CORRIGÉ

Par Bernard Delacampagne, professeur de mathématiques au lycée Madeleine-Michelis, à Amiens.

EXERCICE 1

1.a. B étant un réel supérieur ou égal à a, on a :

$$\int_a^B \mathbf{2e^{-2(t-a)}dt} = \left[-e^{-2(t-a)}\right]_a^B = \mathbf{1-e^{-2(B-a)}}$$

b. On déduit de la question 1.a que :

$$\lim_{B\to+\infty}\int_a^B 2e^{-2(t-a)}dt = \lim_{B\to+\infty}\left(1-e^{-2(B-a)}\right)=1$$

Car :

$$\lim_{B\to+\infty}\left(-2(B-a)\right)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

Il en résulte que l'intégrale $\int_a^{+\infty}2e^{-2(t-a)}dt$ converge et vaut :

$$\int_a^{+\infty}\mathbf{2e^{-2(t-a)}dt} = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B 2e^{-2(t-a)}dt = \mathbf{1}$$

2. f est continue sur $]-\infty,a[$ comme fonction constante nulle, et sur $[a,+\infty[$ comme produit, différence et composée de fonctions continues.
f admet des limites finies à gauche et à droite en a, car :

$$\lim_{t\to a^-}f(t)=\lim_{t\to a^-}0=0 \text{ et } \lim_{t\to a^+}f(t)=\lim_{t\to a^+}2e^{-2(t-a)}=2$$

Donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ car :

$$f(t)=\begin{cases}2e^{-2(t-a)}>0 & \text{si } t\geq a\\ 0\geq 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Puisque $\int_{-\infty}^a f(t)dt=\int_{-\infty}^a 0dt=0$ et que $\int_a^{+\infty}f(t)dt=1$ d'après la question 1.b, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$ converge et vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\int_{-\infty}^a f(t)dt+\int_a^{+\infty}f(t)dt=1$$

Donc **f peut être considérée comme une densité de probabilité**.

3. Par définition de la fonction de répartition F_X de X, on a, pour tout réel x :

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Il vient donc, pour tout réel x strictement négatif :

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^x 0dt=0$$

Et, pour tout réel x positif ou nul :

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^0 0dt+\int_{-\infty}^x 2e^{-2(t-a)}dt=0+\left[-e^{-2(t-a)}\right]_a^x=1-e^{-2(x-a)}$$

Ainsi a-t-on montré que :

$$\mathbf{F_X(x)}=\begin{cases}\mathbf{1-2e^{-2(x-a)}} & \textbf{si } \mathbf{x\geq a}\\ \mathbf{0} & \textbf{sinon}\end{cases}$$

4.a. On a, pour tout réel x :

$$F_Y(x)=P(Y\leq x)=P(X-a\leq x)=P(X\leq x+a)=F_X(x+a)$$

On a :

$$x+a \geq a \Leftrightarrow x \geq 0$$

Il en résulte, en utilisant la fonction de répartition F_X de X obtenue à la question 3, que :

$$\mathbf{F_Y(x)} = \begin{cases} 1-2e^{-2(x+a-a)} = \mathbf{1-2e^{-2x}} & \mathbf{si\ x \geq 0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{sinon} \end{cases}$$

b. En posant $\lambda = 2$, la fonction de répartition F_Y de Y se présente sous la forme :

$$\begin{cases} F_Y(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_Y(x) = 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On en déduit que **Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$**.

c. L'espérance de Y est donc :

$$\mathbf{E(Y)} = \frac{1}{\lambda} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

d. Puisque Y admet une espérance, et que $X = Y + a$, **X admet une espérance** et on a, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbf{E(X)} = E(Y+a) = E(Y) + a = \mathbf{\frac{1}{2} + a}$$

EXERCICE 2

1.a. On a, **pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$** :

$$\mathbf{g'(t)} = \ln(1+t) + (1+t)\cdot\frac{1}{1+t} - 1 = \ln(1+t) + 1 - 1 = \mathbf{\ln(1+t)}$$

b. D'après la question 1.a, g est une primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$, donc :

$$\mathbf{u_1} = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \left[g(t)\right]_0^1 = g(1) - g(0) = \mathbf{2\ln 2 - 1}$$

