donc, **pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{N^k} = N^{k-2}N^2 = N^{k-2}0 = \mathbf{0}$$

b. On a :

$$DN=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Et :

$$ND=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc on a bien vérifié que :

$$\mathbf{DN = ND}$$

Puisque D et N commutent pour la multiplication des matrices, la formule du binôme de Newton permet d'écrire, pour tout entier naturel n :

$$T^n=(D+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k$$

D'après la question 4.a, il vient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}D^{n-k}N^k=\binom{n}{0}D^nN^0+\binom{n}{1}D^{n-1}N=D^n+nD^{n-1}N$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a :

$$D^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1^n&0\\0&0&1^n\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\text{ et donc }D^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$D^{n-1}N=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}2^{n-1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Puis, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$T^n=D^n+nD^{n-1}N=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+2n\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

La formule ci-dessus reste vraie pour $n=0$ puisque $T^0=I$.
Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{T^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

c. On a, pour tout entier naturel n :

$$PT^n=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&2&4\\1&4&0\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}2^n&1&2n+4\\2^n&2&4n+4\\2^n&4&8n\end{pmatrix}$$

Puis, d'après les questions 3.b et 3.a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit encore, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\cdot 2^n - n - 3 & -4\cdot 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 2n - 4 & -4\cdot 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 4n - 4 & -4\cdot 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}}$$

5.a. Par définition de la matrice X_n, et d'après les questions 2.b, 4.c et 1, il vient, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = X_n = A^nX_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\cdot 2^n - n - 3 & -4\cdot 2^n + \frac{3}{2}n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 2n - 4 & -4\cdot 2^n + 3n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\cdot 2^n - 4n - 4 & -4\cdot 2^n + 6n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En calculant la dernière ligne de cette matrice colonne, on a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4\cdot 2^n - 4n - 4\right)}$$

b. Il résulte de la question 5.a que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(4\cdot 2^n - 4n - 4\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(4 - 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\ln n}}{e^{n\ln 2}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln n - n\ln 2} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right)} = 0$$

Car :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) = -\ln 2 < 0 \text{ car } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln 2\right) = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$$