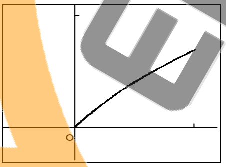
2.a. On a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$\mathbf{f'(t) = \frac{1}{1+t}} \text{ et } \mathbf{f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}}$$

b. f est (strictement) croissante sur $[0,1]$, car on a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} > 0$$

La courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé est la suivante :



c. f est concave sur $[0,1]$ car on a, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} < 0$$

3.a. f étant croissante sur $[0,1]$, on a :

$$0 \le t \le 1 \Rightarrow f \Rightarrow f(0) \le f(t) \le f(1) \Leftrightarrow 0 \le \ln(1+t) \le \ln 2$$

On a donc, **pour tout réel t de $[0,1]$**, l'encadrement suivant :

$$\mathbf{0 \le \ln(1+t) \le \ln 2}$$

b. On déduit de l'encadrement obtenu à la question 3.a que, pour tout réel t de $[0,1]$ et pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \le (\ln(1+t))^n \le (\ln 2)^n$$

D'après les inégalités de la moyenne, il vient, pour tout entier naturel n :

$$(1-0)0 \le \int_0^1 (\ln(1+t))^n \,dt \le (1-0)(\ln 2)^n$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{0 \le u_n \le (\ln 2)^n}$$

c. Puisque $-1 < \ln 2 < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0$$

L'encadrement de la question 3.b et le théorème des gendarmes assurent que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et a pour limite 0**.

4.a. Par définition de u_n, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \,dt$$

Calculons u_{n+1} à l'aide d'une intégration par parties, en posant, pour tout réel t de $[0,1]$:

$$u(t) = (\ln(1+t))^{n+1} \qquad u'(t) = (n+1)\frac{(\ln(1+t))^n}{1+t}$$

$$v'(t) = 1 \qquad v(t) = 1+t$$

u, v, u' et v' étant continues sur $[0,1]$, il vient, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \int_0^1 (\ln(1+t))^{n+1} \,dt = \left[(1+t)(\ln(1+t))^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\frac{(\ln(1+t))^n}{1+t}(1+t)\,dt$$

$$= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+t))^n \,dt = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n$$

Ainsi a-t-on, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n}$$

b. On déduit de la question 3.b que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} \ge 0$$

On a alors, d'après la question 4.a, les équivalences :

$$u_{n+1} \ge 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)u_n \ge 0 \Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1} \ge (n+1)u_n$$

Ainsi a-t-on montré que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{(n+1)u_n \le 2(\ln 2)^{n+1}}$$

c. Par définition de u_n et linéarité de l'intégrale, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\left(\ln(1+t)\right)^{n+1}dt-\int_0^1\left(\ln(1+t)\right)^{n}dt=\int_0^1\left(\left(\ln(1+t)\right)^{n+1}-\left(\ln(1+t)\right)^{n}\right)dt$$
$$=\int_0^1\left(\ln(1+t)-1\right)\left(\ln(1+t)\right)^{n}dt$$

On a vu à la question 3.b que, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel n, on a :

$$\left(\ln(1+t)\right)^n\geq 0$$

On a également :

$$t\leq 1\Rightarrow 1+t\leq 2\Rightarrow 1+t\leq e\Rightarrow \ln(1+t)\leq 1\Rightarrow \ln(1+t)-1\leq 0$$

Donc, pour tout réel t de $[0,1]$ et tout entier naturel n, il vient :

$$\left(\ln(1+t)-1\right)\left(\ln(1+t)\right)^n\leq 0$$

Par négativité de l'intégrale d'une fonction négative sur un segment, il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0$$

Donc **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante**.

d. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0$$

On a alors, d'après la question 4.a, les équivalences :

$$u_{n+1}-u_n\leq 0\Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1}-(n+1)u_n-u_n\leq 0\Leftrightarrow 2(\ln 2)^{n+1}\leq (n+2)u_n$$

On a donc montré que, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{(n+2)u_n\geq 2(\ln 2)^{n+1}}$$

e. D'après les questions 4.b et 4.d, on a, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+2}\leq u_n\leq\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

Il en résulte, pour tout entier naturel n, l'encadrement :

$$\frac{n}{n+2}\leq\frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}\leq\frac{n}{n+1}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}=1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}=1$$

Ces deux limites, l'encadrement précédent et le théorème des gendarmes assurent que :

$$\mathbf{\lim_{v\to+\infty}\frac{nu_n}{2(\ln 2)^{n+1}}=1}$$

EXERCICE 3

1.a. On a, **pour tout réel positif ou nul x** :

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2}=\mathbf{\frac{3}{(x+2)^2}}$$

b. D'après la question 1.a, on a, pour tout réel positif ou nul x :

$$f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}>0$$

On a :

$$\mathbf{f(0)=\frac{1}{2}}\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=\mathbf{2}$$

D'où le tableau des variations de f, en y plaçant les réels 1 et $f(1)$:

x	**0**		**1**		**+∞**
f'			**+**		
f	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	↗	**1**	↗	**2**

2.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$0\le u_n\le 1$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$0\le u_0=\frac{1}{2}\le 1$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$0\le u_n\le 1$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$0\le u_{n+1}\le 1$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$0\le u_n\le 1\Rightarrow f(0)\le u_{n+1}=f(u_n)\le f(1)$$

Puisque $f(0)=\frac{1}{2}\ge 0$ et $f(1)=1$, il vient :

$$0\le u_{n+1}\le 1$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n, le réel $\mathbf{u_n}$ appartient à l'intervalle $\mathbf{[0,1]}$**.

b. D'après la question 1.a, on sait que, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$|f'(x)|=\left|\frac{3}{(x+2)^2}\right|=\frac{3}{(x+2)^2}$$

On a :

$$x\ge 0\Rightarrow x+2\ge 2\Rightarrow (x+2)^2\ge 4\Rightarrow \frac{1}{(x+2)^2}\le\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{3}{(x+2)^2}\le\frac{3}{4}$$

Ainsi a-t-on, **pour tout réel x de $\mathbf{[0,1]}$**, l'inégalité suivante :

$$\mathbf{|f'(x)|\le\frac{3}{4}}$$

c. f est dérivable sur $[0,1]$, et d'après la question 2.b, on a, pour tout réel x de $[0,1]$:

$$|f'(x)| \le \frac{3}{4}$$

De plus, d'après la question 2.a, u_n appartient à $[0,1]$, donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout entier naturel n :

$$|f(u_n) - f(1)| \le \frac{3}{4}|u_n - 1|$$

Puisque $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(1) = 1$, il vient, **pour tout entier naturel n** :

$$\boldsymbol{|u_{n+1} - 1| \le \frac{3}{4}|u_n - 1|}$$

d. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$|u_n - 1| \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$|u_0 - 1| = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$|u_n - 1| \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et la question 2.c :

$$|u_{n+1} - 1| \le \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \le \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\boldsymbol{|u_n - 1| \le \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

e. Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Cette limite, l'inégalité de la question 2.d, ainsi que le théorème des gendarmes, assurent que **la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente** et que :

$$\boldsymbol{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

3.a. Les calculs donnent :

$$\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{2J}$$

b. La relation peut s'établir en utilisant la formule du binôme de Newton, ou par récurrence.
Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$I + \frac{1}{2}\left(3^0 - 1\right)J = I + 0J = I = A^0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)J$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$A^{n+1} = A^n A = \left(I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J\right)\left(I + J\right) = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J + J + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J^2$$

Puisque, d'après la question 3.a, $J^2 = 2J$, il vient :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J + J + \left(3^n - 1\right)J = I + \left(\frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 1 + \left(3^n - 1\right)\right)J = I + \left(\frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2}\right)J$$

Soit, après simplification :

$$A^{n+1} = I + \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)J$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J}$$

c. D'après la question 3.a, on a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = I + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 1 & \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) \\ \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) & \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right) + 1 \end{pmatrix}$$

Après simplification, il vient donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{1}{2}\left(3^n + 1\right)} & \mathbf{\frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)} \\ \mathbf{\frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)} & \mathbf{\frac{1}{2}\left(3^n + 1\right)} \end{pmatrix}$$

4.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$X_n = A^n X_0$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$A^0X_0 = IX_0 = X_0$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$X_n = A^nX_0$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$X_{n+1} = A^{n+1}X_0$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_n + q_n \\ p_n + 2q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = AX_n = AA^nX_0 = A^{n+1}X_0$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{X_n = A^nX_0}$$

b. D'après les questions 4.a et 3.c, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n+1) & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & \frac{1}{2}(3^n+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n+1)+3^n-1 \\ \frac{1}{2}(3^n-1)+3^n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cdot 3^n - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\cdot 3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^{n+1}-1) \\ \frac{1}{2}(3^{n+1}+1) \end{pmatrix}$$

On a donc, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{p_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)} \text{ et } \mathbf{q_n = \frac{1}{2}(3^{n+1}+1)}$$

5.a. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

Initialisation :
P_0 est vraie car on a :

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{2} = u_0$$

Hérédité :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{p_n}{q_n}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1}=f(u_n)=\frac{2u_n+1}{u_n+2}=\frac{2\frac{p_n}{q_n}+1}{\frac{p_n}{q_n}+2}=\frac{\frac{2p_n+q_n}{q_n}}{\frac{p_n+2q_n}{q_n}}=\frac{2p_n+q_n}{p_n+2q_n}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.
D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{u_n=\frac{p_n}{q_n}}$$

b. Il résulte des questions 5.a et 4.b qu'on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{u_n}=\frac{p_n}{q_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)}{\frac{1}{2}\left(3^{n+1}+1\right)}=\mathbf{\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}+1}}$$

Il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}+1}=1$$

Car :

$$\lim_{n\to+\infty}3^{n+1}=+\infty\ \left(\text{car } 3>1\right)\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$$

Ainsi a-t-on **retrouvé la limite de la suite $\left(\mathbf{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$**, obtenue à la question 2.e.

EXERCICE 4

1.a. La puce se trouvant sur le sommet 1 à l'instant 0, elle sera à l'instant 1 sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de X_1 est donc donnée par le tableau :

k	**1**	**3**
$\mathbf{P([X_1=k])}$	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$

b. L'espérance de X_1 est donc :

$$\mathbf{E(X_1)}=\frac{2}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot3=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

On a :

$$E\left(X_1^2\right)=\frac{2}{3}\cdot1^2+\frac{1}{3}\cdot3^2=\frac{11}{3}$$

On en déduit, par la formule de Koenig-Huygens, que :

$$\mathbf{V(X_1)}=E\left(X_1^2\right)-\left(E(X_1)\right)^2=\frac{11}{3}-\frac{25}{9}=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

2. Si la puce se trouve sur le sommet 1 à l'instant 1, elle sera à l'instant 2 sur le sommet 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur le sommet 3 avec la probabilité $\frac{1}{3}$; si elle se trouve sur le sommet 3 à l'instant 1, elle sera à l'instant 2 sur le sommet 2 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou sur le sommet 4 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

On a donc :

$$P([X_2=1])=P([X_2=1]\cap[X_1=1])=P([X_1=1])P_{[X_1=1]}([X_2=1])=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P([X_2=2])=P([X_2=2]\cap[X_1=3])=P([X_1=3])P_{[X_1=3]}([X_2=2])=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P([X_2=3])=P([X_2=3]\cap[X_1=1])=P([X_1=1])P_{[X_1=1]}([X_2=3])=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

$$P([X_2=4])=P([X_2=4]\cap[X_1=3])=P([X_1=3])P_{[X_1=3]}([X_2=4])=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

La loi de probabilité de X_2 est donc donnée par le tableau :

k	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{P([X_2=k])}$	$\mathbf{\frac{4}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$

3.a. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{[X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\}$, on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$P([X_{n+1}=1])=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k]\cap[X_{n+1}=1])=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=1])$$

D'après les hypothèses de l'énoncé, on a :

$$P_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1])=\frac{2}{3}\ ,\ P_{[X_n=2]}([X_{n+1}=1])=\frac{1}{2}\ \text{et}\ P_{[X_n=3]}([X_{n+1}=1])=P_{[X_n=4]}([X_{n+1}=1])=0$$

On a donc, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{P([X_{n+1}=1])=\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])}$$

b. On obtient de même, **pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2** :

$$\mathbf{P([X_{n+1}=2])}=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=2])=\mathbf{\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{1}{3}P([X_n=4])}$$

$$\mathbf{P([X_{n+1}=3])}=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=3])=\mathbf{\frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])}$$

$$\mathbf{P([X_{n+1}=4])}=\sum_{k=1}^{4}P([X_n=k])P_{[X_n=k]}([X_{n+1}=4])=\mathbf{\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{2}{3}P([X_n=4])}$$

c. Puisque la puce se trouve sur le sommet 1 à l'instant 0, on a :

$$P([X_0=1])=1\ \text{et}\ P([X_0=2])=P([X_0=3])=P([X_0=4])=0$$

Donc il vient, d'après la question 1.a :

$$\frac{2}{3}P([X_0=1])+\frac{1}{2}P([X_0=2])=\frac{2}{3}=P([X_1=1])$$

$$\frac{1}{2}P([X_0=3])+\frac{1}{3}P([X_0=4])=0=P([X_1=2])$$
$$\frac{1}{3}P([X_0=1])+\frac{1}{2}P([X_0=2])=\frac{1}{3}=P([X_1=3])$$
$$\frac{1}{2}P([X_0=3])+\frac{2}{3}P([X_0=4])=0=P([X_1=4])$$

D'après les questions 1.a et 2, il vient :

$$\frac{2}{3}P([X_1=1])+\frac{1}{2}P([X_1=2])=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}=P([X_2=1])$$
$$\frac{1}{2}P([X_1=3])+\frac{1}{3}P([X_1=4])=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P([X_2=2])$$
$$\frac{1}{3}P([X_1=1])+\frac{1}{2}P([X_1=2])=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}=P([X_2=3])$$
$$\frac{1}{2}P([X_1=3])+\frac{2}{3}P([X_1=4])=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P([X_2=4])$$

Ainsi **les relations précédentes sont-elles encore valables pour $n=1$ et $n=0$**.

d. Puisque $\{[X_n=1],[X_n=2],[X_n=3],[X_n=4]\}$ est un système complet d'événements, on a, **pour tout entier naturel n** :

$$\mathbf{P([X_n=1])+P([X_n=2])+P([X_n=3])+P([X_n=4])=1}$$

4. D'après la question 3.c, on a, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}P([X_{n+1}=1])\\P([X_{n+1}=2])\\P([X_{n+1}=3])\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\\\frac{1}{2}P([X_n=3])+\frac{1}{3}P([X_n=4])\\\frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\end{pmatrix}$$

D'après la question 3.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n=4])=1-P([X_n=1])-P([X_n=2])-P([X_n=3])$$

Il vient donc, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\\-\frac{1}{3}P([X_n=1])-\frac{1}{3}P([X_n=2])+\frac{1}{6}P([X_n=3])+\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}P([X_n=1])+\frac{1}{2}P([X_n=2])\end{pmatrix}$$

Soit encore :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P([X_n=1])\\P([X_n=2])\\P([X_n=3])\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}4&3&0\\-2&-2&1\\2&3&0\end{pmatrix}U_n+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=AU_n+B$$

On a bien établi, **pour tout entier naturel n**, la relation :

$$\mathbf{U_{n+1} = AU_n + B}$$

5.a. L étant une matrice à trois lignes et une colonne, posons :

$$L = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a les équivalences :

$$L = AL + B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{6}(4x+3y) \\ y &= \frac{1}{6}(-2x-2y+z)+\frac{1}{3} \\ z &= \frac{1}{6}(2x+3y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (L_1) \\ 2x + 8y - z = 2 & (L_2) \\ 2x + 3y - 6z = 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 & (L_1) \\ 11y - z = 2 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 6y - 6z = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y & (L_1) \\ 10y = 2 & (L_2) \\ y = z & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{10} \\ y = z = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Une matrice L à trois lignes et une colonne vérifiant $\mathbf{L = AL + B}$ est donc :

$$\mathbf{L = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b. Montrons par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

<u>Initialisation</u> :

P_0 est vraie car on a :

$$A^0(U_0 - L) + L = I(U_0 - L) + L = U_0 - L + L = U_0$$

<u>Hérédité</u> :

On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$U_{n+1} = A^{n+1}(U_0 - L) + L$$

On a, d'après la question 4, l'hypothèse de récurrence et la question 5.b :

$$U_{n+1} = AU_n + B = A\left(A^n(U_0 - L) + L\right) + B = A^{n+1}(U_0 - L) + AL + B = A^{n+1}(U_0 - L) + L$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{U_n = A^n (U_0 - L) + L}$$

6.a. Le calcul donne, en notant I la matrice identité d'ordre trois :

$$RQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10I$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$R\left(\frac{1}{10}Q\right) = I$$

Ceci prouve que **R est inversible** et que :

$$\mathbf{R^{-1} = \frac{1}{10}Q}$$

b. En notant 0 la matrice carrée nulle d'ordre 3, le calcul donne :

$$CR - RD = 6AR - RD = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi a-t-on :

$$\mathbf{CR - RD = 0}$$

c. D'après la question 6.b, on a les équivalences :

$$CR - RD = 0 \Leftrightarrow CR = RD \Leftrightarrow 6AR = RD \Leftrightarrow A = \frac{1}{6}RDR^{-1}$$

Montrons alors par récurrence la propriété P_n, définie pour tout entier naturel n, par :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$$

<u>Initialisation</u> :
P_0 est vraie car on a :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^0 RD^0R^{-1} = RIR^{-1} = RR^{-1} = I = A^0$$

<u>Hérédité</u> :
On suppose P_n vraie, pour une valeur de l'entier naturel n, c'est-à-dire :

$$A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}$$

On montre que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$A^{n+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1}R^{-1}$$

On a, d'après l'hypothèse de récurrence et le début de cette question :

$$A^{n+1} = A^nA = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}\frac{1}{6}RDR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^nIDR^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} RD^{n+1}R^{-1}$$

Ceci assure que P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que, **pour tout entier naturel n**, on a :

$$\mathbf{A^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}}$$

7. D'après les questions 5.b et 6.c, il vient, pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n(U_0 - L) + L = \left(\frac{1}{6}\right)^n RD^nR^{-1}(U_0 - L) + L$$

Puisque D est une matrice diagonale, on a, pour tout entier naturel n :

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n D^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{6} < 1$, $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0,\ \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Il vient donc, puisqu'on admet que la limite de la matrice U_n lorsque n tend vers $+\infty$ est une matrice U dont les coefficients sont obtenus en prenant la limite des coefficients de U_n lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\mathbf{U} = \lim_{n\to+\infty} U_n = R\left(\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n D^n\right)R^{-1}(U_0 - L) + L = R0R^{-1}(U_0 - L) + L = L = \mathbf{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Par définition de U_n, il en résulte que :

$$\lim_{n\to+\infty} P([X_n = 1]) = \frac{3}{10} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P([X_n = 2]) = \lim_{n\to+\infty} P([X_n = 1]) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

D'après la question 3.d, on a, pour tout entier naturel n :

$$P([X_n = 4]) = 1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])$$

Il vient donc :

$$\mathbf{\lim_{n\to+\infty} P([X_n = 4])} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P([X_n = 1]) - P([X_n = 2]) - P([X_n = 3])\right) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{3}{10}}$$